

Polycopié LSO 1 : Outils Mathématiques

Responsables du cours :
Nejla Nouaili et Denis Pasquignon
Université Paris-Dauphine,

2 septembre 2024

Nejla Nouaili
CEREMADE, Université Paris-Dauphine, 75016 Paris, France.
E-mail : nouaili@ceremade.dauphine.fr

Denis Pasquignon
CEREMADE, Université Paris-Dauphine, 75016 Paris, France.
E-mail : pasquignon@ceremade.dauphine.fr

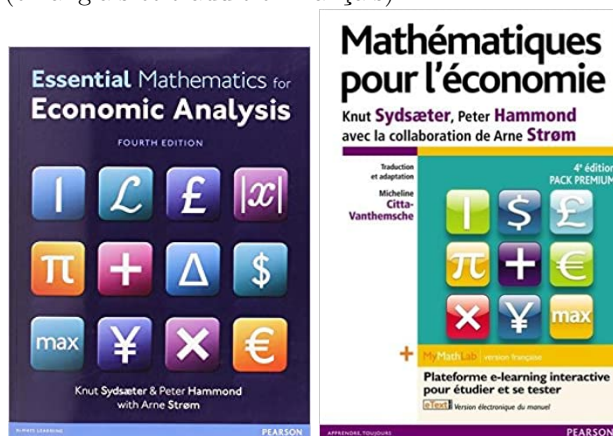
Table des matières

1	Etude de fonction	3
1.1	introduction	3
1.2	Domaine de définition et parité :	3
1.3	Opérations sur les fonctions	4
1.4	La notion de limite	5
1.4.1	limite à l'infini	5
1.4.2	limite en une valeur	6
1.4.3	Opérations algébriques sur les limites	6
1.5	Composition des limites	7
1.6	Calcul de dérivées	8
1.6.1	Définition	8
1.6.2	Equation de tangente	8
1.7	Les formules	10
1.8	Fonctions convexes ou concaves	11
1.9	Méthodologie pour l'étude d'une fonction	11
1.10	Fonctions bijectives	13
1.11	Exercices	14
2	Les fonctions usuelles	17
2.1	Fonction affine	17
2.1.1	Définition et Propriétés	17
2.1.2	Résolution d'un système d'équations	19
2.1.3	Inégalité linéaire	19
2.1.4	Exercices	20
2.2	Les fonctions polynômes et les fractions rationnelles	21
2.2.1	Définition et Propriétés	21
2.2.2	Exercices	24
2.3	La fonction logarithme	24
2.3.1	Définition et Propriétés	24
2.3.2	Exercices	25
2.4	La fonction exponentielle	25
2.4.1	Définition et Propriétés	25
2.4.2	Exercices	26
2.5	La fonction puissance	27
2.5.1	Définition et Propriétés	27
2.5.2	Exercices	28

3	Calcul de dérivées	31
3.1	Définition et calcul de dérivées	31
3.1.1	Définition	31
3.1.2	Les formules	32
3.2	Approximation affine	33
3.2.1	Le développement limité à l'ordre 1	33
3.2.2	Approximation affine et calcul approché	34
3.2.3	Variation relative et élasticité	35
3.3	Exercices	37
4	Calcul d'intégrales	39
4.1	Définition et Propriétés	39
4.2	Propriétés de l'intégrale définie	40
4.2.1	Relation de Chasles	40
4.2.2	Linéarité	40
4.2.3	Intégration par parties	41
4.3	Exercices	42

Avertissement

Ce document est issu d'un support de cours Mise à niveau et outils mathl. Il doit beaucoup
— au polycopié de Denis Pasquignon.
— au Livre suivant (en anglais et traduit en français)



Il reste sans aucun doute beaucoup d'erreurs et de coquilles. N'hésitez pas à nous les signaler.

Chapitre 1

Etude de fonction

1.1 introduction

Les fonctions sont importantes dans presque tous les domaines des mathématiques pures et appliquées, y compris celles qu'on emploie en économie. L'analyse économique foisonne de termes comme « fonctions d'offre » et « fonctions de demande », « fonctions de coût », « fonctions de production », « fonctions de consommation », etc.

1.2 Domaine de définition et parité :

Définition 1.2.1 Une application f est la donnée d'un ensemble de départ, d'un ensemble d'arrivée, et d'une règle de calcul qui associe à tout élément x de l'ensemble de départ un unique élément de l'ensemble d'arrivée, noté $f(x)$ et appelé image de x par f . La règle de calcul est notée $x \mapsto f(x)$.

Le domaine de définition d'une fonction est l'ensemble des réels x pour lesquels le calcul de $f(x)$ est possible.

Le graphe d'une fonction f est l'ensemble des points $(x, f(x))$ lorsque x décrit le domaine de définition de f .

Définition 1.2.2 Si le domaine de définition D d'une fonction f est symétrique, c'est-à-dire si l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in D \implies -x \in D,$$

On dit que f est une fonction paire si

$$\forall x \in D, \quad f(x) = f(-x).$$

Dans ce cas, le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On dit que f est une fonction impaire si

$$\forall x \in D, \quad f(x) = -f(-x).$$

Dans ce cas, le graphe de f est symétrique par rapport à l'origine.

Par exemple la fonction $f(x) = x^2$ est paire sur son domaine $\mathbb{R}$ tandis que $f(x) = x^3$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

1.3 Opérations sur les fonctions

Soit deux fonctions f et g définies sur le même domaine I , on peut alors additionner, soustraire, multiplier ces deux fonctions et ainsi créer de nouvelles fonctions $f + g$, $f - g$, fg définies sur I par

$$\forall x \in I, (f + g)(x) = f(x) + g(x), (f - g)(x) = f(x) - g(x), \text{ et } (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Pour diviser f par g , il faut supposer de plus que g ne s'annule pas sur le domaine I , ci cela est le cas, on a

$$\forall x \in I, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Exemple 1.3.1 On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1 \text{ et } g(x) = x^2 - 1,$$

f et g sont définies sur $\mathbb{R}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f + g)(x) = 2x^2, (f - g)(x) = 2 \text{ et } (fg)(x) = x^4 - 1.$$

Pour la division, puisque la fonction g s'annule en 1 et -1, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, (f/g)(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}.$$

On peut aussi composer des fonctions : ainsi $f \circ g$ est la fonction définie sur I par

$$\forall x \in I, (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Cela signifie que l'on commence par calculer $g(x)$ puis on calcule la valeur de f au réel $g(x)$. Pour que ce calcul soit possible, il est nécessaire que le réel $g(x)$ soit dans le domaine de définition de f . Donnons deux exemples :

Exemple 1.3.2 On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1 \text{ et } g(x) = x^2 - 1,$$

f et g sont définies sur $\mathbb{R}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 2.$$

Par contre $f \circ g$ et $g \circ f$ sont deux fonctions différentes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (x^2 + 1)^2 - 1 = x^4 + 2x^2.$$

1.4 La notion de limite

1.4.1 limite à l'infini

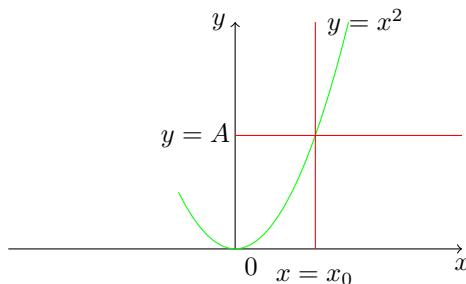
— **limite infinie à l'infini.**

Interprétation graphique de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: pour tout réel A on trace la droite horizontale $y = A$, tous les points du graphe de f sont situés au dessus de la droite $y = A$ pourvu que leur abscisse soit assez grande.

A l'aide des quantificateurs cette phrase devient

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \geq A.$$

Par exemple $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$. En effet comme le montre la figure ci-dessous, pour tout réel A , il existe un réel x_0 tel que pour x supérieur à x_0 , le graphe de la fonction est situé dans le quart plan supérieur droite. Ce qui signifie que la valeur de la fonction en x est supérieur à A .



— **limite réelle à l'infini.**

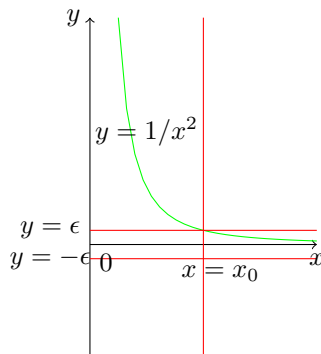
Interprétation graphique de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, avec $l \in \mathbb{R}$:

pour tout réel $\epsilon > 0$ on trace les droites horizontales $y = l + \epsilon$ et $y = l - \epsilon$, tous les points du graphe de f sont situés entre ces deux droites pourvu que leur abscisse soit assez grande.

A l'aide des quantificateurs cette phrase devient

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq x_0 \Rightarrow -\epsilon \leq f(x) - l \leq \epsilon.$$

Par exemple $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. En effet pour un ϵ réel strictement positif, il existe un réel x_0 tel que le graphe est situé dans le tube défini par les droites $y = \epsilon$, $y = -\epsilon$ et la droite verticale $x = x_0$.



1.4.2 limite en une valeur

- **Limite finie en une valeur.** C'est le cas où $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, avec l est un réel.

Exemple : Soit $f(x) = x + 1$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$.

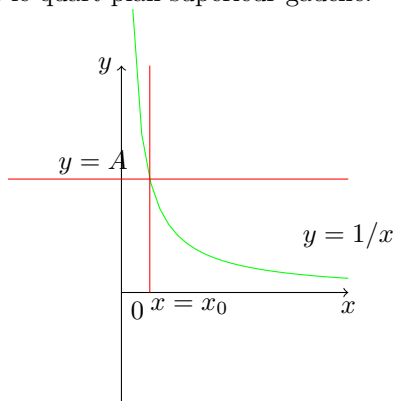
- **Limite infinie en une valeur.**

Interprétation graphique de $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = +\infty$: pour tout réel $A > 0$ on trace la droite horizontale $y = A$, tous les points du graphe de f sont situés au dessus de la droite $y = A$ pourvu que leur abscisse soit assez proche de 0.

A l'aide des quantificateurs cette phrase devient

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0, \forall x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \geq A.$$

Par exemple $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. En effet pour tout réel $A > 0$, il existe un réel x_0 tel que le graphe de f est situé dans le quart plan supérieur gauche.



1.4.3 Opérations algébriques sur les limites

La connaissance des limites des fonctions *usuelles* permettra avec les opérations sur les limites de déterminer les limites des fonctions plus élaborées.

Théorème 1.4.1 Soient f et g deux fonctions sous la condition préalable pour $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et admettant des limites respectives ℓ et ℓ' (dans $\overline{\mathbb{R}}$) dans les mêmes conditions (en a , à droite en a ou à gauche en a). Alors les fonctions : $f + g$, λf , fg et $1/f$ ont dans les cas précisés ci-après une limite dont la valeur est indiquée dans le tableau correspondant :

- Pour $f + g$ on a le tableau

$f + g$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$?$
$-\infty$	$-\infty$	$?$	$-\infty$

- Pour λf on a le tableau

λf	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda = 0$	0	0	0
$\lambda > 0$	$\lambda \ell$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda < 0$	$\lambda \ell$	$-\infty$	$+\infty$

— Pour fg on a le tableau

fg	0	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$+\infty$	$-\infty$
0	0	0	0	?	?
$\ell' < 0$	0	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell' > 0$	0	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

— Pour $1/f$ on a le tableau

f	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$1/f$	$1/\ell$	?	0	0

Tous les problèmes ne sont pas réglés. En effet, les cases marquées d'un point d'interrogation correspondent à des *formes indéterminées*, qui nécessitent une étude spécifique dans chaque cas. Rappelons ce résultat très utile.

Proposition 1.4.2 *Toute fonction polynôme admet en $\pm\infty$ la même limite que son terme de plus haut degré. Toute fraction rationnelle admet en $\pm\infty$ la même limite que le quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.*

1.5 Composition des limites

Théorème 1.5.1 *Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ et soient $(a, \ell, k) \in \overline{\mathbb{R}}^3$. On suppose que :*

- (i) *la fonction $g \circ f$ satisfait la condition préalable en a ,*
 - (ii) *la fonction f admet ℓ comme limite en a ,*
 - (iii) *la fonction g admet k comme limite en ℓ ,*
- alors la fonction $g \circ f$ admet k comme limite en a .*

On réécrit ce théorème sous la forme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow \ell} g(y) = k \quad \implies \quad \lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = k.$$

Ce théorème permet par des changements de variables de se ramener à des limites connues.

Exemple 1.5.2 *Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^4 \exp\{-x^2\}$. On cherche à déterminer (forme indéterminée) si h admet une limite en $+\infty$. On considère f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(u) = u^2 \exp\{-u\}$. On a alors $h = g \circ f$ (ce qui revient à poser $u = x^2$). On sait par le théorème des croissances comparées que*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = 0.$$

En appliquant le théorème de composition, on obtient alors que h admet 0 comme limite en $+\infty$.

Une application particulière de la composition donne la proposition suivante.

Proposition 1.5.3 Si f admet $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ comme limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $|f|$ admet $|\ell|$ comme limite en a (par convention $|\infty| = +\infty$), i.e.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \implies \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |\ell|.$$

1.6 Calcul de dérivées

1.6.1 Définition

Définition 1.6.1 Soit a un réel et soit f une fonction définie sur une partie D qui contient a . On appelle taux d'accroissement de f en a , noté $\theta_a(x)$, la fonction quotient définie par

$$\forall x \in D \setminus \{a\}, \quad \theta_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

La fonction f est dérivable en a si la fonction θ_a a une limite lorsque x tend vers a . On note $f'(a)$ cette limite.

On dit que f est dérivable sur D si f est dérivable en tout point de D et on note f' la fonction dérivée de f .

1.6.2 Equation de tangente

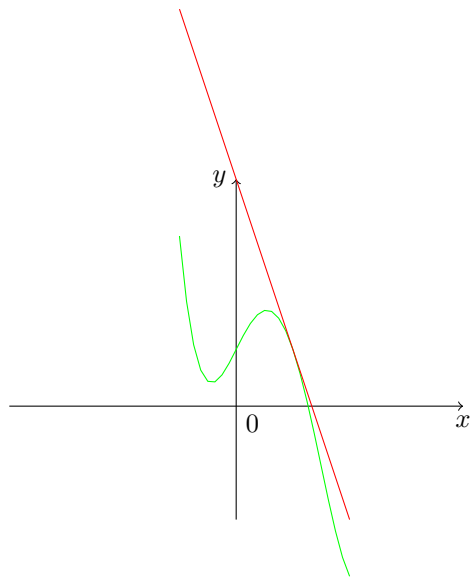
Définition 1.6.2 Soit a un réel et soit f une fonction définie sur une partie D qui contient a . On suppose que la fonction f est dérivable en a , la tangente au graphe de f au point $A = (a, f(a))$ est la droite passant par le point A et de vecteur directeur $(1, f'(a))$. Une équation de la tangente est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente.

On dit que f est dérivable sur D si f est dérivable en tout point de D et on note f' la fonction dérivée de f .

Exemple 1.6.3 Dans la figure ci-dessous, on a tracé le graphe de la fonction $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x + 1$ ainsi que la tangente en $x = 1$ d'équation $y = -3x + 4$.



1.7 Les formules

Fonction f	Dérivée f'	Intervalle
$x^n, n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[.$

Fonction f	Dérivée f'
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'1}{v^2}$
$\ln(u).$	$\frac{u'}{u}$
e^u	$e^u \times u'$
$(u)^\alpha$	$\alpha (u)^{\alpha-1} \times u'$

1.8 Fonctions convexes ou concaves

Définition 1.8.1 convexité

Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ c'est-à-dire une fonction deux fois dérivable sur I et dont la dérivée seconde est continue sur I , On dit que f est convexe sur I si pour tout réel $x \in I$, $f''(x) \geq 0$. De même on dit que f est concave sur I si pour tout réel $x \in I$, $f''(x) \leq 0$.

Proposition 1.8.2 Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$, alors

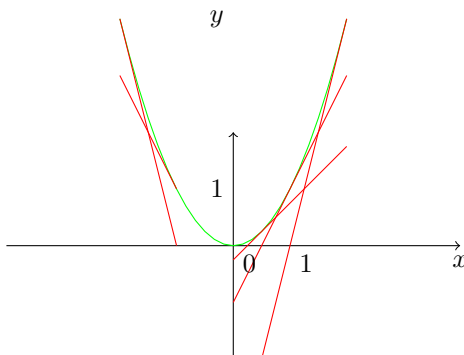
$$\forall c \in I, \forall x \in I, f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c).$$

Cette inégalité exprime que le graphe de f est au-dessus de toutes ses tangentes lorsque f est convexe.

De même soit f une fonction concave sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$, alors

$$\forall c \in I, \forall x \in I, f(x) \leq f(c) + f'(c)(x - c).$$

La fonction $f(x) = x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$, on a tracé 4 tangentes au graphe de cette fonction, on peut constater que le graphe est au-dessus de chaque tangente.



Remarque : La représentation graphique d'une fonction convexe sur un intervalle a cette allure : $\cup$, et celle d'une fonction concave a cette allure : $\cap$.

1.9 Méthodologie pour l'étude d'une fonction

L'étude d'une fonction passe par plusieurs étapes qu'il est primordial de bien maîtriser. Ci dessous on donne les étapes pour étudier une fonction f et représenter son graphe :

1. ★ Déterminer **le domaine de définition**.
2. ★ Vérifier si la fonction est paire ou impaire.
3. ★ Étudier la dérivabilité de la fonction f sur son domaine de définition.
4. ★ Si la fonction est dérivable, **calculer sa dérivée f'** .
5. ★ Étudier le signe de la dérivée pour **connaître le sens de variation de la fonction**.
6. ★ Calculer les limites sur le bord du domaine de définition.
7. ★ Représenter **le tableau de variation**.
8. ★ Dessiner le graphe de la fonction en utilisant les étapes précédentes.

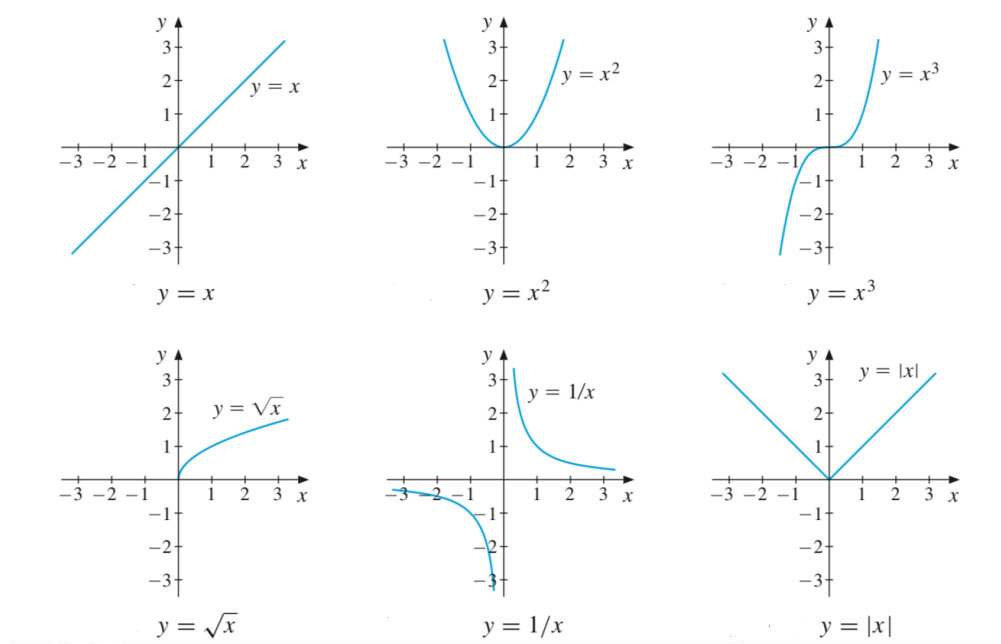


FIGURE 1.1 – Représentation graphique de quelques fonctions usuelles.

Remarque : la fonction valeur absolue $y = |x|$ est donnée par la définition 2.1.8, page 18 .

1.10 Fonctions bijectives

Définition 1.10.1 bijection

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I . On dit que f est bijective de I sur $f(I)$ ou est une bijection de I sur $f(I)$ si pour chaque $y \in f(I)$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x admet une unique solution $x \in I$.

Si f est bijective de I sur $f(I)$, on peut définir la fonction réciproque de f notée f^{-1} définie sur $f(I)$ par : pour chaque $y \in f(I)$, $f^{-1}(y)$ est l'unique solution dans I de l'équation $y = f(x)$.

Proposition 1.10.2 $\ln$ est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$, l'exponentielle est l'application réciproque de $\ln$

$$\forall x > 0, \forall y \in \mathbb{R}, \ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^y.$$

Proposition 1.10.3 Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Lorsque deux fonctions f et g sont réciproques l'une de l'autre, leurs graphiques sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Exemple 1.10.4 On considère la fonction $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + 1$, la droite $y = 1$ coupe le graphe de f en deux points ce qui prouve que f n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Par contre on peut réduire l'intervalle de départ afin d'avoir une fonction bijective. Ainsi f est une bijection de $[1, +\infty[$ à valeurs dans $f([1, +\infty[) = [1, +\infty[$. En effet f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[1, +\infty[$, de plus f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4x^3 - 6x + 2 \text{ et } f''(x) = 12x^2 - 6.$$

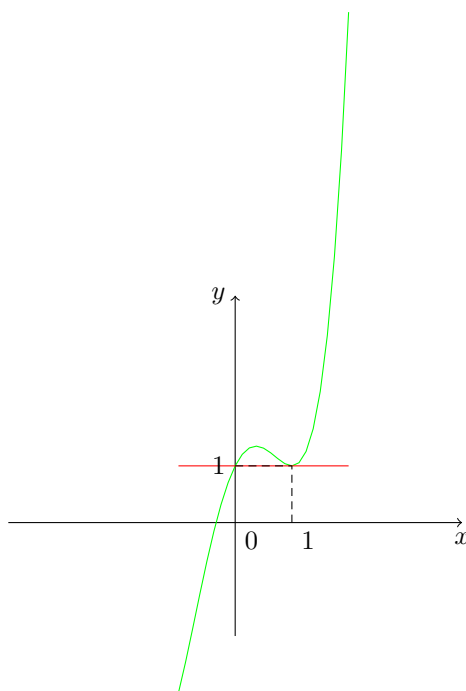
On en déduit que si $x \geq 1$, alors $f''(x)$ est positif, ce qui prouve que la fonction f' est croissante sur $[1, +\infty[$, ainsi

$$\forall x \in [1, +\infty[, f'(x) \geq f'(1) = 0.$$

Comme la dérivée f' est strictement positive et ne s'annule que pour $x = 1$ sur $[1, +\infty[$, on en conclut que f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Par conséquent f est une bijection de $[1, +\infty[$, dans $f([1, +\infty[)$. Par ailleurs $f(1) = 1$ et la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$ donc

$$f([1, +\infty[) = [1, +\infty[.$$

Par conséquent f est une bijection de $[1, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$.



1.11 Exercices

Exercice 1 *Domaine de définition*

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \frac{4x}{x+1}$ et $g(x) = \frac{2x-1}{x}$.

- Déterminer les domaines de définition de f et de g .
- Déterminer les fonctions : $\frac{f}{g}$, $f \circ g$ et $g \circ f$ ainsi que son domaine de définition.

Exercice 2 *Calcul de limites*

Déterminer les limites dans les cas suivants en détaillant le raisonnement :

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x^2+1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{x}}.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 - x, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x^2+1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+5}{\sqrt{x}}.$$

Exercice 3 *Calcul de dérivée*

Calculer la dérivée des fonction suivantes

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \ln(x+1) \text{ sur }]-1, +\infty[, & f_4(x) &= -3x^3 + x^2 - x + 17 \text{ sur } \mathbb{R}, \\ f_2(x) &= \sqrt{x^2+1} \text{ sur } \mathbb{R}, & f_5(x) &= x\sqrt{x+1} \text{ sur }]-1, +\infty[, \\ f_3(x) &= \exp(x^3) \text{ sur } \mathbb{R}, & f_6(x) &= \frac{x-1}{x^2+1} \text{ sur } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

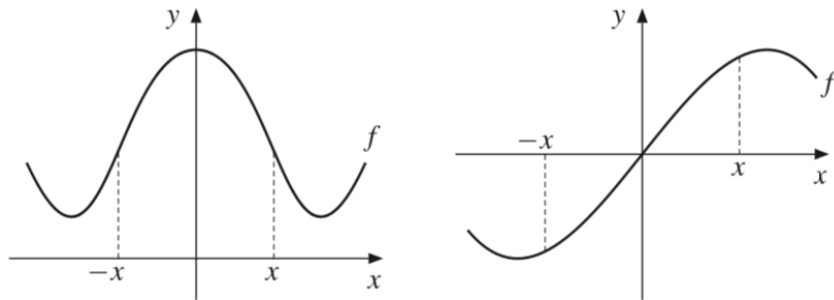
Exercice 4 Fonctions convexes et concaves

Dire si les fonctions suivantes sont convexes ou concaves en le justifiant

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} & g(x) &= \ln(x), \\ h(x) &= e^{x-1} - x \end{aligned}$$

Exercice 5 Fonctions paire et impaire.

Dire si les graphiques suivant correspondent à une fonction paire ou impaire en le justifiant.

**Exercice 6 Fonctions bijectives.**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

1. Montrer en justifiant les inégalités strictes que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 < g(x) < 1.$$

2. Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.
3. Tracer le graphe de g .
4. Déterminer $g^{-1}(y)$ pour $y \in]0, 1[$.

Exercice 7 Soit $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{x^2}$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution $x_0 \in]0, +\infty[$. Encadrer, par tâtonnements, x_0 par deux entiers naturels consécutifs.

Exercice 8 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

1. Montrer en justifiant les inégalités strictes que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 < g(x) < 1.$$

2. Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.
3. Tracer le graphe de g .
4. Déterminer $g^{-1}(y)$ pour $y \in]0, 1[$.

Exercice 9 Une partie de l'examen d'octobre 2011

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x + \frac{3 + 2 \ln(x)}{x},$$

et la fonction g

$$\forall x > 0, \quad g(x) = x^2 - 2 \ln(x) - 1.$$

1. (a) Calculer la dérivée de g .
(b) Donner le tableau de variations de g .
(c) Quel est le signe de la fonction g ?
2. (a) Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
(b) Déterminer la limite de f quand x tend vers 0^+ .
(c) Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
(d) Calculer la dérivée de f .
(e) Donner le tableau de variations de f .
(f) Sur quel intervalle la fonction f est-elle convexe, concave ?
(g) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée a . Montrer que $a \in]0, 1[$.
(h) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $x = 1$.
(i) Tracer le graphe de f .

Chapitre 2

Les Fonctions usuelles

2.1 Fonction affine

2.1.1 Définition et Propriétés

Définition 2.1.1 Fonction affine Une fonction affine f est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b \text{ où } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

La courbe représentative de f est une droite du plan d'équation

$$y = ax + b.$$

Toute fonction affine est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = a.$$

Le réel a s'appelle le coefficient directeur de la droite.

Proposition 2.1.2 Calcul du coefficient directeur

Soit $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points distincts d'une droite $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$. On suppose que $x_A \neq x_B$, le coefficient directeur, noté a , de la droite $\mathcal{D}$ est

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Définition 2.1.3 Equation cartésienne d'une droite

$\mathcal{D}$ est une droite de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si il existe trois réels α , β et γ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tels que

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \alpha x + \beta y + \gamma = 0\}.$$

" $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ " est appelée équation cartésienne de $\mathcal{D}$. Le vecteur $(-\beta, \alpha)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Exemple 2.1.4 Soit deux points $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on cherche l'équation cartésienne de la droite (AB) . On est amené à résoudre le système à deux équations et trois inconnues notées α , β et γ :

$$\begin{cases} 2\alpha + 7\beta + \gamma &= 0, \\ -\alpha + \beta + \gamma &= 0, \end{cases}$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} 2\alpha + 7\beta + \gamma &= 0, \\ 9\beta + 3\gamma &= 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha &= 2/3\gamma, \\ \beta &= -1/3\gamma, \end{cases}$$

On a donc une infinité de solutions, il suffit de déterminer une solution, par exemple pour $\gamma = 3$, on a $\alpha = 2$ et $\beta = -1$. Ainsi une équation de la droite (AB) est

$$2x - y + 3 = 0.$$

que l'on peut écrire $y = 2x + 3$.

La droite (AB) est le graphe de la fonction $f(x) = 2x + 3$. Le coefficient directeur de cette droite est 2.

Exemple 2.1.5 Soit le point $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, on cherche l'équation cartésienne de la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$. On a $-\beta = 2$ et $\alpha = 1$, il reste à déterminer γ qui est solution de

$$1 + 2 + \gamma = 0 \text{ d'où } \gamma = -3.$$

Par conséquent une équation de la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ est

$$x - 2y = 3.$$

Exemple 2.1.6 On considère la droite d'équation cartésienne $2x + 3y - 1 = 0$. Les points $A = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ vérifient l'équation donc sont sur la droite qui est donc aussi la droite (AB) .

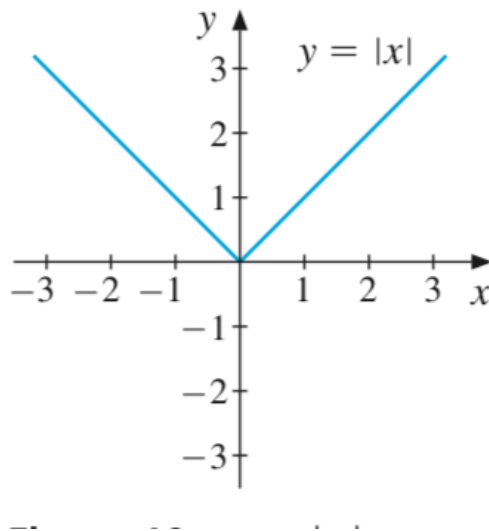
De même un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ mais aussi $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$. On remarque que $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$.

Remarque 2.1.7 L'équation cartésienne n'est pas unique. Les équations : $x + 2y + 3 = 0$ et $4x + 8y + 12 = 0$ définissent la même droite.

Définition 2.1.8 Valeur absolue

Pour x un nombre réel, on note la valeur absolue de x $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Nous remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = |-x|$.

**Définition 2.1.9 Propriétés de la valeur absolue**

Pour tout x, y réels et $a > 0$,

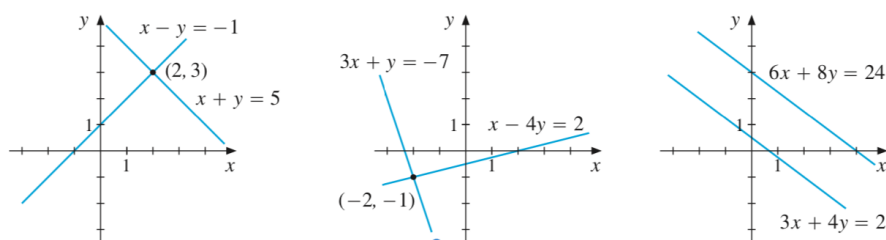
$$\begin{cases} |x| = 0 & \Longleftrightarrow & x = 0, \text{ le seul réel vérifiant } |x| = 0 \text{ est } 0. \\ |xy| & = & |x||y|. \\ |x| \leq a & \Longleftrightarrow & -a \leq x \leq a. \end{cases}$$

2.1.2 Résolution d'un système d'équations

On considère les trois systèmes suivants :

$$(a) \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 3x + y = -7 \\ x - 4y = 2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 6x + 8y = 24 \end{cases}$$

Ci dessous trois représentations graphiques correspondants à ces trois systèmes.



Exercice : Résoudre chacun des systèmes et vérifier avec le graphe votre résultat.

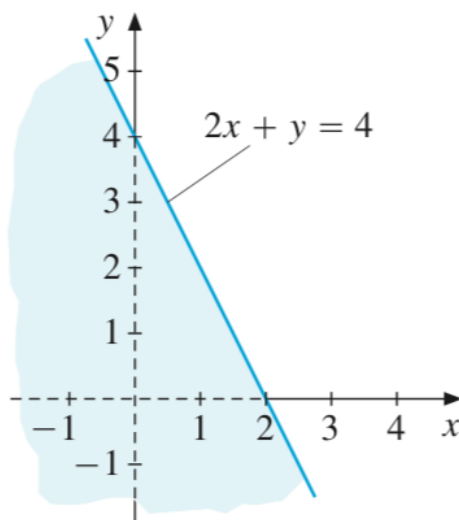
2.1.3 Inégalité linéaire

Représenter l'ensemble des réels (x, y) vérifiant l'inégalité

$$2x + y \leq 4.$$

Solution : L'inégalité peut être écrite $y \leq -2x + 4$.

On représente d'abord Δ , la droite d'équation $y = -2x + 4$. Alors, l'ensemble des points (x, y) vérifiant $y \leq -2x + 4$ doit avoir des valeurs de y en dessous de la droite Δ , voir la figure ci dessous



2.1.4 Exercices

Exercice 1 On se place dans un plan muni d'un repère orthonormée.

1. On considère la droite D_1 passant par les points $A = (2, -3)$ et $B = (4, -5)$.
 - (a) Représenter graphiquement cette droite.
 - (b) Quel est le coefficient directeur de cette droite ?
 - (c) Déterminer une équation cartésienne de la droite D_1 .
 - (d) Est-ce-que le point $O = (0, 0)$ est sur la droite D_1 ?
2. On considère la droite D_2 passant par les points $C = (1, 1)$ et $D = (3, 3)$.
 - (a) Représenter graphiquement cette droite.
 - (b) Quel est le coefficient directeur de cette droite ?
 - (c) Déterminer une équation cartésienne de la droite D_2 .
3. Déterminer l'intersection de D_1 et de D_2 .
4. On considère la droite D_3 passant par le point $E = (-1, 3)$ et de vecteur directeur $u = (-3, 2)$.
 - (a) Représenter graphiquement cette droite.
 - (b) Déterminer une équation cartésienne de la droite D_3 .
 - (c) Est-ce-que le point $O = (0, 0)$ est sur la droite D_3 ?

Exercice 2 On considère la droite

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x + 3y = 6\}.$$

1. Déterminer deux points distincts de D .
2. Représenter graphiquement cette droite.
3. Déterminer un vecteur directeur de D que l'on notera u .
4. Est-ce-que le point $A = (1, 1)$ est sur la droite D ?
5. Quelle est l'équation cartésienne de la droite Δ qui passe par le point A de vecteur directeur u .
6. Représenter la droite Δ sur le même graphique.

Exercice 3 On considère le système :

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x - y = 2 \end{cases}$$

1. Tracer dans un repère orthonormée les droites d'équations $2x + y = 1$ et $x - y = 2$, puis déterminer sur le graphe le point d'intersection de ces deux droites. En déduire une solution du système.
2. Résoudre le système et vérifier le résultat de la question précédente.

Exercice 4 Représentez dans le plan l'ensemble de tous les points dont les coordonnées (x, y) satisfont aux trois inéquations

$$3x + y \leq 12, \quad x - y \leq 1, \quad 3x + y \geq 3.$$

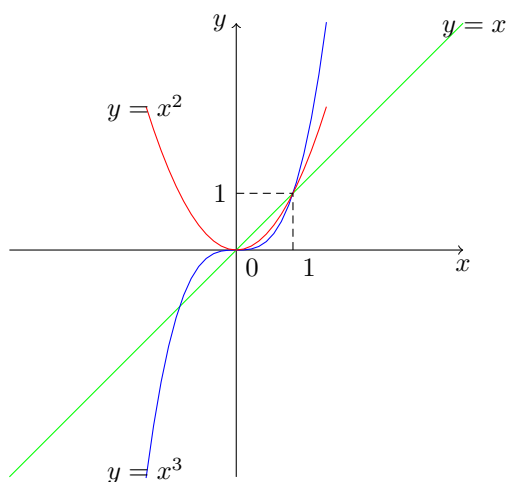
2.2 Les fonctions polynômes et les fractions rationnelles

2.2.1 Définition et Propriétés

Définition 2.2.1 La fonction puissance entière Pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction puissance f_n est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n.$$

Pour $n = 0$, f_0 est la fonction constante égale à 1.



Proposition 2.2.2 Dérivée Pour tout entier n , la fonction puissance est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, (x^n)' = nx^{n-1}$$

Exemple 2.2.3 $(x^2)' = 2x$ et $(x^3)' = 3x^2$

Définition 2.2.4 Polynômes et Fraction rationnelle Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction P est un polynôme si l'on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$$

où $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Si $a_n \neq 0$, on dit que le degré de P est n .
Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes.

Exemple 2.2.5 Voici un exemple de polynôme P

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 4 + 3x + 8x^3 \text{ et } P'(x) = 3 + 24x^2$$

et un exemple de fraction rationnelle

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, F(x) = \frac{2x+1}{x-1} \text{ et } F'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

Définition 2.2.6 Factorisation d'un polynôme de degré 2 On considère un polynôme P de degré 2, il existe trois réels $a \neq 0$, b et c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = ax^2 + bx + c.$$

On pose

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

— Si $\Delta > 0$, alors P a deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

et on peut écrire P sous forme factorisée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

— Si $\Delta = 0$, alors P a une racine réelle

$$x_1 = \frac{-b}{2a},$$

et on peut écrire P sous forme factorisée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a(x - x_1)^2.$$

— Si $\Delta < 0$, alors P n'a pas de racines réelles.

Proposition 2.2.7 Factorisation Soit P un polynôme. Si a est une racine de P , c'est-à-dire $P(a) = 0$, alors il existe un polynôme Q tel que

$$P = (x - a)Q.$$

Exemple 2.2.8 Soit le polynôme P défini par

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3.$$

On remarque que 1 est une racine de P puisque $P(1) = 1 + 3 - 1 - 3 = 0$, il existe donc un polynôme Q tel que

$$P = (x - 1)Q.$$

Pour déterminer le polynôme Q , on commence par remarquer que Q est de degré 2 donc

$$Q(x) = ax^2 + bx + c,$$

puis on développe

$$\begin{aligned} (x - 1)Q(x) &= (x - 1)(ax^2 + bx + c), \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c, \\ &= ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c. \end{aligned}$$

L'égalité $P = (x - 1)Q$ devient

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c.$$

Par identification, on a le système

$$\begin{cases} a &= 1, \\ -a + b &= 3, \\ -b + c &= -1, \\ -c &= -3. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} a &= 1, \\ b &= 4, \\ c &= 3, \\ c &= 3. \end{cases}$$

Par conséquent on a

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x - 1)(x^2 + 4x + 3).$$

De plus l'étude de $x^2 + 4x + 3$ montre que -1 et -3 sont racines, par conséquent, on a

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x - 1)(x + 1)(x + 3).$$

2.2.2 Exercices

Exercice 1 Factorisez les polynômes suivants

$$P(x) = x^2 - 2x + 1, \quad Q(x) = x^2 + 4x + 3, \quad R(x) = 2x^3 + 4x^2 - x, \quad T(x) = 4x^3 + 2x^2 - 6.$$

Pour le polynôme T , calculez $T(1)$.

Exercice 2 Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, préciser le domaine de définition et simplifier l'écriture

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}, \quad f_2(x) = \frac{x-x^2}{x}, \quad f_3(x) = \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}.$$

$$f_4(x) = \frac{x^2+3x-4}{2x^2+5x-7}.$$

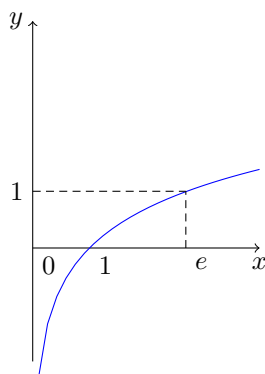
2.3 La fonction logarithme

2.3.1 Définition et Propriétés

Définition 2.3.1 La fonction logarithme népérien notée $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x > 0, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

La fonction $\ln$ est la primitive de $\frac{1}{t}$ qui s'annule en 1 donc $\ln$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.



Proposition 2.3.2 *On a les propriétés suivantes :*

1.

$$\forall x > 0, \quad (\ln)'(x) = \frac{1}{x}, \quad (\ln)''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

2.

$$\ln(1) = 0 \text{ et } \ln(e) = 1$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

4.

$$\forall x > 0, \quad \forall y > 0, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x), \quad \ln\left(\frac{y}{x}\right) = \ln(y) - \ln(x)$$

$$\forall x > 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x).$$

2.3.2 Exercices

Exercice 1 1. Ecrire en fonction de $\ln 2$ les nombres

$$A = \ln\left(\frac{e^2}{8}\right), \quad B = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{4}\right).$$

2. Comparer les nombres

$$A = \ln 4 + \ln 3, \quad B = \ln 7.$$

Exercice 2 Calculer en fonction de $\ln(3)$

$$A = 3 \ln(e^2/9) + \ln(27) - \ln(1/3).$$

Exercice 3 1. Montrer que la fonction f donnée par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $f(0)$.

3. Montrer que $f(1) + f(-1) = 0$ puis que pour tout réel x , $f(x) + f(-x) = 0$.

Exercice 4 On pose pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) = 3 \ln(x^4) - 4 \ln(x^3).$$

1. Calculer $f(1)$ et $f(e)$.

2. Montrer que

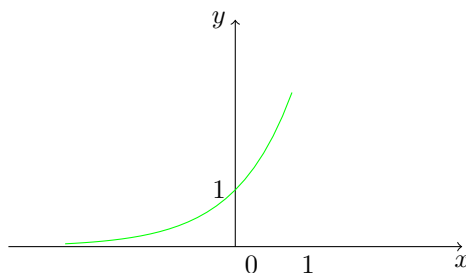
$$\forall x > 0, \quad f(x) = 0.$$

2.4 La fonction exponentielle

2.4.1 Définition et Propriétés

Définition 2.4.1 *La fonction exponentielle est la fonction réciproque du logarithme népérien*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y > 0, \quad y = \exp(x) = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y).$$



Proposition 2.4.2 On a les propriétés suivantes :

1.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\exp)'(x) = e^x, \quad (\exp)''(x) = e^x.$$

2.

$$e^0 = 1, \quad e^1 = e$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

4.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad (e^x)^y = e^{xy}.$$

2.4.2 Exercices

Exercice 1 Comparer les réels A et B

$$A = (e^3)^2 \text{ et } B = e^3 \times e^2.$$

puis les réels C et D

$$C = \frac{e^{-2}}{e^4} \text{ et } D = ((e^2)^6 \times e)^{-1}.$$

Exercice 2 Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, préciser le domaine de définition

$$f_1(x) = \frac{1}{e^x - e^{-x}}, \quad f_2(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Exercice 3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (e^x + e^{-x})^2 - e^x(e^x + e^{-3x}).$$

Prouver que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2.$$

Exercice 4 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $e^{3x+4} = 1/e$,
2. $e^{2x} - 1 = 0$,
3. $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$.

Exercice 5 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

1. $e^{2x+1} < e$,
2. $3e^x + 1 > 0$,
3. $2e^{4x-2} - 4 < 0$.

Exercice 6 On considère la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{6e^x}{e^x + 1}.$$

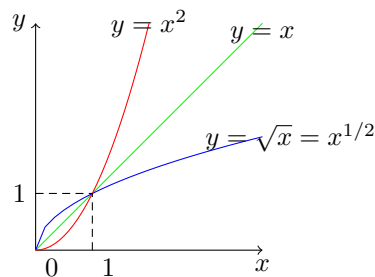
1. Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$ en fonction de e .
2. Montrer que pour tout réel x , $f(x) + f(-x)$ est une constante.

2.5 La fonction puissance

2.5.1 Définition et Propriétés

Définition 2.5.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction puissance α est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$\forall x > 0, \quad x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$



Proposition 2.5.2 On a les propriétés suivantes

1. La fonction puissance est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

$$\forall x > 0, \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad (x^\alpha)'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$

- 2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

Proposition 2.5.3 Croissances comparées Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\beta \in \mathbb{R}^{+*}$, on a

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty,$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$$

On en déduit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^{\beta x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} |\ln(x)|^\alpha x^\beta = 0$$

Exemple 2.5.4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = +\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{3/2}} = 0.$$

2.5.2 Exercices

Exercice 1 On considère les deux fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 9} + 2x, \quad g(x) = \sqrt{4x^2 + 9} - 2x.$$

1. Déterminer la limite de f lorsque $x \rightarrow +\infty$.
2. Montrer que la fonction g peut s'écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{9}{\sqrt{4x^2 + 9} + 2x}.$$

3. En déduire la limite de g lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 2 On considère la fonction

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x^x = e^{x \ln x}.$$

1. Calculer $f(1), f(2), f(3)$.
2. Déterminer la limite de f en 0, puis en $+\infty$.

Exercice 3 On considère la fonction

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x^{1/x}.$$

1. Calculer $f(1), f(2)$.
2. Ecrire la fonction f sous forme exponentielle.
3. Déterminer la limite de f en 0, puis en $+\infty$.

Exercice 4 On considère la fonction

$$\forall x > 1, \quad f(x) = 4x^3 + \sqrt{\ln(x)} - e^{4x}.$$

1. Calculer $f(1), f(2)$.
2. Ecrire f en mettant en facteur e^{4x} .

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 5 On considère la fonction définie sur un domaine D

$$\forall x \in D, \quad f(x) = \frac{\ln(1 + e^x)}{x}.$$

1. Prouver que pour tout réel x , $e^x + 1$ est strictement positif.
2. En déduire le domaine de définition D de f .
3. Déterminer la limite de f en 0.
4. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
5. En mettant en facteur e^x dans le logarithme, montrer que

$$\forall x \in D, \quad f(x) = 1 + \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x}.$$

6. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Chapitre 3

Calcul de dérivées

3.1 Définition et calcul de dérivées

3.1.1 Définition

Définition 3.1.1 Soit a un réel et soit f une fonction définie sur une partie D qui contient a . On appelle taux d'accroissement de f en a , noté $\theta_a(x)$, la fonction quotient définie par

$$\forall x \in D \setminus \{a\}, \quad \theta_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

La fonction f est dérivable en a si la fonction θ_a a une limite lorsque x tend vers a . On note $f'(a)$ cette limite.

On dit que f est dérivable sur D si f est dérivable en tout point de D et on note f' la fonction dérivée de f .

Exemple 3.1.2 On considère la fonction $f(x) = x^2$ et soit a un réel, alors pour tout réel $x \neq a$, on a

$$\theta_a(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a.$$

La limite de $\theta_a(x)$ est $2a$ quand x tend vers a donc f est dérivable en a et on retrouve la formule que nous connaissons

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad f'(a) = 2a.$$

3.1.2 Les formules

Fonction f	Dérivée f'	Intervalle
$x^n, n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[.$

Fonction f	Dérivée f'
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'1}{v^2}$
$\ln(u).$	$\frac{u'}{u}$
e^u	$e^u \times u'$
$(u)^\alpha$	$\alpha (u)^{\alpha-1} \times u'$
$\sqrt{u} = (u)^{1/2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

3.2 Approximation affine

3.2.1 Le développement limité à l'ordre 1

On considère une fonction d'une variable définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en $x = a$ où a est un réel de I . Cela signifie que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Cette égalité peut encore s'écrire

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + \epsilon(x - a) \text{ où } \lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x - a) = 0.$$

En multipliant par $x - a$ on obtient

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\epsilon(x - a).$$

ce qui est l'expression du développement limité de f en a .

1. Pour x au voisinage de a :

$$f(x) = \underbrace{f(a) + (x - a)f'(a)}_{\text{fonction polynomiale de degré 1}} + (x - a) \underbrace{\epsilon(x - a)}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} 0}$$

2. Pour $h = x - a$ proche de 0 :

$$f(a + h) = \underbrace{f(a) + hf'(a)}_{\text{fonction polynomiale de degré 1}} + h \underbrace{\epsilon(h)}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0}$$

Exemple 3.2.1 Écrire le développement limité à l'ordre 1 de $f : x \mapsto e^x$ en 1.

On a

$$f(1) = e^1 = e, \text{ et puisque } f'(x) = e^x \text{ donc } f'(1) = e^1 = e.$$

Pour tout réel x , on a :

$$f(x) = f(1) + (x - 1)f'(1) + (x - 1) \underbrace{\epsilon(x - 1)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 1} 0}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = e + (x - 1)e + (x - 1) \underbrace{\epsilon(x - 1)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 1} 0}$$

Cette égalité est vraie pour tout réel x mais son intérêt est lorsque x est proche de 1.

Exemple 3.2.2 Écrire le développement limité à l'ordre 1 de $f : x \mapsto \ln(x)$ en 3.

On a

$$f(3) = \ln(3) \text{ et puisque } f'(x) = \frac{1}{x} \text{ donc } f'(3) = \frac{1}{3}.$$

Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$f(x) = f(3) + (x-3)f'(3) + (x-3)\underbrace{\varepsilon(x-3)}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ x \rightarrow 3}}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x) = \ln(3) + (x-3)\frac{1}{3} + (x-3)\underbrace{\varepsilon(x-3)}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ x \rightarrow 3}}$$

3.2.2 Approximation affine et calcul approché

On considère une fonction d'une variable définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en $x = a$ où a est un réel de I . Le DL_1 de f en a s'écrit (pour h proche de 0) :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\underbrace{\varepsilon(h)}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}}$$

Donc **l'approximation affine de f en a** s'écrit :

$$\text{Pour } h \text{ proche de } 0 : \quad f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$$

Remarque Pour de petites valeurs de h , on peut utiliser cette approximation affine pour faire des calculs approchés sans calculatrice.

Exemple 3.2.3 Déterminer une valeur approchée de 1.02^7 sans utiliser la calculatrice.

$f : x \mapsto x^7$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, et $f' : x \mapsto 7x^6$. On a donc $f(1) = 1^7 = 1$, et $f'(1) = 7 \times 1^6 = 7$. Donc si h est proche de 0, on a :

$$f(1+h) \simeq f(1) + hf'(1) \quad \text{c'est-à-dire que} \quad f(1+h) \simeq 1 + 7h$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 1.02^7 &= f(1.02) \\ &= f(1 + 0.02) \\ &\simeq 1 + 7 \times 0.02 \\ &\simeq 1 + 0.14 \\ &\simeq \boxed{1.14} \end{aligned}$$

On peut vérifier à la calculatrice que $1.02^7 \simeq 1.149$.

Lien avec la tangente

Le DL_1 de f en a s'écrit, pour x proche de a :

$$f(x) = \underbrace{f(a) + (x-a)f'(a)}_{\substack{\text{fonction affine (=de degré 1) \\ \text{la plus proche de } f \text{ au voisinage de } a}} + (x-a)\underbrace{\varepsilon(x-a)}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ x \rightarrow a}}$$

Cette fonction affine a pour courbe la droite d'équation $y = f(a) + (x-a)f'(a)$. Il s'agit de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a .

3.2.3 Variation relative et élasticité

Définition 3.2.4 *Variation absolue*

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0 , la variation absolue de f , lorsque x passe de x_0 à $x_0 + h$ est

$$\Delta f_{x_0}(h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

Une approximation de Δf_{x_0} est $\Delta f_{x_0}(h) \approx f'(x_0)h$.

Notations utilisées par les économistes pour la variation absolue

Les économistes notent l'accroissement $(x_0 + h) - x_0 = h = \Delta x$ ainsi la variation $\Delta f(\Delta x)$ de f pour un accroissement Δx de x est égale à

$$\Delta f_{x_0} = \Delta f_{x_0}(\Delta x) = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

Remarques :

- La variation absolue de x est Δx .
- Lorsque Δx est suffisamment petit pour que l'erreur soit négligeable. Les économistes écrivent dx au lieu de Δx et df au lieu de Δf . Ils écrivent alors

$$df \simeq f'(x)dx$$

- Les économistes utilisent la formule $df \simeq f'(x)dx$ en considérant que df et dx représentent des petits accroissements, c'est-à-dire des nombres et non des fonctions.

Définition 3.2.5 *Fonction marginale*

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I . La fonction marginale, notée f_m , est définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad f_m(x) = f'(x)$$

Remarque :

Les fonctions marginales sont des exemples de fonctions économiques pouvant prendre des valeurs négatives. Elle mesure la sensibilité de la fonction f aux variations de x . En effet, en appliquant le développement limité d'ordre 1 de f en $x_0 = a$ pour $\Delta x = h = 1$, on a

$$\Delta f_a(1) = f(a + 1) - f(a) \approx f'(a) = f_m(a)$$

Autrement dit, $f_m(a)$ est une valeur approchée de la variation absolue de f lorsque la variable x augmente d'une unité à partir de $x_0 = a$ (c'est-à-dire passe de a à $a + 1$).

La fonction marginale et la variation absolue dépendent des unités choisies. Pour éviter cet inconvénient, on introduit la notion de variation relative.

Définition 3.2.6 *Variation relative*

Lorsque x passe de x_0 à $x_0 + \Delta x$ et/ou y passe de y_0 à $y_0 + \Delta y$ on appelle variation relative respectivement de x et de y les quantités suivantes :

$$VR_x(x_0) = \frac{\Delta x}{x_0} \text{ et } VR_y(y_0) = \frac{\Delta y}{y_0}$$

Remarques :

- Contrairement à la variation absolue (Δx) exprimée en unités, la variation relative est exprimée en %. Ainsi si x augmente (ou diminue) de $t\%$ à partir de $x = x_0$ alors on en déduit que $\frac{\Delta x}{x_0} = t\%$ (ou $= -t\%$).
- Si x reste fixe, $\Delta x = \frac{\Delta x}{x_0} = 0$

Définition 3.2.7 *Variation relative*

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $I \subset]0, +\infty[$ et strictement positive sur I . Lorsque x varie de x_0 à $x_0 + \Delta x$ et si $f(x_0) \neq 0$, la variation relative de f est

$$VR_f(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)} = \frac{\Delta f_{x_0}(\Delta x)}{f(x_0)}$$

Soit f une fonction économique $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$ avec $\mathcal{I}$ un ouvert de $]0, +\infty[$ et strictement positive. Lorsque x varie de x_0 à $x_0 + \Delta x$ et si $f(x_0) \neq 0$, la variation relative de f est

$$VR_f(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)} = \frac{\Delta f_{x_0}(\Delta x)}{f(x_0)}$$

Remarques :

- La variation relative est le quotient de la variation absolue avec la valeur initiale.
- Contrairement à la variation absolue (Δf) exprimée en unités, la variation relative est exprimée en %. Ainsi si f augmente (ou diminue) de $t\%$ à partir de $x = x_0$ alors on en déduit que $VR_f(x_0) = t\% = \frac{t}{100}$ (ou $= -t\% = -\frac{t}{100}$) et que $f(x_0 + \Delta x) = t\% \times f(x_0)$ (ou $= -t\% \times f(x_0)$).
- Si f reste fixe, $VR_f(x_0) = 0$.

L'élasticité de f est le rapport de la variation relative de f sur la variation relative de x , d'où la définition

Définition 3.2.8 *Élasticité*

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $]0, +\infty[$ et strictement positive sur I , on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$. On appelle élasticité de f la fonction définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad e_f(x) = \frac{\Delta f / f(x)}{\Delta(x) / x} = f'(x) \frac{x}{f(x)} = x \times (\ln \circ f)'(x)$$

Remarque :

La valeur de l'élasticité dépend du point considéré mais ne dépend pas des unités choisies.

Exemple 3.2.9 Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{2}{x} e^{-x^2}.$$

On a $f'(x) = -\frac{2}{x^2} e^{-x^2} (1 + 2x^2)$ L'élasticité de $f(x)$ vaut par définition $\forall x > 0$

$$e_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} x = -(1 + 2x^2)$$

- Une valeur approchée de la variation relative de f lorsque x augmente de 5% à partir de $x = 1$ (c'est-à-dire que $\frac{\Delta x}{x} = 0.05$) est.

$$VR_f(x) \approx e_f(x) \cdot \frac{\Delta x}{x} = 0.05 \times e_f(x) \leftrightarrow VR_f(1) \approx 0.05 \times e_f(1) = 0.05 \times (-3) = -0.15$$

Donc f diminue de 15% lorsque x augmente de 5%.

- En partant de $x = 1$, calculons de combien faut-il faire varier x pour que f augmente de 1% (On demande un calcul approché). On sait que f augmente de 1% donc que $VR_f(x) = 0.01$ et on cherche $\frac{\Delta x}{x}$ en partant de $x = 1$. On a

$$VR_f(x) \approx e_f(1) \cdot \frac{\Delta x}{x} \Leftrightarrow 0.01 \approx -3 \times \frac{\Delta x}{x} \Leftrightarrow \frac{\Delta x}{x} \approx -\frac{0.01}{3}$$

Donc en partant de $x = 1$, il faut donc diminuer x de $\frac{1}{3}\% \approx 0.33\%$ pour augmenter f de 1%.

3.3 Exercices

Exercice 1 Après avoir précisé l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes, déterminer la fonction dérivée :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x^2 - 4x + 1, & f_2(x) &= -x^3 + 2x^2 + \frac{1}{x}, & f_3(x) &= \sqrt{x+3}, \\ f_4(x) &= 3 - \frac{7}{x+1}, & f_5(x) &= (2x+3)^{10}, & f_6(x) &= \frac{1}{(2x+3)^{10}}, \\ f_7(x) &= (-4x^2+3)^3, & f_8(x) &= x\sqrt{4-x^2}, & f_9(x) &= \frac{x-1}{x+1}, \\ f_{10}(x) &= \frac{-3x^2+7x-1}{x-4}, & f_{11}(x) &= 8\sqrt{\frac{1}{x}}, & f_{12}(x) &= (x^2+x+1)^7. \end{aligned}$$

Exercice 2 En considérant le taux d'accroissement en 0, montrer que la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 3 En utilisant la notion de taux d'accroissement, déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}, \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}, \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Exercice 4 On considère les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = x^x \text{ et } g(x) = x - 1 + \ln(x).$$

1. Calculer les dérivées f' et g' .

2. Écrire les DL à l'ordre 1 pour les fonctions f et g au voisinage de 1 .
3. On considère la fonction φ définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ par

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - 1}{g(x)} = \frac{x^x - 1}{x - 1 + \ln(x)}$$

Montrer que $\varphi(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1 .

Exercice 5 Le coût total de production d'un bien A est donné en fonction de la quantité produite q :

$$\forall q > 0, \quad C(q) = q^3 - 5q^2 + 10q$$

1. Montrer que C est croissante sur $]0, +\infty[$ et strictement positive.
2. Déterminer la fonction de coût marginal C_m .
3. Quel est le coût de production de 10 unités de A ?
4. De combien varierait le coût si l'on produisait un dixième d'unité supplémentaire à partir de $q = 10$? Faire un calcul exact et un calcul approché en utilisant la fonction de coût marginal.
5. On se place toujours au niveau de production $q = 10$. Calculer l'élasticité de C pour $q = 10$ et en déduire une valeur approchée de la variation relative du coût lorsqu'on augmente la production de 2%.

-

Chapitre 4

Calcul d'intégrales

4.1 Définition et Propriétés

Définition 4.1.1 Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I (non vide et non réduit à un point) de $\mathbb{R}$, une primitive de f sur I est une fonction F vérifiant

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Dans le tableau ci-dessous, on donne les primitives à connaître :

Fonction	Intervalle	Primitive
$\alpha \in \mathbb{R}^*, e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c$
$a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}, a^x = e^{x \ln(a)}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\ln(a)} a^x + c$
$\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1, x^\alpha$	dépend de α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$1/x$	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\ln(x) + c$

Définition 4.1.2 Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I (non vide et non réduit à un point) de $\mathbb{R}$ et F une primitive quelconque de f sur I .

Alors, $\forall (a, b) \in I^2$, le nombre réel $F(b) - F(a)$ est indépendant de la primitive F choisie et s'appelle **intégrale définie de f entre les bornes a et b** .

On le note : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ ce qui s'énonce somme de a à b de $f(x)dx$.

Interprétation géométrique de la notion d'intégrale définie

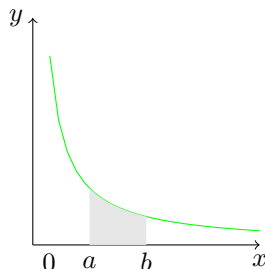
On suppose le plan rapporté à un repère orthogonal (en général orthonormé). On choisit pour unité d'aire : l'aire du rectangle construit sur les vecteurs unités du repère et on construit la courbe représentative de f sur $[a, b]$. (on suppose ici $a < b$).

En particulier, si f est une fonction **constante** sur $[a, b]$ telle que : $\forall x \in [a, b], f(x) = c$ on a $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$. Ce résultat s'interprète comme l'aire d'un rectangle et nous admettrons que ce résultat se généralise comme suit : Si f est une fonction **positive**, continue sur $[a, b]$ avec $a < b$, alors $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ du plan défini par $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Exemple 4.1.3 On considère la fonction $f(x) = 1/x$ définie sur $\mathbb{R}^*$, on a pour $0 < a < b$

$$\int_a^b f(x)dx = [\ln(x)]_a^b = \ln(b) - \ln(a) = \ln(b/a).$$

Cette intégrale est l'aire grisée sur la figure ci-dessous.



Remarque 4.1.4 Dans cette écriture la variable x est muette : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$.

Remarque 4.1.5 La définition donne : $\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

4.2 Propriétés de l'intégrale définie

4.2.1 Relation de Chasles

Théorème 4.2.1 Relation de Chasles. Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Alors

$$\forall (a, b, c) \in I^3, \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

L'ordre des réels a, b, c , est sans importance mais il ne faut pas sortir de l'intervalle I .

Exemple 4.2.2 Calculer $I_1 = \int_{-1}^2 |x| dx$.

4.2.2 Linéarité

Théorème 4.2.3 Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I alors :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall (a, b) \in I^2, \quad \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Exemple 4.2.4 Calculer $I_2 = \int_1^2 \frac{2x^5 - 3x^2 + \sqrt{x}}{x^{3/2}} dx$.

Remarque 4.2.5 Ne pas confondre relation de Chasles et linéarité. Pour la relation de Chasles il y a une seule fonction et on "divise" l'intervalle d'intégration. Pour la linéarité il y a un seul intervalle et on "fractionne" la fonction.

4.2.3 Intégration par parties

Cette méthode part d'une idée toute simple, utiliser la dérivée d'un produit, et donne un résultat très puissant permettant de calculer de nombreuses intégrales.

Théorème 4.2.6 Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I , alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, \int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Ce théorème est intéressant lorsque l'intégrale du second membre est plus facile à calculer que l'intégrale du premier membre.

Exemple 4.2.7 Calculer $I_4 = \int_0^1 xe^x dx$.

On peut aussi utiliser une intégration par parties, dans le cas particulier où il n'y a qu'une seule fonction en posant $v'(x) = 1$.

Exemple 4.2.8 Calculer $I_5 = \int_2^3 \ln(x)dx$.

4.3 Exercices

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^3 x^2 - 3x + 2 \, dx, \quad I_2 = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) x^2 \, dx,$$

$$I_3 = \int_{-1}^2 |x| \, dx, \quad I_4 = \int_1^2 \frac{2x^5 - 3x^2 + \sqrt{x}}{x^{3/2}} \, dx,$$

$$I_5 = \int_0^1 2^{3x} e^x \, dx \text{ et } I_6 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{2}{x^2 - 1} \, dx,$$

pour I_6 , on pourra remarquer que $\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{1+x}$.

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.

$$I_1 = \int_1^2 x^\alpha \ln(x) \, dx, \quad (\alpha \neq -1), \quad I_2 = \int_0^1 x^2 2^x \, dx.$$

Exercice 3 Sachant que la fonction f est C^2 sur $\mathbb{R}$, que $f(1) = 2, f(4) = 7, f'(1) = 5$ et $f'(4) = 3$, calculer l'intégrale $I = \int_1^4 x f''(x) \, dx$.