

Corrigé détaillé du DM1 : Révisions de PTSI

Septembre 2026

1 Partie I – Étude du mouvement d'un satellite

I.1 – Force centrale conservative

Q1. Le **référentiel géocentrique** a pour origine le centre d'inertie O de la Terre et ses trois axes pointent vers trois étoiles très lointaines considérées comme fixes. Il ne participe donc pas à la rotation propre de la Terre (rotation diurne) : c'est ce qui le distingue du référentiel terrestre. Il est en revanche animé, avec le centre de la Terre, du mouvement de révolution autour du Soleil.

Un **référentiel galiléen** est un référentiel dans lequel le principe d'inertie (première loi de Newton) est vérifié : un point matériel isolé ou pseudo-isolé y est soit au repos, soit en translation rectiligne uniforme. C'est dans un tel référentiel que la relation fondamentale de la dynamique s'applique sous sa forme $\sum \vec{F} = m\vec{a}$. Le caractère galiléen du référentiel géocentrique n'est qu'approché, mais il est tout à fait légitime pour l'étude d'un satellite dont la durée caractéristique d'orbite (quelques heures) est très courte devant l'année.

Programme officiel PTSI mobilisé : 2.2 Lois de Newton (première loi de Newton : principe d'inertie ; référentiels galiléens) ; 2.1 Description et paramétrage du mouvement (notion de référentiel, caractère relatif du mouvement).

Q2. La répartition de masse de la Terre est supposée à symétrie sphérique. On en déduit les propriétés du champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}(M)$ par des arguments de symétrie et d'invariance, exactement comme on le fait pour un champ magnétique à partir des sources :

- *Invariances.* La distribution est invariante par toute rotation autour de O . La norme du champ ne peut donc dépendre ni de la latitude ni de la longitude, mais seulement de la distance au centre : $\|\vec{\mathcal{G}}\| = \mathcal{G}(r)$ avec $r = OM$.
- *Direction.* Tout plan contenant la droite (OM) est plan de symétrie de la source. Le champ de gravitation, qui est un vecteur « vrai » (polaire), appartient à l'intersection de ces plans, c'est-à-dire à la droite (OM) elle-même : il est **radial**, $\vec{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(r) \vec{u}$.

Le programme de PTSI fournit directement la force newtonienne de gravitation ; on peut en obtenir l'expression par analogie avec le théorème de Gauss (hors programme, donné ici en complément) appliqué à une sphère de rayon $r > R_T$:

$$\oiint \vec{\mathcal{G}} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}} \implies \mathcal{G}(r) 4\pi r^2 = -4\pi G M_T.$$

On retient le résultat exigible :

$$\boxed{\vec{\mathcal{G}}(M) = -\frac{GM_T}{r^2} \vec{u}} \implies \boxed{\vec{F}_g = m\vec{\mathcal{G}} = -\frac{GM_T m}{r^2} \vec{u}}.$$

Le signe « $-$ » traduit le caractère attractif : la force pointe en permanence vers le centre O , c'est une **force centrale**.

Programme officiel PTSI mobilisé : 2.2 Lois de Newton (force de gravitation) ; 2.3 énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel) ; la justification par symétries/invariances reprend la méthode de 1.7.1 (symétries et invariances des distributions de sources). Le théorème de Gauss gravitationnel est hors programme.

Q3. On applique le théorème du moment cinétique au point matériel, en O fixe, dans le référentiel galiléen ($\mathcal{R}_T$) :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_g) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_g = r \vec{u} \wedge \left(-\frac{GM_T m}{r^2} \vec{u} \right) = \vec{0}.$$

Le moment de la force est nul parce que la force est *colinéaire* à $\overrightarrow{OM}$ (produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires). Le moment cinétique est donc une constante vectorielle du mouvement :

$$\boxed{\vec{L}_O = \text{cste} \vec{e}}.$$

Conséquence géométrique : $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ garde une direction fixe. Or $\overrightarrow{OM}$ est, par construction, toujours orthogonal à $\vec{L}_O$; le point M reste donc dans le plan fixe passant par O et perpendiculaire à $\vec{L}_O$. **La trajectoire est plane.** (C'est ce qui justifie le passage aux coordonnées polaires dans la suite.)

Programme officiel PTSI mobilisé : 2.5 Moment cinétique (moment cinétique d'un point, moment d'une force, théorème du moment cinétique en un point fixe, conservation) ; 2.6 Champ de force centrale conservatif (établir la conservation du moment cinétique et ses conséquences : mouvement plan, loi des aires).

Q4. On cherche $\mathcal{E}_p(r)$ telle que la force dérive de cette énergie potentielle, $\vec{F}_g = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p$. Comme la force est purement radiale et ne dépend que de r , le gradient se réduit à sa composante radiale :

$$-\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \vec{u}_r = -\frac{GM_T m}{r^2} \vec{u}_r \implies \frac{d\mathcal{E}_p}{dr} = \frac{GM_T m}{r^2} \implies \mathcal{E}_p(r) = -\frac{GM_T m}{r} + \text{cste}.$$

La convention $\mathcal{E}_p(r \rightarrow \infty) = 0$ (énergie nulle lorsque le mobile est infiniment éloigné) fixe la constante à zéro :

$$\boxed{\mathcal{E}_p(r) = -\frac{GM_T m}{r}}.$$

L'énergie potentielle est négative et croissante avec r : il faut fournir de l'énergie pour éloigner le mobile, ce qui est cohérent avec le caractère attractif de la force.

Programme officiel PTSI mobilisé : 2.3 Approche énergétique (champ de force conservative et énergie potentielle ; établir l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle ; déterminer une force à partir de l'énergie potentielle, le gradient étant fourni).

Q5. Puisque la seule force qui travaille (la gravitation) est conservative, l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$ se conserve. En coordonnées polaires, le vecteur vitesse s'écrit $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$, d'où $v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$. Par ailleurs la conservation du moment cinétique impose $L_0 = mr^2 \dot{\theta}$, soit $\dot{\theta} = \frac{L_0}{mr^2}$. En remplaçant :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{GM_T m}{r} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L_0^2}{2mr^2} - \frac{GM_T m}{r}}_{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)}.$$

L'astuce décisive est d'avoir « absorbé » la partie orthoradiale de l'énergie cinétique dans une **énergie potentielle effective** :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \frac{L_0^2}{2mr^2} - \frac{GM_T m}{r}}.$$

Le problème à deux degrés de liberté (r, θ) se ramène alors à l'étude d'un mouvement radial « à une dimension » dans le potentiel $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$.

Programme officiel PTSI mobilisé : 2.6 Champ de force centrale conservatif (exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective) ; 2.1 (composantes de la vitesse en coordonnées polaires) ; 2.3 (énergie mécanique).

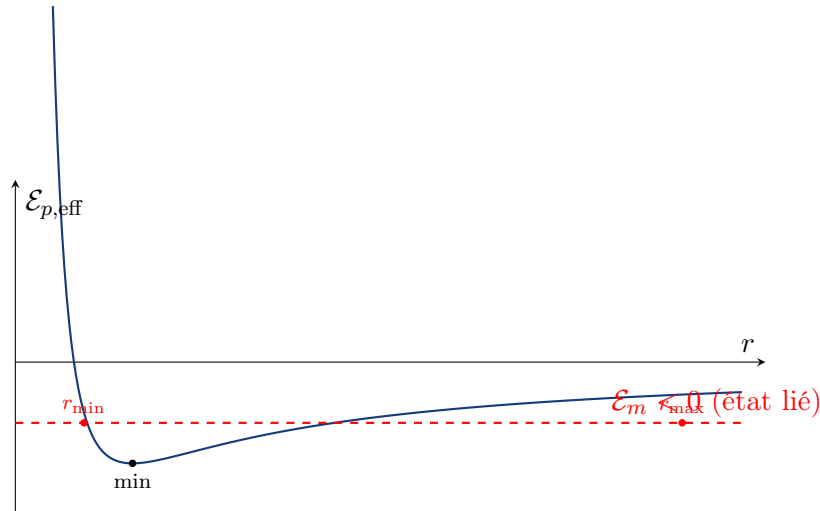
Q6. La relation (1) se réécrit $\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$. Le membre de droite est le carré d'une vitesse multiplié par une masse positive : il est *toujours positif ou nul*. On en déduit

$$\boxed{\mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)}.$$

Cette inégalité est fondamentale : le mouvement radial n'est physiquement possible que dans les domaines de r pour lesquels la courbe $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ passe *sous* la droite horizontale d'ordonnée $\mathcal{E}_m$. Les valeurs de r qui violeraient cette condition sont interdites.

Programme officiel PTSI mobilisé : 2.6 (décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective ; relier le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique) ; 2.3 (mouvement conservatif à une dimension).

Q7. Étude de la fonction $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$. Quand $r \rightarrow 0^+$, le terme centrifuge $\frac{L_0^2}{2mr^2}$ (en $1/r^2$) l'emporte : $\mathcal{E}_{p,\text{eff}} \rightarrow +\infty$ (barrière centrifuge interdisant l'approche du centre). Quand $r \rightarrow +\infty$, les deux termes tendent vers 0, le terme attractif en $-1/r$ dominant : $\mathcal{E}_{p,\text{eff}} \rightarrow 0^-$. Entre les deux, la fonction passe par un **minimum** unique. Pour un **état lié**, l'énergie mécanique est négative : la droite $\mathcal{E}_m = \text{cste} < 0$ coupe la courbe en deux points $r_{\min}$ (périgée) et $r_{\max}$ (apogée), entre lesquels la distance r oscille. C'est la signature d'une trajectoire elliptique bornée.



Programme officiel PTSI mobilisé : 2.6 (énergie potentielle effective ; état lié et état de diffusion) ; 2.3 (identifier sur un graphe d'énergie potentielle un puits ; en déduire le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle).

Q8. Aux points où $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$, on a $\dot{r} = 0$ d'après la relation (1). Sur une ellipse, ces points sont le **périgée** ($r = r_{\min}$) et l'**apogée** ($r = r_{\max}$) : ce sont les points de rebroussement du mouvement radial, où la composante radiale de la vitesse s'annule (la vitesse y est purement orthoradiale). Cas particulier remarquable : si $\mathcal{E}_m$ est égale au *minimum* de $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$, alors $r_{\min} = r_{\max} = r_0$ et r reste bloqué à la valeur r_0 pour laquelle $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ est minimale. La distance au centre est constante : le **mouvement est circulaire**, et comme $\dot{\theta} = L_0/(mr_0^2)$ est alors constant, il est de surcroît **uniforme**.

Programme officiel PTSI mobilisé : 2.6 (cas du mouvement circulaire ; état lié) ; 2.3 (positions de vitesse nulle ; positions d'équilibre du mouvement radial).

Q9. Sur l'orbite circulaire de rayon R , la deuxième loi de Newton projetée sur $\vec{u}_r$ (accélération purement centripète, $a_r = -v^2/R$) donne

$$-m \frac{v^2}{R} = -\frac{GM_T m}{R^2} \implies v^2 = \frac{GM_T}{R}.$$

On en déduit l'énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_{m,\text{alt}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{R} = \frac{1}{2} \frac{GM_T m}{R} - \frac{GM_T m}{R} = \boxed{-\frac{GM_T m}{2R}}.$$

On remarque la relation caractéristique du mouvement keplerien circulaire $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}\mathcal{E}_p = -\mathcal{E}_c$: l'énergie mécanique est négative (état lié) et vaut la moitié de l'énergie potentielle.

Programme officiel PTST mobilisé : 2.6 (exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire) ; 2.2 (deuxième loi de Newton) ; 2.1 (mouvement circulaire uniforme, accélération en coordonnées polaires).

Q10. Pour le mouvement circulaire uniforme, $v = R\omega$ avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$. En reportant dans $v^2 = \frac{GM_T}{R}$:

$$R^2\omega^2 = \frac{GM_T}{R} \implies \omega^2 = \frac{GM_T}{R^3} \implies \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM_T}{R^3},$$

soit la **troisième loi de Kepler** dans le cas circulaire :

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}}.$$

Le rapport T^2/R^3 ne dépend que de la masse de l'astre attracteur : il est identique pour tous les satellites de la Terre. La généralisation au mouvement elliptique (admise) consiste à remplacer R par le demi-grand axe a : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$.

Programme officiel PTST mobilisé : 2.6 (cas particulier du mouvement circulaire : établir que le mouvement est uniforme et déterminer sa période ; établir la troisième loi de Kepler dans le cas circulaire et exploiter sa généralisation elliptique).

I.2 – Jason, fin de vie des satellites

Q11. L'orbite de transfert de Hohmann est une ellipse dont l'apogée A est sur l'orbite de référence ($r = R$) et le périégée P sur l'orbite cimetièrre ($r = R_c$). En ces deux points, $\dot{r} = 0$, donc d'après (1) l'énergie mécanique de transfert vérifie simultanément :

$$\mathcal{E}_{m,\text{tr}} = \frac{L_0^2}{2mR^2} - \frac{GM_T m}{R} = \frac{L_0^2}{2mR_c^2} - \frac{GM_T m}{R_c}.$$

Ces deux égalités expriment que A et P ont la même énergie mécanique (constante du mouvement) et le même moment cinétique L_0 . En soustrayant membre à membre, on élimine L_0 :

$$\frac{L_0^2}{2m} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_c^2} \right) = GM_T m \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_c} \right) \implies L_0^2 = \frac{2GM_T m^2 R R_c}{R + R_c}.$$

En reportant cette valeur dans la première expression de $\mathcal{E}_{m,\text{tr}}$:

$$\mathcal{E}_{m,\text{tr}} = \frac{1}{2mR^2} \cdot \frac{2GM_T m^2 R R_c}{R + R_c} - \frac{GM_T m}{R} = \frac{GM_T m}{R} \left(\frac{R_c}{R + R_c} - 1 \right) = \boxed{-\frac{GM_T m}{R + R_c}}.$$

C'est bien la forme attendue. On retrouve d'ailleurs $\mathcal{E}_{m,\text{tr}} = -\frac{GM_T m}{2a}$ avec le demi-grand axe $a = \frac{R + R_c}{2}$, conformément à la formule générale de l'énergie d'une orbite elliptique.

Programme officiel PTSI mobilisé : 2.6 (exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe ; utiliser les constantes du mouvement – moment cinétique et énergie mécanique) ; 2.3 (conservation de l'énergie mécanique).

Q12. La variation d'énergie mécanique à fournir pour passer de l'orbite de référence à l'orbite de transfert vaut :

$$\Delta \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,\text{tr}} - \mathcal{E}_{m,\text{alt}} = -\frac{GM_T m}{R + R_c} + \frac{GM_T m}{2R} = GM_T m \frac{(R + R_c) - 2R}{2R(R + R_c)} = \boxed{GM_T m \frac{R_c - R}{2R(R + R_c)}}.$$

Commentaire du signe. L'orbite cimetièrre étant d'altitude légèrement *plus basse* que l'orbite de référence, on a $R_c < R$, donc $R_c - R < 0$ et finalement $\Delta \mathcal{E}_m < 0$. Il faut donc *retirer* de l'énergie mécanique au satellite : l'orbite de transfert, plus basse en moyenne, est moins énergétique que l'orbite circulaire de départ.

Programme officiel PTSI mobilisé : 2.6 (énergie mécanique des orbites circulaire et elliptique ; satellites terrestres : changement d'orbite) ; 2.3 (énergie mécanique, distinction échange/variation).

Q13. Au périégée P , le satellite doit quitter l'ellipse de transfert pour s'insérer sur l'orbite cimetièrre circulaire de rayon R_c , d'énergie $\mathcal{E}_{m,c} = -\frac{GM_T m}{2R_c}$. La variation correspondante est :

$$\mathcal{E}_{m,c} - \mathcal{E}_{m,\text{tr}} = -\frac{GM_T m}{2R_c} + \frac{GM_T m}{R + R_c} = GM_T m \frac{R_c - R}{2R_c(R + R_c)} < 0 \quad (\text{car } R_c < R).$$

Il faut à nouveau *diminuer* l'énergie mécanique. Physiquement, au périégée de l'ellipse de transfert le satellite va plus vite que la vitesse circulaire correspondant au rayon R_c ; pour « circulariser » l'orbite à cette altitude, il faut donc le ralentir. **Il faut freiner le satellite** (poussée des moteurs opposée au vecteur vitesse).

Programme officiel PTSI mobilisé : 2.6 (cas du mouvement circulaire et elliptique ; satellites terrestres) ; 2.3 (approche énergétique : caractère moteur ou résistant d'une action, conservation de l'énergie mécanique).

2 Partie II – Oscillateur mécanique

II.1 – Ressort de masse négligeable (oscillateur vertical)

□ – 1. La force de rappel d'un ressort idéal est proportionnelle à son allongement $l - l_0$. L'énergie potentielle élastique associée, choisie nulle pour $l = l_0$, est la primitive correspondante :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,k} = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2}.$$

Elle est toujours positive et minimale lorsque le ressort est à sa longueur naturelle.

Programme officiel PTSI mobilisé : 2.3 Approche énergétique (établir et citer l'expression de l'énergie potentielle élastique) ; 1.4 Oscillateurs (oscillateur harmonique mécanique).

□ – 2. Le champ de pesanteur est uniforme, $\vec{g} = g \vec{u}_z$ (orienté vers le bas), et le point P est repéré par sa cote $z = l$. Le poids $m\vec{g}$ dérive d'une énergie potentielle de pesanteur ; en prenant l'origine en O ($z = 0$) :

$$m\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_{p,p} \implies \mathcal{E}_{p,p} = -m g z + \text{cste} \implies \boxed{\mathcal{E}_{p,p} = -m g l}.$$

Le signe « $-$ » traduit que l'énergie potentielle de pesanteur décroît lorsque le point descend.

Programme officiel PTSI mobilisé : 2.3 Approche énergétique (énergie potentielle de pesanteur en champ uniforme ; lien force conservative – gradient).

□–3. Le point P se déplaçant verticalement, sa vitesse est $\dot{z} = \dot{l}$. L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et des deux énergies potentielles :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{l}^2 + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 - mgl.$$

Programme officiel PTSI mobilisé : 2.3 Approche énergétique (énergie mécanique ; reconnaître les cas de conservation).

□–4. En l'absence de tout frottement, l'énergie mécanique se conserve, $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$. En dérivant l'expression précédente :

$$m\dot{l}\ddot{l} + k(l - l_0)\dot{l} - mg\dot{l} = 0.$$

Cette égalité étant vraie à tout instant et $\dot{l}$ n'étant pas identiquement nul, on peut le factoriser :

$$\ddot{l} + \frac{k}{m}l = \frac{kl_0 + mg}{m}.$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, dont la position d'équilibre (second membre divisé par k/m) est $l_{\text{eq}} = l_0 + \frac{mg}{k}$: le ressort s'allonge sous l'effet du poids d'une quantité mg/k .

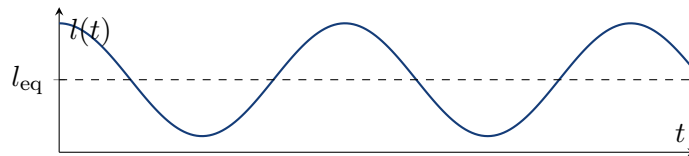
Programme officiel PTSI mobilisé : 1.4 Oscillateurs libres (établir l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique) ; 2.3 (établir l'équation différentielle du mouvement) ; 2.2 (deuxième loi de Newton, approche équivalente).

□–5. En posant $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, la solution générale est la somme de la solution d'équilibre et de la solution de l'équation homogène : $l(t) = l_{\text{eq}} + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$. Les conditions initiales $l(0) = L$ et $\dot{l}(0) = 0$ donnent $B = 0$ puis $A = L - l_{\text{eq}}$:

$$l(t) = l_{\text{eq}} + (L - l_{\text{eq}}) \cos(\omega_0 t), \quad l_{\text{eq}} = l_0 + \frac{mg}{k}.$$

Le mouvement est une **oscillation sinusoïdale** autour de l_{eq} , d'amplitude $|L - l_{\text{eq}}|$. La longueur minimale atteinte vaut $l_{\text{min}} = l_{\text{eq}} - |L - l_{\text{eq}}|$. Pour que P ne heurte jamais le support (situé en $l = 0$), il faut $l_{\text{min}} > 0$, soit $|L - l_{\text{eq}}| < l_{\text{eq}}$:

$$0 < L < 2l_{\text{eq}} = 2l_0 + \frac{2mg}{k}.$$



La période est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Avec $k = 0,300 \pi^2 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ et $m = 0,300 \text{ kg}$:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0,300}{0,300 \pi^2}} = \frac{2\pi}{\pi} = \boxed{2,00 \text{ s}}.$$

Programme officiel PTSI mobilisé : 1.4 Oscillateurs (résoudre l'équation de l'oscillateur harmonique compte tenu des conditions initiales ; amplitude, période, pulsation) ; Annexe 2 (équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants ; représentation graphique de la solution).

II.2 – Prise en compte de la masse m_r du ressort

□–6. La masse m_r est uniformément répartie sur la longueur l : la masse linéique vaut m_r/l . Une tranche élémentaire située à la cote z possède la masse $dm = \frac{m_r}{l}dz$ et l'énergie potentielle élémentaire $d\mathcal{E}_p = -gz dm$. On somme sur toute la longueur (interprétation de l'intégrale comme somme de contributions infinitésimales) :

$$\mathcal{E}_{p,p}^{\text{ress}} = -\frac{m_r g}{l} \int_0^l z dz = -\frac{m_r g}{l} \cdot \frac{l^2}{2} = \boxed{-\frac{1}{2} m_r g l}.$$

Tout se passe comme si la masse du ressort était concentrée en son milieu (cote $l/2$).

Programme officiel PTST mobilisé : 2.3 (énergie potentielle de pesanteur) ; Annexe 2 (primitive et intégrale : interpréter l'intégrale comme une somme de contributions infinitésimales).

□–7. La vitesse d'une tranche à la cote z est supposée proportionnelle à z , avec pour valeur à l'extrémité mobile ($z = l$) celle du point P : $v(z) = \frac{z}{l}\dot{l}$. L'énergie cinétique élémentaire $d\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} dm v(z)^2$ s'intègre en :

$$\mathcal{E}_c^{\text{ress}} = \frac{1}{2} \frac{m_r}{l^3} \dot{l}^2 \int_0^l z^2 dz = \frac{1}{2} \frac{m_r}{l^3} \dot{l}^2 \cdot \frac{l^3}{3} = \boxed{\frac{1}{6} m_r \dot{l}^2}.$$

On reconnaît une « masse effective » $m_r/3$: seul le tiers de la masse du ressort intervient dans l'inertie du mouvement.

Programme officiel PTST mobilisé : 2.3 (énergie cinétique) ; Annexe 2 (intégrale comme somme de contributions infinitésimales). Le calcul prolonge le cadre du point matériel à un système déformable simple (cf. 2.7, second semestre).

□–8. En sommant énergie cinétique (point + ressort) et énergies potentielles :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \left(m + \frac{m_r}{3} \right) \dot{l}^2 + \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 - \left(m + \frac{m_r}{2} \right) g l.$$

Programme officiel PTST mobilisé : 2.3 (énergie mécanique d'un système ; extensivité/additivité des énergies).

□–9. En dérivant $\mathcal{E}_m$ et en simplifiant par $\dot{l}$:

$$\left(m + \frac{m_r}{3} \right) \ddot{l} + k l = k l_0 + \left(m + \frac{m_r}{2} \right) g.$$

Commentaire. La masse du ressort modifie le mouvement de deux façons : elle augmente l'inertie via le terme $m_r/3$ (ce qui ralentit les oscillations), et elle décale la position d'équilibre via le poids supplémentaire $\frac{1}{2} m_r g$. La nouvelle pulsation propre est $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m + m_r/3}} < \omega_0$.

Programme officiel PTST mobilisé : 1.4 (équation différentielle de l'oscillateur harmonique) ; 2.3 (établir l'équation différentielle du mouvement).

□–10. La solution garde la même forme qu'en « □–5 », avec ω_1 et la nouvelle position d'équilibre $l_{\text{eq},1} = l_0 + \frac{(m + m_r/2)g}{k}$. Le mouvement reste sinusoïdal. La période est :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m + m_r/3}{k}} = T_0 \sqrt{1 + \frac{m_r}{3m}} \underset{(1+x)^{\alpha} \simeq 1 + \alpha x}{\simeq} \boxed{T_0 \left(1 + \frac{m_r}{6m} \right)}.$$

A.N. : $\frac{m_r}{6m} = \frac{36,0}{6 \times 300} = 0,020$, donc $T_1 \simeq 2,00 \times 1,020 = \boxed{2,04 \text{ s}}$. La masse du ressort allonge la période d'environ 2%.

Programme officiel PTSI mobilisé : 1.4 (résolution, pulsation, période) ; Annexe 2 (développement limité à l'ordre 1 de $(1+x)^\alpha$) ; Annexe 3 (utilisation possible d'odeint pour vérifier numériquement).

□ – 11. L'écart relatif entre les deux périodes est, au premier ordre, $\frac{T_1 - T_0}{T_0} \simeq \frac{m_r}{6m}$. La condition $\frac{m_r}{6m} \leq 1\%$ s'écrit :

$$\boxed{m_r \leq 0,06 m} \quad \text{A.N. : } m_r \leq 0,06 \times 300 = 18 \text{ g.}$$

Avec $m_r = 36 \text{ g}$, on obtient un écart de $2\% > 1\%$: l'approximation du ressort sans masse n'est donc pas légitime ici. C'est un bon exemple de confrontation quantitative entre un modèle (ressort idéal sans masse) et une situation réelle.

Programme officiel PTSI mobilisé : Annexe 2 (développement limité ; écart relatif) ; compétence « Valider » (confronter un modèle à la réalité, estimer la validité d'une approximation).

II.3 – Oscillateur horizontal

□ – 12. Le point P est astreint à se déplacer horizontalement sur l'axe $(O', \vec{u}_x)$, avec $OO' = l_c$. La longueur du ressort tendu entre O et P vaut, par le théorème de Pythagore, $l = OP = \sqrt{l_c^2 + x^2}$. Comme le mouvement est horizontal (à altitude constante), l'énergie potentielle de pesanteur reste constante ; avec l'origine choisie elle est nulle. Seule subsiste l'énergie élastique :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,P}(x) = \frac{1}{2} k \left(\sqrt{l_c^2 + x^2} - l_0 \right)^2}.$$

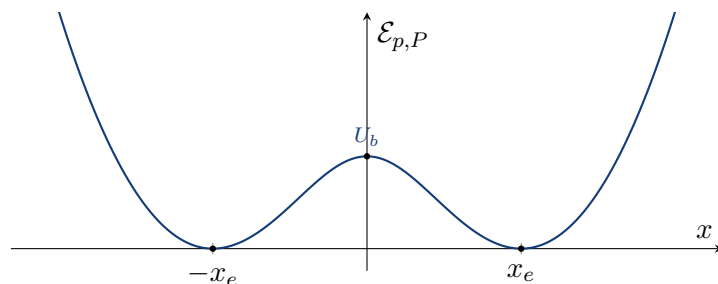
Programme officiel PTSI mobilisé : 2.3 (énergie potentielle élastique ; énergie potentielle de pesanteur, ici constante) ; Annexe 2 (géométrie : longueurs).

□ – 13. Les positions d'équilibre annulent la dérivée de l'énergie potentielle :

$$\frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx} = kx \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l_c^2 + x^2}} \right) = 0 \implies x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 = l_0^2 - l_c^2.$$

Cas $l_c \geq l_0$ (ressort toujours tendu) : la seule solution réelle est $x_e = 0$. La fonction $\mathcal{E}_{p,P}$ y présente un minimum (elle croît de part et d'autre) : équilibre **stable**, puits unique. On a $\mathcal{E}_{p,P}(0) = \frac{1}{2}k(l_c - l_0)^2$.

Cas $l_c < l_0$: trois positions d'équilibre. En $x = 0$, $\mathcal{E}_{p,P}$ présente un *maximum* local : équilibre **instable**. Les deux positions symétriques $x_e = \pm \sqrt{l_0^2 - l_c^2}$ sont des *minima* : équilibres **stables** (potentiel en « double puits »). Aux minima le ressort est à sa longueur naturelle, donc $\mathcal{E}_{p,P}(\pm x_e) = 0$; au sommet central $\mathcal{E}_{p,P}(0) = \frac{1}{2}k(l_0 - l_c)^2$.



Allure de $\mathcal{E}_{p,P}(x)$ dans le cas $l_c < l_0$ (double puits symétrique).

Programme officiel PTSI mobilisé : 2.3 (positions d'équilibre, stabilité ; déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence et la nature stable/instable des positions d'équilibre) ; Annexe 2 (recherche d'un extremum).

□ – 14. On parle de **barrière de potentiel** uniquement dans le cas $l_c < l_0$: pour passer d'un puits stable à l'autre, le point doit franchir le maximum central. Sa hauteur est l'écart d'énergie potentielle entre le sommet et le fond d'un puits :

$$U_b = \mathcal{E}_{p,P}(0) - \mathcal{E}_{p,P}(x_e) = \frac{1}{2} k (l_0 - l_c)^2.$$

Programme officiel PTST mobilisé : 2.3 (mouvement conservatif à une dimension : identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel).

□ – 15. Le mouvement est conservatif à un degré de liberté ; la force selon $\vec{u}_x$ dérive de l'énergie potentielle, $F_x = -\frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx}$. La deuxième loi de Newton projetée sur $\vec{u}_x$ donne :

$$m\ddot{x} + kx \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l_c^2 + x^2}} \right) = 0.$$

La quantité $\frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx}(x)$ représente l'**opposé de la composante selon $\vec{u}_x$ de la force** qui s'exerce sur P . Son signe renseigne directement sur le sens de la force (rappel vers l'équilibre si le potentiel croît) et sa valeur sur l'intensité.

Programme officiel PTST mobilisé : 2.3 (déterminer une force à partir de l'énergie potentielle ; déduire d'un graphe d'énergie potentielle le sens et l'intensité de la force) ; 2.2 (deuxième loi de Newton).

□ – 16. On ramène l'équation du second ordre à un système de deux équations du premier ordre en posant $u_0 = x$ et $u_1 = \dot{x}$:

$$\begin{cases} \dot{u}_0 = u_1 \\ \dot{u}_1 = -\frac{k}{m} u_0 \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l_c^2 + u_0^2}} \right) \end{cases}$$

Le schéma d'Euler explicite estime l'état à l'instant $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ à partir de l'état en t_n :

$$\begin{cases} u_{0,n+1} = u_{0,n} + \Delta t u_{1,n} \\ u_{1,n+1} = u_{1,n} - \Delta t \frac{k}{m} u_{0,n} \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l_c^2 + u_{0,n}^2}} \right) \end{cases}$$

Initialisation : $u_{0,0} = x(0)$ et $u_{1,0} = \dot{x}(0)$ (les conditions initiales du problème).

Programme officiel PTST mobilisé : Annexe 3 (méthode d'Euler explicite ; transformer une équation différentielle d'ordre n en un système de n équations d'ordre 1) ; 2.3 (capacité numérique : résoudre numériquement une équation différentielle du second ordre non linéaire).

□ – 17. Ici $l_c = 0,200 \text{ m} < l_0 = 1,00 \text{ m}$: on est dans le cas du double puits, avec $x_e = \sqrt{l_0^2 - l_c^2} = \sqrt{0,96} \simeq 0,98 \text{ m}$.

- **Cas A** ($x(0) = 2,00 \text{ m}$, $\dot{x}(0) = 0$) : l'énergie initiale dépasse la hauteur de barrière. Le point franchit le sommet central et oscille de part et d'autre de $x = 0$ (entre $\simeq -2$ et $+2 \text{ m}$). L'oscillation, de grande amplitude, est symétrique autour de 0 et nettement *non sinusoïdale* (la vitesse passe par un minimum local au franchissement de la barrière, visible sur le tracé de $\dot{x}$).
- **Cas B** ($x(0) = 1,00 \text{ m}$, $\dot{x}(0) = 0$) : l'énergie initiale est inférieure à la barrière. Le point reste *confiné dans le puits de droite*, oscillant autour de $x_e \simeq 0,98 \text{ m}$ avec une faible amplitude et une allure quasi sinusoïdale.

Programme officiel PTSI mobilisé : 2.3 (déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique ; barrière et puits de potentiel) ; Annexe 3 (exploitation d'une résolution numérique).

□ – **18.** Dans le cas B, le mouvement est une petite oscillation autour de x_e : on linéarise le potentiel par un puits harmonique. La valeur moyenne des oscillations coïncide avec la position d'équilibre :

$$\langle x \rangle \simeq x_e = \sqrt{l_0^2 - l_c^2}.$$

La raideur effective est la courbure du potentiel au fond du puits, $k_{\text{eff}} = \frac{d^2 \mathcal{E}_{p,P}}{dx^2} \Big|_{x_e} = k \left(1 - \frac{l_c^2}{l_0^2} \right)$, d'où $\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 - l_c^2/l_0^2}$ et :

$$T_2 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (l_c/l_0)^2}}.$$

A.N. : $\langle x \rangle = \sqrt{1 - 0,04} = 0,980$ m et $T_2 = \frac{2,00}{\sqrt{0,96}} \simeq 2,04$ s. Ces valeurs sont en excellent accord avec la figure 3 (oscillations centrées sur $\simeq 0,98$ m, période voisine de 2 s). On conclut que l'approximation harmonique (linéarisation du potentiel) est pleinement justifiée tant que l'amplitude reste petite devant x_e .

Programme officiel PTSI mobilisé : 2.3 (petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable, approximation locale par un puits de potentiel harmonique ; établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage de l'équilibre) ; Annexe 2 (valeur moyenne ; développement limité).

□ – **19.** Pour des conditions initiales $x(0) = X_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$, l'énergie mécanique vaut $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p,P}(X_0)$ (vitesse initiale nulle). On est dans le cas A (franchissement de la barrière) si cette énergie dépasse la hauteur de barrière :

$$\frac{1}{2}k \left(\sqrt{l_c^2 + X_0^2} - l_0 \right)^2 > \frac{1}{2}k(l_0 - l_c)^2 \implies \sqrt{l_c^2 + X_0^2} - l_0 > l_0 - l_c.$$

En élevant au carré (les deux membres étant positifs pour X_0 assez grand) :

$$l_c^2 + X_0^2 > (2l_0 - l_c)^2 \implies X_0^2 > 4l_0(l_0 - l_c) \implies \boxed{X_0 > 2\sqrt{l_0(l_0 - l_c)}}.$$

A.N. : $2\sqrt{1,00 \times 0,80} \simeq 1,79$ m. On vérifie la cohérence : $X_0 = 2,00 > 1,79$ donne le cas A, $X_0 = 1,00 < 1,79$ donne le cas B.

Programme officiel PTSI mobilisé : 2.3 (barrière de potentiel ; trajectoire bornée ou non ; utiliser les conditions initiales et la conservation de l'énergie mécanique).

□ – **20.** Le développement limité de $\frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx}$ au voisinage de $x = 0$ s'obtient à partir de $\frac{1}{\sqrt{l_c^2 + x^2}} \simeq$

$$\frac{1}{l_c} \left(1 - \frac{x^2}{2l_c^2} \right) :$$

$$\frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx} \simeq k \left(1 - \frac{l_0}{l_c} \right) x + \frac{k l_0}{2 l_c^3} x^3, \quad \text{soit} \quad \alpha_m = k \left(1 - \frac{l_0}{l_c} \right), \quad \beta_m = \frac{k l_0}{2 l_c^3}.$$

La fonction étant *impaire*, la modélisation par un polynôme de degré 3 sans terme pair est cohérente avec la symétrie $x \leftrightarrow -x$ du dispositif. Signes :

$$\beta_m > 0 \text{ (toujours);}$$

$$\alpha_m > 0 \text{ si } l_c > l_0 \text{ (puits unique, équilibre stable en 0);}$$

$$\alpha_m < 0 \text{ si } l_c < l_0 \text{ (point 0 instable, double puits).}$$

L'équation du mouvement devient :

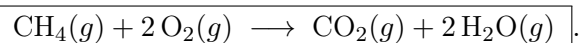
$$\boxed{m\ddot{x} + \alpha_m x + \beta_m x^3 = 0} \quad (\text{équation de Duffing non amortie}).$$

Le terme cubique $\beta_m x^3$ est le « terme non linéaire » responsable de l'anharmonicité des grandes oscillations (cas A) et de l'existence du double puits lorsque $\alpha_m < 0$.

Programme officiel PTST mobilisé : 2.3 (petits mouvements et mise en évidence des termes non linéaires ; capacité numérique : faire apparaître l'effet des termes non linéaires) ; Annexe 2 (développements limités).

3 Partie III – Combustion dans une turbine à gaz

Q1. La combustion complète du méthane (eau et dioxyde de carbone gazeux, coefficient unitaire pour CH_4) s'écrit :



Caractère quantitatif. On évalue les grandeurs standard de réaction à 298 K à partir des données :

$$\Delta_r H^\circ = -393,5 + 2(-241,8) - (-74,9) = -802,2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1},$$

$$\Delta_r S^\circ = 213,8 + 2(188,7) - 186,2 - 2(205,0) = -5,0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1},$$

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ \simeq -800,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}, \quad K^\circ = \exp\left(\frac{-\Delta_r G^\circ}{RT}\right) \approx e^{323} \sim 10^{140}.$$

La constante d'équilibre étant gigantesque, la réaction est **quantitative (totale)** à 298 K : à l'équilibre, il ne reste pratiquement aucun réactif limitant.

Pouvoir calorifique inférieur. L'eau étant produite à l'état gazeux, l'énergie thermique libérée à pression constante par mole de CH_4 est $|\Delta_r H^\circ|$. Rapportée à la masse molaire $M_{\text{CH}_4} = 16,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$:

$$\boxed{q_{gn} = \frac{|\Delta_r H^\circ|}{M_{\text{CH}_4}} = \frac{802,2 \cdot 10^3}{16,0 \cdot 10^{-3}} \simeq 5,0 \cdot 10^7 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}} \quad (\approx 50 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}).$$

Programme officiel PTST mobilisé : 4.1.1 (écrire l'équation de réaction ; constante thermodynamique d'équilibre ; transformation totale) ; 3.3 (enthalpie, bilans d'énergie). Le calcul de K° via $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ$ à partir des enthalpies de formation et entropies molaires standard relève de la thermochimie de 2^e année ; en PTST, K est en général donnée.

Q2. Le débit molaire de méthane est $F_0 = \frac{D_{m,gn}}{M_{\text{CH}_4}} = \frac{9,66}{16,0 \cdot 10^{-3}} = 603,8 \text{ mol} \cdot \text{s}^{-1}$. La stœchiométrie impose 2 mol d' O_2 par mole de CH_4 ; l'air étant constitué d'1/5 d' O_2 , il faut 10 mol d'air par mole de CH_4 . Avec la masse molaire de l'air $M_{\text{air}} = \frac{1}{5}(32) + \frac{4}{5}(28) = 28,8 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$:

$$D_{m0} = D_{m,gn} \frac{10 M_{\text{air}}}{M_{\text{CH}_4}} = 9,66 \times \frac{10 \times 28,8}{16,0} = 9,66 \times 18 = \boxed{1,74 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

La puissance thermique libérée dans ces conditions est :

$$\mathcal{P}_{th0} = q_{gn} D_{m,gn} = 5,0 \cdot 10^7 \times 9,66 \simeq \boxed{4,8 \cdot 10^8 \text{ W}} \quad (\approx 484 \text{ MW}).$$

Programme officiel PTST mobilisé : 4.1.1 (avancement, stœchiométrie, composition ; quantité de matière, débit) ; 3.3 (puissance thermique, bilan d'énergie) ; compétence « Réaliser » (applications numériques).

Q3. Le réacteur étant parfaitement calorifugé et la pression constante, la transformation est *adiabatique monobare* : $\Delta H = 0$. La chaleur dégagée par la réaction (menée fictivement à T_0) sert

intégralement à échauffer les produits ($1 \text{ CO}_2 + 2 \text{ H}_2\text{O} + 8 \text{ N}_2$ par mole de CH_4) de T_0 à la température de sortie T_s . En assimilant les capacités thermiques à leurs valeurs à 298 K :

$$|\Delta_r H^\circ| = (C_{p,\text{CO}_2} + 2C_{p,\text{H}_2\text{O}} + 8C_{p,\text{N}_2})(T_s - T_0),$$

$$T_s = T_0 + \frac{q_{gn} M_{\text{CH}_4}}{C_{p,\text{CO}_2} + 2C_{p,\text{H}_2\text{O}} + 8C_{p,\text{N}_2}}.$$

A.N. : $\sum nC_p = 37,1 + 2(33,6) + 8(29,1) = 337,1 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$, d'où $T_s = 298 + \frac{802,2 \cdot 10^3}{337,1} \simeq \boxed{2,68 \cdot 10^3 \text{ K}}$ ($\approx 2400^\circ\text{C}$).

Commentaire. Cette température adiabatique de flamme dépasse très largement la limite de tenue des aubes en céramique ($1600^\circ\text{C} \approx 1873 \text{ K}$) et a fortiori le seuil de formation des NO_x (1300°C). La combustion stœchiométrique est donc inexploitable telle quelle : il faut impérativement diluer pour abaisser T_s .

Programme officiel PTST mobilisé : 3.3 (premier principe ; bilan d'enthalpie pour une transformation monobare ; capacité thermique à pression constante ; extensivité de l'enthalpie) ; compétence « Valider » (commenter un ordre de grandeur).

Q4. Les oxydes d'azote se forment lorsque $T > 1300^\circ\text{C}$. Pour les éviter, il faut *abaisser la température de sortie*. En augmentant le débit d'air ($D_{m,\text{air}} > D_{m0}$), on introduit un excès d'air (essentiellement du diazote inerte) qui ne participe pas à la réaction mais qui doit néanmoins être échauffé par la même énergie de combustion : la température finale diminue. En pratique, $D_{m,\text{air}}$ est donc choisi supérieur à D_{m0} afin de maintenir T_s en deçà du seuil des NO_x (et de la limite de tenue des aubes).

Programme officiel PTST mobilisé : 3.3 (bilan d'enthalpie : effet de la dilution sur la température) ; compétence « Analyser » (raisonnement qualitatif) ; sensibilisation aux enjeux environnementaux (émissions de NO_x).

Q5. Pour $D_{m,\text{air}} > D_{m0}$, le méthane est le réactif limitant (totalement consommé). En notant $F_0 = \frac{D_{m,\text{gn}}}{M_{\text{CH}_4}}$, l'air apporte $\frac{1}{5} \frac{D_{m,\text{air}}}{M_{\text{air}}}$ d' O_2 et $\frac{4}{5} \frac{D_{m,\text{air}}}{M_{\text{air}}}$ de N_2 ; la stœchiométrie ($\frac{1}{5} \frac{D_{m0}}{M_{\text{air}}} = 2F_0$) permet d'exprimer l' O_2 en excès :

Espèce en sortie	Débit molaire
CH_4	$F_{\text{CH}_4} = 0$
O_2	$F_{\text{O}_2} = \frac{D_{m,\text{air}} - D_{m0}}{5 M_{\text{air}}}$
N_2	$F_{\text{N}_2} = \frac{4 D_{m,\text{air}}}{5 M_{\text{air}}}$
CO_2	$F_{\text{CO}_2} = \frac{D_{m,\text{gn}}}{M_{\text{CH}_4}}$
H_2O	$F_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{2 D_{m,\text{gn}}}{M_{\text{CH}_4}}$

Programme officiel PTST mobilisé : 4.1.1 (avancement ; composition du système dans l'état final ; réactif limitant ; transformation totale) ; 2.2 (conservation de la masse pour un système ouvert en régime stationnaire).

Q6. « Température maximale sans NO_x » signifie $T_s = T_{\text{max}} = 1300^\circ\text{C} = 1573 \text{ K}$. Le bilan enthalpique (capacités prises constantes à 298 K) s'écrit, en sommant sur toutes les espèces sortantes :

$$q_{gn} D_{m,\text{gn}} = \left[F_{\text{CO}_2} C_{p,\text{CO}_2} + F_{\text{H}_2\text{O}} C_{p,\text{H}_2\text{O}} + F_{\text{O}_2} C_{p,\text{O}_2} + F_{\text{N}_2} C_{p,\text{N}_2} \right] (T_s - T_0).$$

En remplaçant les débits de Q5 et en isolant $D_{m,air} = D_{m1}$:

$$D_{m1} = \frac{5 M_{air}}{C_{p,O_2} + 4C_{p,N_2}} \left[\frac{q_{gn} D_{m,gn}}{T_s - T_0} - F_0 (C_{p,CO_2} + 2C_{p,H_2O} - 2C_{p,O_2}) \right].$$

A.N. : $\frac{q_{gn} D_{m,gn}}{T_s - T_0} = \frac{4,84 \cdot 10^8}{1275} \simeq 3,80 \cdot 10^5$; le terme entre crochets vaut $\approx 3,80 \cdot 10^5 - 2,75 \cdot 10^4$; le préfacteur $\frac{5 \times 28,8 \cdot 10^{-3}}{29,4 + 4 \times 29,1} \simeq 9,9 \cdot 10^{-4}$. On obtient

$$D_{m1} \simeq \boxed{3,5 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}},$$

soit environ le double du débit stœchiométrique : il faut un large excès d'air pour brider la température.

Programme officiel PTSI mobilisé : 3.3 (bilan d'enthalpie ; capacité thermique à pression constante ; extensivité de l'enthalpie) ; 4.1.1 (composition en sortie).

Q7. Pour tenir compte de la variation des capacités avec la température, on remplace chaque produit $C_{p,i}(T_s - T_0)$ par l'intégrale $\int_{T_0}^{T_s} C_{pm,i}(T) dT$. Le bilan enthalpique devient (forme intégrale, $D_{m,air} > D_{m0}$) :

$$q_{gn} D_{m,gn} = \sum_{i \in \{CO_2, H_2O, O_2, N_2\}} F_i \int_{T_0}^{T_s} C_{pm,i}(T) dT$$

où les F_i (donnés en Q5) dépendent de $D_{m,air}$. Cette relation est implicite en $D_{m,air}$ et n'admet pas d'expression analytique simple : elle justifie le recours à une résolution numérique.

Programme officiel PTSI mobilisé : 3.3 (bilan d'enthalpie ; capacité thermique à pression constante) ; Annexe 2 (primitive et intégrale ; expression d'une variation d'enthalpie sous forme intégrale).

Q8. *Unités.* Chaque terme de $C_{pm}(T) = A + BT + CT^2 + DT^3 + E/T^2$ doit s'exprimer en $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$; par analyse dimensionnelle :

$$[A] = J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}, [B] = J \cdot K^{-2} \cdot mol^{-1}, [C] = J \cdot K^{-3} \cdot mol^{-1}, [D] = J \cdot K^{-4} \cdot mol^{-1}, [E] = J \cdot K \cdot mol^{-1}.$$

Code Python (méthode des rectangles, $N = 1000$ points) :

```
def int_Cpm(gaz, T1, T2):
    N = 1000
    dT = (T2 - T1) / N
    integrale = 0.0
    for i in range(N):
        T = T1 + i * dT
        integrale += Cpm(T, gaz) * dT
    return integrale
```

Programme officiel PTSI mobilisé : Annexe 3 (calcul approché d'une intégrale par la méthode des rectangles) ; compétence « Réaliser » (conduire une analyse dimensionnelle ; mener des calculs à l'aide d'un langage de programmation).

Q9. *Description du graphe $T_s(D_{m,air})$.* Pour $D_{m,air}$ voisin de D_{m0} (proportions stœchiométriques), T_s est maximale (de l'ordre de 2600–2700 K) ; lorsque $D_{m,air}$ augmente, l'air en excès dilue et refroidit les gaz, et T_s **décroît de façon monotone**. La valeur particulière pertinente est l'abscisse correspondant à $T_s = 1573 \text{ K}$ (1300 °C) : elle fournit le débit réel recherché.

Ce débit réel est **inférieur** à D_{m1} (Q6). Ce résultat était *prévisible* : les capacités thermiques réelles croissent avec la température, donc les gaz absorbent davantage d'énergie par degré que ne le suppose le calcul à C_p constant (valeurs à 298 K) ; il faut donc *moins* d'air en excès pour atteindre la même température de 1300 °C. Enfin, par conservation de la masse, le débit massique de gaz en sortie de turbine vaut :

$$D_{m,\text{sortie}} = D_{m,g} + D_{m,\text{air}}.$$

Programme officiel PTSI mobilisé : 3.3 (bilan d'enthalpie ; influence de $C_{pm}(T)$) ; compétence « Valider » (confronter modèle simplifié et calcul complet, interpréter l'écart) ; 2.2 (conservation de la masse).

Fin du corrigé.