

COLLECTION SONON

Mathématiques Terminales C, D et E

1^{ère} édition

Vianney Carmel EDEY

Etudiant en Actuariat à l'Université Laval (Canada)
Premier du Bénin aux BAC, session de 2014

Contacts : (229) 95588483/97420873/97120619/95639993

e-mail : codjo-vianney@outlook.fr

Dépôt légal N°..... du.....

Toute reproduction, même partielle, photocopie ou photographie de cet ouvrage constitue une contrefaçon sanctionnée par la loi 84–0008 du 15 mars 1984 relative à la protection des droits d’auteurs en République du Bénin.

A toi Gilles-Christ KANGNI pour tout ce que tu fais dans l'enseignement des Mathématiques au Bénin, pour tes sacrifices de tous les instants au bien de la jeunesse béninoise,

A tous les combattants du monde qui se servent de la plume pour éveiller les esprits et la conscience de la jeunesse, qui, au sacrifice de leur vocation et de leur vie, vouent inlassablement leur temps à œuvrer pour l'émergence et l'éclosion des talents de la jeunesse,

A mon père Jean EDEY, ma mère Blandine SESSOU, mère bénite dès la naissance, vous qui avez fait de nous ce que nous sommes aujourd'hui, en hommage à vos sacrifices de parents de tous les instants,

C'est à vous ce modeste travail.

Préface

Collection SONON est, a priori, rédigée fondamentalement pour accompagner les candidats au Bac série C en APC (Approche Par Compétence) dans leurs études en mathématiques. En particulier, nous visons une excellente réussite des problèmes portant sur les authentiques séquences d'apprentissage de la série C à savoir : les notions de ligne ou surface de niveau au niveau du calcul vectoriel, les applications de l'espace, l'arithmétique, les isométries du plan, les applications affines, les coniques puis les similitudes planes indirectes. Par ailleurs, Collection SONON est aussi un livre complet pour la Terminale D, puisque les contenus notionnels du programme de mathématiques en Terminale D se retrouvent entièrement dans le programme de mathématiques en Terminale C. En outre, Collection SONON est également un livre de révision pour les candidats au Bac série E, car les mathématiques en Terminale E sont presque identiques à celles de la Terminale C. Tout simplement ou de façon laconique, Collection SONON est ‘ ‘ tout en un programme’ ’.

Collection SONON a une structure bien précise. Si aucune confusion n'est-à craindre, le livre peut être divisé et est divisé en quatre grandes parties.

- La première est axée sur le résumé des notions du cours. De la situation d'apprentissage n°1 à la situation d'apprentissage n°3, on a essayé de faire un rappel des notions du cours avec des méthodes de résolution de certains exercices particuliers. On remarque au début de chaque séquence d'apprentissage l'effort de présenter une introduction et tout ceci pour donner une orientation claire et visible du contenu de la séquence.
- La deuxième partie concerne les énoncés des activités d'application et d'approfondissement des notions du cours, découpées par sections de séquence d'apprentissage. Les activités à ce niveau sont également classées du degré de difficultés le moins élevé au plus élevé. Plusieurs extraits des sujets de Baccalauréats série D figurent dans ces activités et ceci permettra en particulier aux élèves de la série D de traiter, bien avant leur examen, ces anciens sujets vu que les élèves n'ont pas souvent le temps pour se diriger vers ces anciennes épreuves, qui parfois sont difficiles à trouver.
- La troisième partie du livre est focalisée sur les énoncés des situations d'évaluations des Collèges et Lycées, des Examens Blancs départementaux, des tests APMB et les sujets des Bac série C de 2002 à 2016. Ici encore, les situations d'évaluations ont, dans une certaine mesure, été ordonnées : les épreuves des Collèges et Lycées d'abord et dans l'ordre des séquences d'apprentissage qui y sont contenues, ensuite les sujets des Examens Blancs départementaux suivis des sujets des tests APMB, puis enfin les sujets des Baccalauréats série C de 2002 à 2016.

- La dernière partie du livre concerne les corrigés détaillés des activités des séquences d'apprentissage et des épreuves des Bac C de 2002 à 2016. A ce niveau, les corrigés ont été parfois commentés pour permettre aux élèves de bien saisir la notion abordée. Tout cela a pour but final, d'une part, d'amener l'élève à maîtriser les notions de base à travers les activités des séquences d'apprentissage et leurs corrigés et d'autre part, de consolider ou d'approfondir ses acquis en lui donnant une idée de l'image des épreuves des Bac à travers les sujets d'évaluation énoncés et leurs corrigés.

Notre objectif est de faire de ce livre un précieux outil d'entraînement et de révision à la portée de tous les candidats dans les séries scientifiques, notamment les séries C, D et E. Tout ceci vise à améliorer des résultats dans les séries scientifiques en particulier en série C, la promotion de cette série, la naissance de nouveaux espoirs en Mathématiques...

Nous espérons que ce manuel répondra au mieux à l'attente et aux besoins des utilisateurs. Toutefois, puisque aucune œuvre humaine n'est parfaite, c'est avec reconnaissance que nous accueillerons vos remarques, critiques et suggestions, toute intervention qui nous permettra d'améliorer les prochaines parutions de Collection SONON ; nous vous remercions d'avance.

L'auteur

Remerciements

Je voudrais à travers ces lignes exprimer toute ma sincère gratitude à Dieu le Père Tout Puissant pour la santé nécessaire qu'il m'a donnée à la rédaction et à la saisie de ces lignes et pour tout ce qu'il fait pour moi chaque jour . Que son nom soit loué !

A vous chers enseignants Henri DANDJINO, Gilles-Christ KANGNI, Marcos ABOUBACAR, Appolinaire DOSSAVI-YOVO, Phillipe ARABA ; j'exprime ici mes sentiments de sincères remerciements et de profonde reconnaissance pour l'esprit d'ouverture, de compréhension et de collaboration dont vous avez fait montre à mon égard, par votre disponibilité, chacun en ce qui le concerne, à me faire part des nombreuses remarques, critiques et suggestions dans le cadre de la parution de cet ouvrage.

Mes sincères remerciements à mon beau-frère Pascal DAGBA à qui j'attribue la part du lion dans la parution de cet ouvrage. Que Dieu te bénisse !

A vous mes amis qui m'ont facilité les travaux de rédaction, chacun de par son soutien, sa disponibilité à m'aider dans la saisie de ces lignes, à me fournir les épreuves des Collèges et Lycées, des anciens livres de recherches etc : Prince ESSOU, Uriel ALANMENO, Rogia KPANO et Espoir SOSSOUKPE, je vous dis sincèrement merci .

Mes pensées vont vers mon père Jean EDEY, ma mère Blandine SESSOU, mes frères et sœurs, Serge, Reine, Hippolyte, Claire, Athanase, Rachelle, Viviane, Jolistelle, mes neveux, nièces et cousins en particulier Abbé Nathanaël EDEY, Xavier EDEY, Alphonse EDEY, mon beau-frère Marcel BESSAN, qui font de ma vie un bonheur ; que le Tout Puissant Dieu daigne bénir chacun de vous et vous combler de ses grâces.

A vous mes chers amis, frères, professeurs et fidèles compagnons de tous les instants : Fabien HOUNGUE, Raoul GOUVI, Parfait et Henri EDEY, Patrick et Patrice VLAVO, Codjo ACADJA, Ghislain AHOULOUKPE, Adolphe et Angelo EDEY, Ammiel KOUCHICO, Cédric DOSSOU, Eliane YEDJENOU, Sonia DJEDEMÉ, Crespin OSSOE, Paterne LINSOUSSI, Gérard LOKOSSOU ; je ne saurais vous citer tous, mes remerciements pour votre soutien.

Tout en saluant ici la mémoire de mon grand-père SONON, je ne vais pas oublier mon cousin Feu Casimir EDEY, compagnon de toute l'enfance qui m'a toujours soutenu et qui m'a tristement, trop tôt, quitté sur cette terre ; au-delà des bornes de cette sphère où le soleil des vivants ne pourra plus vous réchauffer, reposez en paix !

Collection SONON

Conseils aux candidats

Outre la mise en place d'un document de Mathématiques en Terminales C, D et E, une autre manière d'améliorer de plus les résultats dans ces séries, serait en mon avis de proposer aux élèves certaines méthodologies consultatives de réussite. C'est pourquoi j'ai décidé de rédiger quelques pistes de solutions qui pourraient inspirer les élèves pour avoir de bons résultats en Mathématiques et dans toutes les autres matières d'ailleurs. Il est vrai que les programmes de Mathématiques dans les séries scientifiques sont denses ; toutefois, il y a toujours des élèves qui s'en sortent avec de très bonnes notes aux examens. A l'instar de ces élèves, tout le monde peut obtenir d'excellentes notes par de simples méthodes. Comment alors procéder ?

De prime abord, pour réussir brillamment dans toute notre vie, en particulier au Baccalauréat, il est nécessaire de se fixer un objectif global. Par exemple, « je veux avoir mention "Très bien" au Bac ». Mais comment faire pour avoir mention "Très bien" ? Cette question fondera une deuxième nécessité : celle de fractionner son objectif global en de petits objectifs, soit en des objectifs de chaque jour, dans chaque matière. Notre attitude en classe, à la maison, pendant les révisions personnelles et pendant les examens, nous aiderait activement à atteindre nos objectifs journaliers puis notre objectif final. C'est pourquoi en classe, il faut attentivement suivre les cours et poser le maximum de questions au professeur pour mieux comprendre. On ne saurait oublier les bonnes attitudes de travail telles que la ponctualité, le respect de son enseignant, de ses camarades, des règlements intérieurs de son établissement, l'exécution des travaux tels que les exercices de maison, de groupe, les punitions, demandés par son enseignant et les dirigeants de son établissement.

A la maison, il faut savoir ménager son temps en élaborant un emploi du temps judicieux qu'on devrait essayer de suivre chaque jour et éviter surtout la procrastination. Pendant les études personnelles, il faut apprendre d'abord et correctement les cours avant de passer aux exercices. Nous devons prendre conscience que rien de durable ne peut se bâtir sans de solides fondations. On ne peut donc pas réussir les mathématiques sans une bonne maîtrise du cours. Il serait naïf, très grave de croire que c'est pendant les exercices qu'on doit garder les théorèmes, les propriétés, etc. Une fois en face des exercices, il faut se garder de les juger ou les estimer difficiles sans avoir pris connaissance de leur contenu car en ayant une telle attitude psychologique, on crée en soi une peur qui bloque ses sens de réflexion et par conséquent on n'arrive réellement pas à réussir cet exercice. Il est recommandé de commencer par les exercices les plus simples qui permettent d'appliquer sans grandes difficultés les notions du cours avant de passer à ceux qui tendent à approfondir les notions. Dans les exercices d'approfondissement, réfléchissez beaucoup, essayez, à travers une simple définition ou propriété, d'étendre vos connaissances, d'en déduire les implications et d'établir des liens entre les théories afin de pouvoir répondre aux questions posées, (démonstration, justification, déduction etc). La plus grave erreur des élèves est de se jeter sur les corrigés-types pour les "bucher" sans avoir longuement réfléchi aux exercices. En effet, si vous procédez comme cela, vous deviendriez bornés, esclaves des corrigés et ainsi vous ne pourriez plus utiliser vos connaissances et les convertir pour résoudre les problèmes ; ce qui fera que vous n'allez pas vous en sortir pendant les compositions. Les mathématiques sont comme des caméléons comme l'indique si bien la couverture du livre ; les questions peuvent revenir sous différentes formes, peuvent présenter différents visages, donc prétendre mémoriser les corrigés plutôt que les comprendre, ne nous aidera point. Les corrigés sont là pour que l'élève contrôle ses résultats, rectifie ses erreurs après qu'il ait fini de faire l'exercice ou après un instant vain de réflexion. Parfois, les corrigés peuvent aussi proposer d'autres méthodes de résolution des problèmes que vous ne pouvez pas toujours comprendre par une simple lecture. Mais si vous aviez plutôt réfléchi et vous arriviez logiquement au même résultat sans avoir recours au corrigé, vous seriez content et vous pourriez même vous féliciter en disant « je suis trop fort » et cela aiguillonnera davantage vos talents dans cette matière.

Par ailleurs, nous avons notifié que certains élèves savent bien apprendre leurs cours et n'arrivent néanmoins pas à s'en sortir comme il le faut pendant les devoirs, les examens. Il se pose là, le problème de la gestion des compositions. Plusieurs causes peuvent être à l'origine de cela. Nous pouvons parler de la panique des élèves devant les épreuves, le stress, la mauvaise gestion du temps de composition, l'agitation et la précipitation conduisant aux erreurs, l'oubli d'une formule nécessaire et d'autres raisons encore. Pour éviter ces surprises, il faut réviser les formules que vous avez du mal à garder quelques minutes plus tôt avant la composition et ne pas attaquer l'épreuve avec précipitation. Il faut d'abord respirer un coup, prendre son souffle, garder son sang-froid avant de commencer par lire posément l'épreuve tout en soulignant au crayon les données nécessaires et ne surtout pas craindre au premier abord l'épreuve de la matière en jeu. L'épreuve n'est qu'une chose et paniquer devant une chose, serait-ce renier à sa qualité d'homme. Ce n'est que cette peur lors des examens qui nous empêche d'être certain de nos réponses et de bien réussir la matière. Il faut donc prendre le risque d'affronter l'épreuve en étant courageux. Ayez avec vous un brouillon et faites-y assez de calculs pour éviter de surcharger les copies et d'y faire des ratures qui dégoutent les correcteurs. Si vous n'arrivez pas à répondre à une question après un temps suffisant de réflexion, sautez-là et attaquez une autre. Si vous n'êtes pas solide dans les calculs mentaux, ne hasardez pas à en faire ; d'ailleurs ce n'est même pas conseillé, les calculs mentaux, pendant les examens. Et surtout ne vous précipitez pas à terminer pour terminer les questions de l'épreuve. La meilleure composition est d'être sûre que tout ce qu'on a eu à écrire est juste même si on n'a pas terminé.

Quant à ceux qui ont déjà passé le BAC sans succès, ne vous découragez-pas. C'est même l'échec qui serait fondamental pour un bon départ de tout homme. Celui qui n'a jamais échoué dans sa vie (ne pas réussir à un examen, ne pas réussir à atteindre ses objectifs, ne pas réussir à conserver son rang habituel en classe...) ne saurait bien réussir dans la vie ; car, réussir c'est toujours bien, mais fléchir et se relever ferait notre force. Retenez que nos insuccès nous rendent plutôt beaucoup plus fort et nous préparent à franchir les plus sérieuses difficultés. En réalité, il n'y a jamais eu d'échecs, mais des essais manqués. Faites un bilan de votre vie et détectez le vrai problème de vos "échecs" pour pouvoir en trouver les véritables solutions.

Enfin, pour les croyants comme moi, n'oubliez pas le côté spirituel dans vos études, c'est très important. Ce n'est que Dieu le Père Tout Puissant qui peut couronner de succès les efforts de l'homme. Puisque les fruits, n'ont pas toujours tenu la promesse des fleurs, priez donc au jour le jour, pour vos parents, vos professeurs, vos amis et pour tout ce qui vous tient à cœur afin que, avec tous les efforts déjà déployés, la chance puisse vous accompagner au grand jour !

Arrangez-vous pour prendre connaissance tout au moins des épreuves de Baccalauréat des années antérieures, toutes corrigées ici, avant votre examen. Les choses ne sont pas si difficiles, vous pouvez réussir, vous allez réussir, vous devez réussir, vous réussirez...

Je vous souhaite beaucoup de courage, de persévérance et bonne chance.

L'auteur

« Et quand personne ne me lira, ai-je perdu mon temps de m'être entretenu tant d'heures oisives à penements si utiles et agréables ? ».

Montaigne

Contenus notionnels inscrits dans les programmes des classes Terminales C, D et E

Situation d'apprentissage n°1 : Configurations de l'espace

Séquence d'apprentissage n° 1 : Calcul Vectoriel

Séquence d'apprentissage n° 2: Applications de l'espace (Série C & E)

Situation d'apprentissage n°2 : Organisation des données.

Séquence d'apprentissage n° 1: Système d'équations

Séquence d'apprentissage n° 2: Arithmétique (Série C & E)

Séquence d'apprentissage n° 3: Nombres Complexes

Séquence d'apprentissage n° 4: Limites et Continuité

Séquence d'apprentissage n° 5: Dérivabilité-Etude de fonctions

Séquence d'apprentissage n° 6: Primitives

Séquence d'apprentissage n° 7: Fonction logarithme Népérien

Séquence d'apprentissage n° 8: Fonction exponentielle Népérienne

Séquence d'apprentissage n° 9: Fonctions exponentielles-
Fonctions Puissances

Séquence d'apprentissage n° 10: Calcul Intégral

Séquence d'apprentissage n° 11: Equations différentielles linéaires
à coefficients constants

Séquence d'apprentissage n° 12: Probabilité

Séquence d'apprentissage n° 13: Suites Numériques

Séquence d'apprentissage n° 14: Statistiques

Situation d'apprentissage n° 3 : Lieux géométriques dans le plan

Séquence d'apprentissage n° 1: Isométries du plan (Série C & E)

Séquence d'apprentissage n°2: Applications affines du plan (Série C & E)

Séquence d'apprentissage n° 3: Coniques (Série C & E)

Séquence d'apprentissage n° 4: Similitudes planes

P

artie I :

**Rappel du cours de chacune des séquences
d'apprentissage inscrites dans les
programmes des classes Terminales C, D et E.**

S A n°1 : Configurations de l'espace

CONTENU

Séquence d'apprentissage n° 1 :

Calcul Vectoriel

Séquence d'apprentissage n° 2 :

Applications de l'espace

Séquence d'apprentissage n°1 :

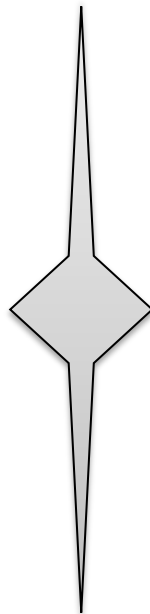
Calcul vectoriel

Introduction

Cette partie de la situation d'apprentissage aborde essentiellement les notions de barycentre, de produit scalaire, de produit vectoriel, de ligne de niveau et leurs utilisations en Géométrie. C'est une séquence qui a fait l'objet de plusieurs recherches mathématiques et dont les résultats, très intéressants, nous permettent de nos jours de résoudre dans la mesure du possible, les problèmes géométriques auxquels est confrontée l'humanité. Les Mathématiciens comme **Gottfried Leibniz, Cauchy Augustin, Desargues, Céva etc**, s'inscrivent dans l'univers des premiers chercheurs qui se sont intéressés au calcul vectoriel. C'est encore un lieu de recherches pointues pour les Mathématiciens contemporains qui perfectionnent les anciens outils géométriques et en trouvent plusieurs utilisations dont nous découvrirons quelques unes à travers les trois grands titres ci-dessous.



Leibniz, (1646-1716), philosophe et Mathématicien allemand.



Augustin Cauchy, (1789-1857), Mathématicien Français.

SOMMAIRE

I. Barycentre de n points pondérés

II. Produit Scalaire - Ligne de niveau

III. Géométrie analytique de l'espace

I .Barycentre de n points pondérés

❖ Vecteurs de l'espace

➤ Définition

- A tout couple de points (A ; B) de l'espace, on associe la grandeur notée $\overrightarrow{AB}$ appelée vecteur.
- Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul noté $\vec{0}$.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ signifie que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

➤ Propriétés

- Pour tout point O et pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique point M de l'espace tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$
- Pour tous points A, B et C de l'espace, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$: c'est la relation de Chasles.

➤ Vecteurs colinéaires :

- Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction ou si l'un d'entre eux est le vecteur nul.
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que : $\vec{u} = k\vec{v}$.
- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont tels que les points A, B et C sont alignés.

➤ Vecteurs coplanaires

- Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si deux d'entre eux sont colinéaires ou bien si l'un est une combinaison linéaire des deux autres, soit donc dans ce cas par exemple :

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} ; (\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

- Trois vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si leurs représentants $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont tels que les points A, B, C et D sont dans un même plan.

❖ Notion de barycentre

➤ Fonction vectorielle de Leibniz

$\mathcal{E}$ désigne le plan ou l'espace, $\mathcal{W}$ désigne l'ensemble des vecteurs de l'espace, $\mathcal{V}$ désigne l'ensemble des vecteurs du plan.

Définition

On appelle **fonction vectorielle de Leibniz** associée aux points pondérés (A_i, α_i) avec $1 \leq i \leq n$, l'application f définie par :

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{W}$$

$$f: \mathbf{M} \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$$

Propriété

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ alors f est bijective.
- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ alors f est une constante.

➤ Barycentre d'un système de points pondérés

Définition

On considère la **fonction vectorielle f de Leibniz** ci-dessus.

Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, l'unique antécédent du vecteur nul par l'application f est appelé **barycentre** des points pondérés (A_i, α_i) avec $1 \leq i \leq n$. Autrement dit, si un point G est barycentre des points pondérés (A_i, α_i) avec $1 \leq i \leq n$ et qu'on note : $G = \text{bar}\{(A_i, \alpha_i)\}$; $1 \leq i \leq n$, alors **G est unique** et vérifie la condition : $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

Propriété

Le Barycentre de plusieurs points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul. C'est la propriété d'homogénéité du barycentre.

➤ **Réduction de la somme** $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$

Propriété

Soit $(A_i, \alpha_i), (1 \leq i \leq n)$ n points pondérés.
Pour tout point M,

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, alors on a :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) \overrightarrow{MG}$$

où G est le barycentre des points pondérés $(A_i, \alpha_i), (1 \leq i \leq n)$.

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, alors le vecteur $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ est **indépendant du point M**.

➤ **Coordonnées du barycentre**

L'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit G le barycentre des points pondérés $(A_i, \alpha_i), (1 \leq i \leq n)$. Si $(x_i; y_i; z_i)$ sont les coordonnées du point A_i et $(x; y; z)$ celles de G , alors on a :

$$\begin{cases} x = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \\ y = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \\ z = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \end{cases}$$

➤ **Barycentre partiel-Ensemble des barycentres de points pondérés**

Propriétés

- On ne change pas le barycentre de n points pondérés ($n \geq 3$) en remplaçant p d'entre

eux ($1 < p < n$), dont la somme des coefficients est non nulle, par leur barycentre partiel affecté de cette somme.

- L'ensemble des barycentres de deux points distincts A et B est la droite (AB) .
- L'ensemble des barycentres de trois points non alignés A, B et C est le plan (ABC) .
- L'ensemble des barycentres de quatre points non coplanaires est l'espace $\mathcal{E}$.

Théorème des barycentres partiels.

Soit $(A, a), (B, b)$ et (C, c) trois points pondérés tels que : $a+b+c \neq 0$ et $a+b \neq 0$. Soit $G = \text{bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$.

Si $H = \text{bar}\{(A, a); (B, b)\}$, alors on a :

$$G = \text{bar}\{(H, a+b); (C, c)\}$$

H est appelé barycentre partiel.

➤ **Isobarycentre**

- On appelle isobarycentre de n points $A_1, A_2, \dots, A_n$ de l'espace, le barycentre de ces n points affectés d'un même coefficient non nul.
- L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment $[AB]$.
- L'isobarycentre de trois points non alignés A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC .
- L'isobarycentre des sommets d'un parallélogramme est le centre de ce parallélogramme.

Retenons

- ☞ Pour démontrer que trois points sont **alignés**, on peut démontrer que l'un est barycentre des deux autres.
- ☞ Pour démontrer que deux droites (IJ) et (KL) sont **sécantes** en un point G , on peut démontrer que G est à la fois barycentre

des points I et J et barycentre des points K et L.

☞ Lorsqu'on a par exemple l'égalité

$$\overrightarrow{AG} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{AB}, \text{ on peut en déduire}$$

directement que $G = \text{bar}\{(A, b); (B, a)\}$.

☞ Si on a par exemple l'égalité

$$a\overrightarrow{AG} + b\overrightarrow{BG} + c\overrightarrow{CG} + d\overrightarrow{DG} = \vec{0}, \text{ on peut en déduire directement que}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c+d} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c+d} \overrightarrow{AC} + \frac{d}{a+b+c+d} \overrightarrow{AD}$$

II. Produit Scalaire-Lignes de niveau

❖ Produit Scalaire

➤ Définition

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le **nombre réel** noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

➤ Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et pour tout nombre réel α , on a :

- ✓ $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$; ✓ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- ✓ $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- ✓ $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- ✓ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, si $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ alors :

- ✓ $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- ✓ Si l'espace est muni du repère $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le repère $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé si et seulement si :

$$\begin{cases} \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \end{cases}$$

- ✓ Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. On note $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- ✓ Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Remarque:

On rappelle que le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est aussi défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|)^2)$$

On pourra utiliser cette formule dans '*ligne de niveau*'.

❖ Lignes de niveau (Séries C et E seules)

➤ Fonction scalaire de Leibniz

Soit (A_i, α_i) ($1 \leq i \leq n$) n points pondérés.

L'application $f : M \rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2$ définie de l'espace E vers l'ensemble IR est dite **fonction scalaire de Leibniz**.

Propriétés

Soit (A_i, α_i) ($1 \leq i \leq n$) n points pondérés.

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ pour tout point M du plan, on a :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 = (\sum_{i=1}^n \alpha_i) MG^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i GA_i^2$$

où G est le barycentre des points pondérés (A_i, α_i) ($1 \leq i \leq n$).

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ pour tout point M du plan, on a :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i OA_i^2 - 2\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} \text{ où } \vec{u} \text{ est le vecteur } \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \text{ indépendant de M.}$$

➤ Notion de ligne de niveau

Définition

Soit k un nombre réel et f une application du plan P dans IR. On appelle **ligne de niveau** ou

surface de niveau k de f , l'ensemble (E_k) des points M tels que $f(M) = k$.

Lignes de niveau de l'application

$$\underline{M} \rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2$$

$$\underline{1^{er} \text{ cas}} : \sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$$

La ligne de niveau k de cette application :

$$\text{On a : } f(M)=k \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2 = k.$$

Soit G le barycentre des points pondérés (A_i, α_i) ($1 \leq i \leq n$).

$$f(M)=k \Rightarrow (\sum_{i=1}^n \alpha_i) \overrightarrow{MG}^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i}^2 = k$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{MG}^2 = \frac{k - \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i}^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}}$$

Posons : $\overrightarrow{MG}^2 = \delta$, $\delta \in \mathbb{R}$.

- Si $\delta < 0$, alors $(E_k) = \emptyset$.
- Si $\delta = 0$, alors $(E_k) = G$.
- Si $\delta > 0$, alors (E_k) est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\delta}$ dans le plan et la sphère de centre G et de rayon $\sqrt{\delta}$ dans l'espace.

$$\underline{2^{ème} \text{ cas}} : \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0.$$

La ligne de niveau k de l'application :

Nous savons que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2$ est indépendant de M .

En posant $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{u}$, ($\vec{u}$ étant indépendant de M), on a :

$$f(M) = k \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}^2 - 2\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = k.$$

$$\Rightarrow \boxed{2\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}^2 - k}$$

- Si $\vec{u} = 0$, on a deux sous-cas :

$$\underline{1^{er} \text{ sous-cas}} : \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}^2 - k = 0.$$

Dans ce cas, (E_k) est un plan.

$$\underline{2^{ème} \text{ sous-cas}} : \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}^2 - k \neq 0$$

Dans ce cas, $(E_k) = \emptyset$.

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, (E_k) est une droite de vecteur normal $\vec{u}$ dans le plan et un plan de vecteur normal $\vec{u}$ dans l'espace.

$$\underline{\text{Ligne de niveau de } f: M \mapsto \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}}}$$

- Si $k=1$, alors (E_k) est, dans le plan, la médiatrice du segment $[AB]$ et dans l'espace le plan médiateur du segment $[AB]$.
- Si $k \neq 1$, alors on a :

$$f(M)=k \Rightarrow \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = k \Rightarrow \overrightarrow{MA}^2 - k^2 \overrightarrow{MB}^2 = 0.$$

Soit $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, -k)\}$.

On a :

$$\boxed{\overrightarrow{GM}^2 = \left(\frac{k}{1-k^2}\right)^2 \overrightarrow{AB}^2}$$

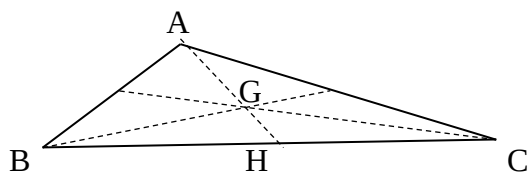
On en déduit que (E_k) est le cercle de centre G et de rayon $r = \frac{kAB}{|1-k^2|}$.

Remarque :

Dans ce cas, on peut dire aussi que (E_k) est le cercle de diamètre $[IJ]$ où I est le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et (B, k) , J le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, -k)$.

Rappels

- **Le centre de gravité** d'un triangle est le point de concours des **médianes** de ce triangle.
- **L'orthocentre** d'un triangle est le point de concours des hauteurs de ce triangle.
- Soit G le centre de gravité du triangle ABC suivant :

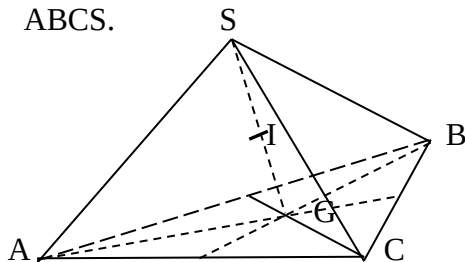


ABC est un triangle quelconque. Le point G vérifie :

$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$. C'est l'isobarycentre des points A, B et C.

On a aussi : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HA}$.

- Soit I le centre de gravité du tétraèdre ABCS.



Le point I est alors l'isobarycentre des points A, B, C et S. I vérifie donc :

$$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{SI} = \vec{0}.$$

On en établit que dans le repère (S ; $\overrightarrow{SA}$; $\overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{SC}$)

I a pour coordonnées $(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4})$.

Par ailleurs, on a :

$$\overrightarrow{SI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SG} \text{ et } \overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}).$$

Retenons

- Soit A et B deux points fixes de l'espace et M un point quelconque de l'espace. L'ensemble des points M vérifiant :
 - ☞ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$, $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ est dans le plan le cercle de centre A et de rayon AM et dans l'espace la sphère de centre A et de rayon AM.
 - ☞ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$ est dans le plan la médiatrice du segment [AB] et dans l'espace le plan médiateur du segment [AB].
 - ☞ $\overrightarrow{AM}^2 \leq \delta$, $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ est dans le plan le disque de centre A et de rayon AM et dans

l'espace la boule de centre A et de rayon AM.

- ☞ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ est dans le plan le cercle de diamètre AB et dans l'espace la sphère de diamètre AB.
- ☞ L'ensemble des points de l'espace vérifiant $\overrightarrow{ax} + \overrightarrow{by} + \overrightarrow{d} \leq 0$ ou $\overrightarrow{ax} + \overrightarrow{by} + \overrightarrow{d} \geq 0$ est le demi-plan de frontière la droite d'équation $\overrightarrow{ax} + \overrightarrow{by} + \overrightarrow{d} = 0$.

III. Géométrie analytique de l'espace.

1) Equations cartésiennes d'un plan-

Représentations paramétriques d'un plan.

❖ Equation cartésienne d'un plan

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace et $\vec{n}(a; b; c)$ un vecteur normal au plan (P) avec $\vec{n} \neq \vec{0}$. On rappelle qu'un vecteur normal à un plan est tout vecteur directeur d'une droite perpendiculaire à ce plan.

Propriété

Le plan (P) passant par $A_0(x_0, y_0, z_0)$ est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

C'est-à-dire : $\boxed{ax + by + cz + d = 0}$

avec $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Telle est l'équation cartésienne du plan (P) de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

❖ Représentation paramétrique d'un plan

Soit $R(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un repère de l'espace.

On appelle représentation paramétrique d'un plan (P) passant par un point

$A_0(x_0, y_0, z_0)$ et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$, le système défini par :

$$\begin{cases} x = x_0 + at + a't' \\ y = y_0 + bt + b't' \\ z = z_0 + ct + c't' \end{cases}; (t; t') \in \mathbb{R}^2$$

Le triplet $(A_0; \vec{u}; \vec{v})$ est un repère cartésien du plan (P).

❖ **Détermination d'une représentation paramétrique d'un plan défini par une équation cartésienne.**

Il y a en général trois méthodes, mais nous parlerons des deux les plus simples.

1^{ère} méthode

On peut poser : $y = \alpha$ et $z = \beta$ avec $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Ainsi, on exprime x en fonction de α et β . Et on forme par la suite le système.

2^{ème} méthode :

On détermine trois points non alignés du plan avec lesquels on forme deux vecteurs dits vecteurs directeurs du plan. Et ainsi, on peut écrire la représentation paramétrique.

❖ **Détermination d'une équation cartésienne d'un plan défini par une représentation paramétrique.**

Il y a en général deux méthodes :

1^{ère} méthode :

On élimine les deux paramètres de la représentation paramétrique du plan, ce qui permet de trouver une équation dépourvue de ces deux paramètres. Cette équation est dite équation cartésienne du plan en question.

2^{ème} méthode :

A partir de la représentation paramétrique du plan, on détermine les coordonnées d'un point appartenant à ce plan en choisissant deux valeurs quelconques pour les paramètres de la représentation paramétrique. Par la suite, on détermine un vecteur normal au plan à partir des deux vecteurs directeurs du plan. L'outil à utiliser dans ce cas est le produit vectoriel. Nous en parlerons plus loin...

2) Système d'équations cartésiennes d'une droite de l'espace- Représentations paramétriques d'une droite de l'espace

❖ **Système d'équations cartésiennes d'une droite de l'espace.**

Une droite (D) de l'espace est l'intersection d'au moins deux plans (P) et (P') d'équations cartésiennes respectives : $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

Le système :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

est appelé **système d'équations cartésiennes de la droite (D).**

On peut aussi définir autrement le système d'équations cartésiennes d'une droite.

Soit $\vec{u}(a; b; c)$ un vecteur directeur de la droite (D) et $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de cette droite.

1^{er} cas : $a \neq 0, b \neq 0$ et $c \neq 0$. On a :

$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ qui est le système d'équations cartésiennes de la droite (D).

2^{ème} cas : $a=0, b \neq 0$ et $c \neq 0$

(analogue si $b=0$ ou $c=0$).

La droite (D) a dans ce cas pour système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \end{cases}$$

3^{ème} cas : $a=0$, $b=0$ et $c \neq 0$

(analogue si $a=0$, $c=0$ et $b \neq 0$ ou bien $b=0$, $c=0$ et $a \neq 0$).

Le système d'équations cartésiennes de la droite (D) est :

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

❖ Représentation paramétrique d'une droite.

Si (D) est une droite de repère (A ; $\vec{u}$) avec $A(x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{u}(a; b; c)$ alors une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

❖ Détermination de la représentation paramétrique d'une droite à partir de son système d'équations cartésiennes

1^{ère} méthode :

On peut poser $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Puis par la suite, on peut exprimer x et y en fonction de α .

2^{ème} méthode

On combine les deux équations puis on détermine deux points de la droite. Pour le faire, il suffit par exemple de choisir au hasard une valeur pour x , une pour y et de tirer z dans chaque cas. Avec ces deux points, on peut déterminer un repère de la droite puis écrire sa représentation paramétrique.

❖ Détermination d'un système d'équation cartésienne d'une droite définie par une représentation paramétrique

Ici, il y a également deux méthodes. Mais la plus simple est d'éliminer le paramètre (par exemple t) de la représentation paramétrique. On trouve trois équations avec lesquelles on peut former 3 systèmes d'équations. Tous ces systèmes représentent des systèmes d'équations cartésiennes de la droite. Mais on choisit un d'entre eux que l'on met sur sa copie.

3) Produit vectoriel

L'espace est muni du repère (O ; I, J, K).

❖ Orientation de l'espace

Pour un observateur appelé observateur d'Ampère ayant la tête vers K, les pieds en O et fixant le point I, il y a deux possibilités :

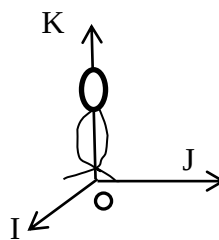


Figure 1

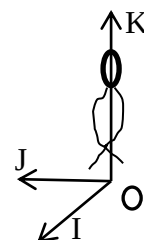


Figure 2

- Le point J est à gauche de l'observateur (Figure 1). On dit que le repère (O, I, J, K) est un repère direct de l'espace et que la base $(\vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ est une base directe de l'espace.
- Le point J est à droite de l'observateur (Figure 2). On dit que le repère (O, I, J, K) est un repère indirect de l'espace et que la base $(\vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ est une base indirecte de l'espace.

Définition

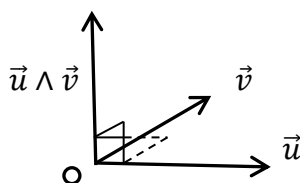
Orienter l'espace revient à déterminer ces deux types de repères.

❖ Définition du produit vectoriel de deux vecteurs

L'espace est orienté. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

Le produit vectoriel du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et défini par :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, alors :
 $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$ ($\vec{w} \neq \vec{0}$) tel que :
 $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$
 $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base directe de l'espace
 $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$



Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel α , on a :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v})$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$

❖ Autres propriétés

- $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base **orthonormée directe** si et seulement si :

$$\begin{cases} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \end{cases}$$

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires et orthogonaux. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une **base orthonormée directe** de l'espace si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$.
- Dans une base orthonormée directe de l'espace, si $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ alors :
 $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{y} & \vec{y}' \\ \vec{z} & \vec{z}' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \vec{z} & \vec{z}' \\ \vec{x} & \vec{x}' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{x}' \\ \vec{y} & \vec{y}' \end{vmatrix}$

Cela donne :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} (yz' - y'z; x'z - xz'; xy' - x'y)$$

- Trois points A, B et C **sont alignés** si et seulement si $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{0}$.
- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si et seulement si $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = 0$.
- Quatre points A, B, C et D sont **coplanaires** si et seulement si :
 $(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 0$.
- L'aire du triangle ABC est :
 $A = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$, $\vec{u}, \vec{a}$ étant l'unité d'aire.
- L'aire du parallélogramme ABCD est :
 $A = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$, $\vec{u}, \vec{a}$
- Le volume du tétraèdre ABCD est :

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD}|$$
, $\vec{u}, \vec{v}$ étant l'unité de volume.

- Quatre points A, B, C, D de l'espace sont les sommets d'un tétraèdre si et seulement si $(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD} \neq 0$
- La distance du point M à la droite (D) de repère (A ; $\vec{u}$) est :
 $d = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$, $\vec{u}, l$ étant l'unité de longueur.
- La distance du point M(x_0, y_0, z_0) au plan (P) de repère (A ; $\vec{u}, \vec{v}$) est :
 $d = \frac{|\vec{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$
 Si le plan a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, alors cette distance vaut :

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Compléments : Positions relatives de droites et de plans.

Soient dans l'espace orienté E, la droite (D) de repère (A ; $\vec{u}$) et la droite (D') de repère (B ; $\vec{v}$), les plans (P₁) et (P₂) de vecteurs normaux de respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

- Les droites (D) et (D') sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- Les droites (D) et (D') sont **strictement** parallèles si et seulement si (D) // (D') et A ∉ (D').
- Les droites (D) et (D') sont confondues $\Leftrightarrow (D) // (D')$ et A ∈ (D').
- Les droites (D) et (D') sont dites non coplanaires $\Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} \neq 0$.
- Les droites (D) et (D') sont orthogonales $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- La droite (D) et le plan (P₁) sont parallèles $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n}_1 = 0$.
- La droite (D) et le plan (P₁) sont **strictement** parallèles $\Leftrightarrow (D) // (P_1)$ et A ∉ (P₁).
- La droite (D) et le plan (P₁) sont orthogonaux $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{n}_1 = k\vec{u}$, $k \in \mathbb{R}$.
- Les plans (P₁) et (P₂) sont parallèles $\Leftrightarrow \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \vec{0}$ ou $\vec{n}_2 = k\vec{n}_1$, $k \in \mathbb{R}$.
- Les plans (P₁) et (P₂) sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.
- Trois points A, B et C non alignés définissent un plan de repère (A ; $\vec{AB}$, $\vec{AC}$).
- Une droite (D) de repère (A ; $\vec{u}$) et un point G n'appartenant pas à (D) forment un plan de repère (A ; $\vec{AG}$, $\vec{u}$).
- Deux droites sécantes de repères (A ; $\vec{u}$) et (B ; $\vec{v}$) définissent un plan de repère (A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) ou (B ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

- Deux droites strictement parallèles de repères (A ; $\vec{u}$) et (B ; $\vec{u}$) définissent un plan de repère (A ; $\vec{AB}$, $\vec{v}$) ou (A ; $\vec{u}$, $\vec{AB}$).

Retenons :

- Soit A, B et C des points fixes de l'espace et M un point quelconque.

☞ $\vec{AM} \wedge \vec{BM} = \vec{0}$ est la droite de repère (A ; $\vec{AB}$).

☞ $\vec{AM} \wedge \vec{BM} = \vec{MC}$ est la droite passant par C et orthogonale au plan contenant les points A et B.

☞ On rappelle que le volume du tétraèdre est aussi $V = \frac{Ab \times h}{3} \vec{u} \cdot \vec{v}$ où Ab est l'aire de base et h la hauteur.

- **Pour étudier la position relative de deux droites**, il faut :

☞ Vérifier si elles sont coplanaires ou non coplanaires,

☞ Si elles sont non coplanaires, l'étude s'arrête là.

☞ Si elles sont coplanaires, deux cas peuvent se présenter :

1^{er} cas : Elles sont parallèles

Dans ce cas, il faut vérifier si elles sont confondues ou strictement parallèles.

2^{ème} cas : Elles sont non parallèles, donc sécantes

Dans ce cas, il faut vérifier si elles sont perpendiculaires. Si non, on conclut qu'elles sont sécantes et non perpendiculaires.

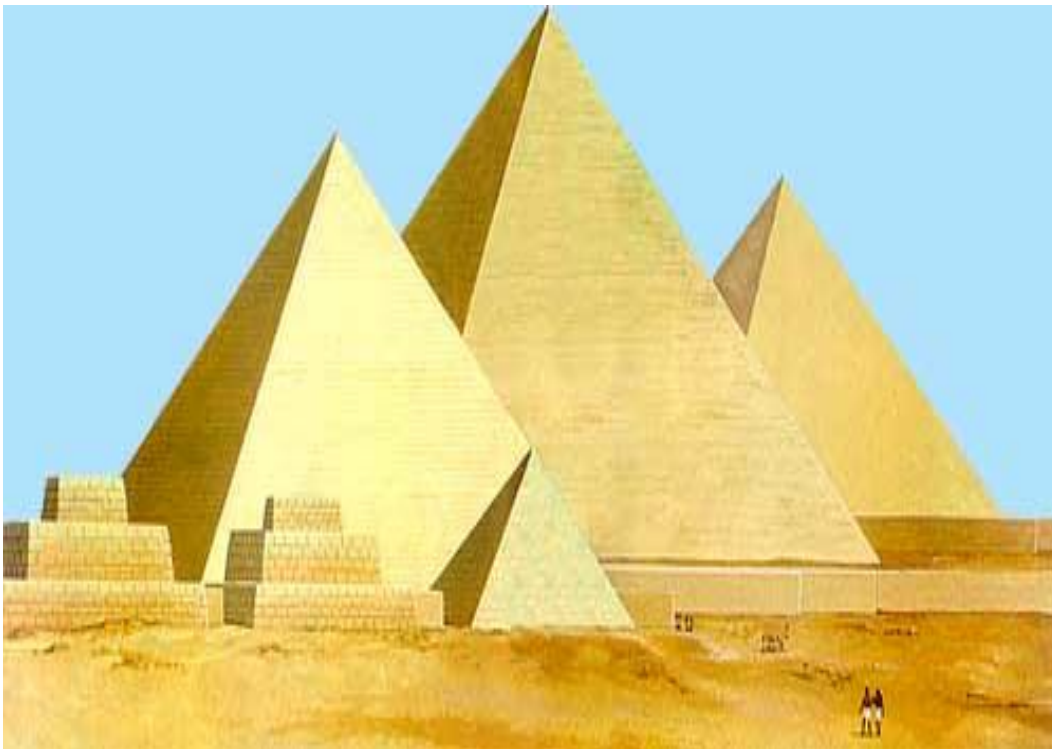
- **La masse volumique** d'un contenant est $\rho = \frac{m}{v}$ où m désigne la masse du contenu et v le volume du contenant.
- **1ha=1hm²=100dam²=10⁸cm²**
- **1L=1dm³=1000cm³=1ML.**

Séquence d'apprentissage 2 :

Applications de l'espace

Introduction

Cette séquence d'apprentissage peut être appréhendée comme une suite à la géométrie analytique de l'espace. A partir des notions qu'on a déjà étudiées en géométrie analytique, nous définirons les applications de l'espace et nous étudierons les propriétés qui leur sont relatives. Nous allons ici, en partie, parler des projections, étudier les translations et les homothéties puis les symétries orthogonales telles que le demi-tour et la réflexion. C'est un domaine très important des mathématiques car répondant à beaucoup de questions géométriques. Dans notre vie quotidienne, nous aurons toujours recours aux applications de l'espace à travers la construction des bâtiments, la fabrication des matériels de chambre, la construction des routes etc.



SOMMAIRE

I. Applications affines-Projections.

II. Translations et homothéties.

III. Symétries orthogonales

I. Généralités sur les Applications affines-Projections

❖ Applications affines

Définition

On appelle application affine de l'espace toute application de l'espace dans l'espace qui conserve le coefficient de colinéarité.

Si A, B et C sont des points de l'espace, f une application affine de l'espace et si $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ alors on a :

$$\overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda \overrightarrow{f(A)f(B)}.$$

On dit que f conserve le barycentre.

❖ Application vectorielle

Soit f une application affine de l'espace et w l'ensemble des vecteurs de l'espace.

On appelle application vectorielle associée à f l'application notée φ définie de $w \rightarrow w$ telle que pour tous points A et B de l'espace, on a :

$$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}.$$

Propriétés

P₁ : Une application de l'espace dans l'espace est une **application affine** si son expression analytique est de la

$$\text{forme : } \begin{cases} x' = ax + by + cz + d \\ y' = a'x + b'y + c'z + d' \\ z' = a''x + b''y + c''z + d'' \end{cases}$$

Où $(a', b', c', a, b, c, d, a'', b'', c'', d'')$ sont des nombres réels.

P₂ : Soit f une application affine de l'espace, φ l'application vectorielle associée à f .

- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de w et pour tout nombre réel α , $\varphi(\alpha\vec{u}) = \alpha\varphi(\vec{u})$.
- $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$.

φ est appelé **application linéaire associée à f** .

- Si l'expression analytique de f est :

$$\begin{cases} x' = ax + by + cz + d \\ y' = a'x + b'y + c'z + d' \\ z' = a''x + b''y + c''z + d'' \end{cases}$$

alors l'**application vectorielle associée à f** a pour expression analytique :

$$: \begin{cases} x' = ax + by + cz \\ y' = a'x + b'y + c'z \\ z' = a''x + b''y + c''z \end{cases}$$

❖ Projections

➤ Définitions

Définition 1 : (Projection sur un plan)

Soit (P) un plan de l'espace et (Δ) une droite non parallèle à (P).

On appelle **projection** sur (P) parallèlement à (Δ) l'application p de l'espace dans lui-même qui à tout point M associe M', point d'intersection de (P) avec la parallèle à (Δ) passant par M.

Soit
$$p(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in (P) \\ (MM') // (\Delta) \end{cases}$$

NB : M' est le projeté de M sur (P) parallèlement à (Δ).

Définition 2 : (Projection sur une droite)

Soit (D) une droite de l'espace et (R) un plan non parallèle à (D).

On appelle projection sur (D) parallèlement à (R), l'application q de l'espace dans lui-même qui à tout point M associe M', point d'intersection de (D) avec le plan parallèle à (R) passant par M.

Soit
$$q(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} M' \in (D) \\ (MM') // (R) \end{cases}$$

NB : M' est le projeté de M sur (D) parallèlement à (R) .

➤ Propriétés

P₁ : Soit p la projection sur un plan (P) sur un plan (P) parallèlement à une droite (Δ) .

- L'image de l'espace $\mathcal{E}$ par p est (P) .
- L'ensemble des **antécédents** par p d'un point M' de (P) est la parallèle à (Δ) passant par M' .
- L'ensemble des **points invariants** par p est le plan (P) .

P₁ : Soit q la projection sur une droite (D) parallèlement à un plan (R) .

- L'image de l'espace $\mathcal{E}$ par q est (D) .
- L'ensemble des **antécédents** par q d'un point M' de (D) est le plan parallèle à (R) passant par M' .
- L'ensemble des **points invariants** par q est la droite (D) .

➤ Autres propriétés

♣ Conservation du coefficient de colinéarité.

Soit A, B, C trois points de l'espace et A', B', C' leurs images respectives par une projection.

S'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, alors on a : $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$.

En conséquence, **toute projection** de l'espace **est une application affine**.

Remarque :

Soit A, B, C, D, I des points de l'espace et A', B', C', D', I' leurs images respectives par une projection.

☞ Si I est le milieu de $[AB]$, alors I' est le milieu de $[A'B']$.

☞ Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

☞ Toute projection de l'espace admet une application linéaire associée, appelée **projection vectorielle**.

☞ Si p est la projection sur un plan de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, parallèlement à une droite de vecteur directeur $\vec{w}$, alors l'application linéaire associée est l'application ϕ de W dans W telle que : $\phi(\vec{u})=\vec{u}$, $\phi(\vec{v})=\vec{v}$ et $\phi(\vec{w})=\vec{0}$.

☞ De même, si q est la projection sur une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ parallèlement à un plan de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, alors l'application linéaire associée est l'application δ de W dans W telle que : $\delta(\vec{u})=\vec{u}$, $\delta(\vec{v})=\vec{v}$ et $\delta(\vec{w})=\vec{0}$.

♣ Image d'une droite, d'un plan

P₁ : Soit p une projection, (AB) une droite, A' et B' les images respectives de A et B par p .

- Soit $A' \neq B'$, l'image de (AB) par p est la droite $(A'B')$.
- Si $A' = B'$, l'image de (AB) par p est le singleton $\{A'\}$.

Remarque :

☞ L'image d'un segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ ou le singleton $\{A'\}$.

☞ L'image d'une demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$ ou le singleton $\{A'\}$.

P₁ : Soit p une projection, (AB) et (CD) deux droites parallèles.

Si l'image de (AB) par p est une droite $(A'B')$, alors l'image de (CD) par p est une droite $(C'D')$ parallèle à $(A'B')$.

P₃ :

- Soit p la projection sur un plan (P) parallèlement à une droite (Δ).

L'image par p d'un plan parallèle à (Δ) est la droite d'intersection de ce plan avec (P).

- Soit q la projection sur une droite (D) parallèlement à un plan (R).

L'image par q d'un plan parallèle à (R) est le point d'intersection de ce plan avec (D).

➤ Expression analytique d'une projection.

On ne donne l'expression analytique d'une projection que dans les cas particuliers où le plan (ou la droite) de projection et la direction de projection sont parallèles aux plans ou axes du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Propriétés

L'espace est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- L'expression analytique de la projection sur le plan (P) d'équation $z=c$, parallèlement à une droite (Δ) de vecteur

$$\text{directeur } \vec{k} \text{ est : } \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

- L'expression analytique de la projection sur la droite (D) de système d'équations $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$, parallèlement à un plan (R) de

$$\text{vecteurs directeurs } \vec{i} \text{ et } \vec{j} \text{ est : } \begin{cases} x' = a \\ y' = b \\ z' = z \end{cases}$$

Retenons

En général, on détermine l'expression analytique d'une projection à partir de sa direction et du plan « cible » ou de la droite « cible » tel que le systématisent les définitions 1 et 2. Cependant, on peut également déterminer cette expression

analytique à partir de l'application vectorielle qui lui est associée. Il suffit de remarquer qu'une projection est une application affine et d'utiliser la forme générale de l'expression analytique des applications affines, associées aux données de l'exercice pour arriver à bon port...

II. Translations et homothéties

❖ Translations

➤ Définition et propriété caractéristique.

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'ensemble vectoriel W .

On appelle **translation** de vecteur $\vec{u}$, et on note $t_{\vec{u}}$, l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Propriété

Soit f une application de l'espace dans lui-même.

f est une **translation** si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

➤ Translations et configurations

Soit t une translation.

- L'image de la droite de repère $(A; \vec{u})$ est la droite de repère $(t(A), \vec{u})$.
- L'image du plan de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est le plan de repère $(t(A), \vec{u}, \vec{v})$.
- L'image d'une figure plane est une figure de même nature et de mêmes dimensions.
- L'image d'un solide de l'espace est un solide de même nature et de même dimensions.

➤ **Expression analytique d'une translation**

Propriété

L'espace est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

L'expression analytique de la translation de

$$\text{vecteur } \vec{u}(a, b, c) \text{ est : } \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$$

➤ **Composée de deux translations**

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de W .

La composée $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ des translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

$$\text{Soit } t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u} + \vec{v}}.$$

Remarque :

☞ La loi $\circ$ est une loi de composition interne dans l'ensemble (T) des translations de l'espace.

☞ Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de W , on a : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; donc $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$.

La composition des translations est commutative.

☞ La composition des translations est associative.

☞ $t_{\vec{0}}$ est l'élément neutre de (T) pour la loi $\circ$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de W , on a :

$$t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = \text{IdE} ; t_{\vec{u}} \text{ est donc une transformation de l'espace et } (t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}.$$

On en déduit que $(T, \circ)$ est un groupe commutatif.

❖ **Homothétie**

➤ **Définition et propriété caractéristique.**

Définition

Soit O un point de l'espace et k un nombre réel non nul.

On appelle **homothétie** de centre O et de rapport k et on note $h_{(O,k)}$ où h l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : $\vec{OM'} = k\vec{OM}$.

Remarque :

- ☞ Si $k=1$, h est l'application identique et tous les points de l'espace sont invariants.
- ☞ Si $k \neq 1$, O est le seul point invariant.
- ☞ Si $k=-1$, h est la symétrie de centre O.

Propriété

Soit f une application de l'espace dans lui-même, k un nombre réel différent de 0 et 1.

f est une **homothétie** si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a : $\vec{M'N'} = k\vec{MN}$.

Remarque :

- ☞ Toute **homothétie** de l'espace est une **application affine**.
- ☞ L'application linéaire associée à une **homothétie** h de rapport k ($k \neq 1$) est l'application de W dans W appelée homothétie vectorielle, qui à tout vecteur $\vec{u}$ associe le vecteur $k\vec{u}$.

Une homothétie de rapport k multiplie les **distances par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.**

➤ **Homothéties et configurations**

Soit h une homothétie de rapport k .

- L'image de la droite de repère $(A; \vec{u})$ est la droite de repère $(h(A), \vec{u})$.
- L'image du plan de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est le plan de repère $(h(A), \vec{u}, \vec{v})$.

- L'image d'une figure plane est une figure de même nature .
- L'image d'un solide de l'espace est un solide de même nature.

➤ **Expression analytique d'une homothétie.**

Propriétés

L'espace est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

P₁ : L'expression analytique de l'homothétie de centre $I(a; b; c)$ et de rapport k

$$\text{est : } \begin{cases} x' = kx + (1 - k)a \\ y' = ky + (1 - k)b \\ z' = kz + (1 - k)c \end{cases}$$

P₂ : Soit p, q et r trois nombres réels, k un nombre réel non nul et f l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ tels

$$\text{que : } \begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \\ z' = kz + r \end{cases}$$

- Si $k=1$, f est la translation de vecteur $\vec{u}(p, q, r)$.
- Si $k \neq 1$, f est une homothétie de rapport k .

➤ **Composée de translations et d'homothétie.**

Propriétés

P₁ : Soit h et h' deux homothéties de centre O et de rapports respectifs k et k' .

hoh' est l'homothétie **de centre O** et de rapports **kk'**.

Remarque :

On a : $h'_{(0,k)} \circ h_{(0,k)} = h_{(0,kk')}$.

☞ Si $kk' = 1$, alors $h' \circ h$ est l'application identique.

☞ Si $kk' = -1$, alors $h' \circ h$ est la symétrie de centre O .

P₂ : Soit h et h' deux homothéties de rapports respectifs k et k' .

- Si $kk' \neq 1$, alors $h' \circ h$ est une homothétie de rapport kk' .
- Si $kk' = 1$, alors $h' \circ h$ est une translation.

NB :

- ➡ Le centre de l'homothétie dans ce cas est le point invariant de $h' \circ h$.
- ➡ Le vecteur de la translation dans le second cas est le vecteur formé par l'image de deux points par $h' \circ h$.

P₃ : Soit h une homothétie de rapport k différent de 1 et t une translation.

hot et **toh** sont des **homothéties de rapport k**.

III. Symétries orthogonales.

Nous distinguons deux symétries orthogonales : **la réflexion et le demi-tour**.

❖ **Réflexions**

➤ **Plan médiateur d'un segment.**

Soit A et B deux points distincts de l'espace et I le milieu de $[AB]$.

Le **plan médiateur** du segment $[AB]$ est le plan passant par le **milieu** du segment $[AB]$ et qui est **orthogonal** à ce segment.

➤ **Définition et propriétés**

Définition.

Soit (P) un plan de l'espace.

On appelle **réflexion de plan (P)** et on note S_P l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que :

- Si $M \in (P)$, alors $M=M'$.
- Si $M \notin (P)$, alors (P) est le **plan médiateur de $[MM']$** .

NB : Une réflexion de plan (P) est aussi appelée **symétrie orthogonale par rapport à (P)**.

Remarque :

- ☞ L'ensemble des points invariants par S_P est le plan (P).
- ☞ Si H est le projeté orthogonal de M sur (P) et si $M'=S_P(M)$, alors $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MH}$.
- ☞ Si $M'=S_P(M)$, alors $M=S_P(M')$. On dit que M et M' sont symétriques par rapport à (P).
- ☞ Pour tout plan (P), on a $S_P \circ S_P = \text{Id}_E$; S_P est donc une transformation de l'espace et $(S_P)^{-1}=S_P$

Propriétés

Soit (P) un plan et S_P la réflexion de plan (P).

- Si (Q) est un plan perpendiculaire à (P) et (Δ) leur droite d'intersection, alors :
 - ✓ (Q) est globalement invariant par (S_P) .
 - ✓ La restriction de (S_P) à (Q) est la symétrie orthogonale d'axe (Δ).
- Si (D) est une droite orthogonale à (P) en un point I, alors :
 - ✓ (D) est globalement invariant par S_P .
 - ✓ La restriction de S_P à (D) est la symétrie de centre I.

Remarque

- ☞ Toute réflexion de l'espace est une application affine.

☞ Soit S la réflexion de plan (P) de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{w}$ un vecteur normal à (P). **L'application linéaire associée à S** est l'application ϕ de W dans W telle que : $\phi(\vec{u})=\vec{u}$, $\phi(\vec{v})=\vec{v}$ et $\phi(\vec{w})=-\vec{w}$.

➤ Réflexions et configurations

- Toute réflexion transforme les droites(respectivement les plans) en droites (respectivement en plans) en conservant parallélisme et orthogonalité.
- L'image d'une figure plane par une réflexion est une figure de même nature et de mêmes dimensions.
- L'image d'un solide de l'espace par une réflexion est un solide de même nature et de mêmes dimensions.

➤ Expressions analytique d'une réflexion.

On ne donne l'expression analytique d'une réflexion de plan (P) que lorsque celui-ci est perpendiculaire à l'un des axes du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Propriété

L'espace est muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

L'expression analytique de la réflexion de

$$\text{plan (P) d'équation } z=c \text{ est : } \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z + 2c \end{cases}$$

➤ Composée de deux réflexions de plans parallèles.

Propriétés

- La composée de deux réflexions de plans parallèles est une **translation** de vecteur normal à ces deux plans.

- **Toute translation** de vecteur $\vec{u}$ est la composée de deux réflexions de plans parallèles ayant pour vecteur normal $\vec{u}$.

❖ **Demi-tours.**

➤ **Définition et propriétés**

Définition

Soit (Δ) une droite de l'espace.

On appelle **demi-tour** d'axe (Δ) , et on note S_Δ , l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que :

- Si $M \in (\Delta)$, alors $M' = M$.
- Si $M \notin (\Delta)$, alors (Δ) est la **médiatrice** de $[MM']$.

NB : Un demi-tour d'axe (Δ) est aussi appelé **symétrie orthogonale par rapport à (Δ)** .

Remarques

- ☞ L'ensemble des points invariants par S_Δ est la droite (Δ) .
- ☞ Si H est le projeté orthogonal de M sur (Δ) et si $M' = S_\Delta(M)$, alors $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$.
- ☞ Si $M' = S_\Delta(M)$, alors $M = S_\Delta(M')$. On dit que M et M' sont symétriques par rapport à (Δ) .
- ☞ Pour toute droite (Δ) , on a $S_\Delta \circ S_\Delta = \text{Id}_E$; S_Δ est donc une transformation de l'espace et $(S_\Delta)^{-1} = S_\Delta$.

Propriétés

P₁ : Soit (Δ) une droite de l'espace, S_Δ le demi-tour d'axe (Δ) et (P) un plan orthogonal à (Δ) en I.

- (P) est globalement invariant par S_Δ .
- La restriction de S_Δ à (P) est la symétrie de centre I.

P₂ :

- La **composée de deux réflexions** de plans perpendiculaires suivant une droite (Δ) est le **demi-tour d'axe (D)**.
- **Tout demi-tour d'axe (Δ)** est la composée de deux réflexions de plans perpendiculaires suivant la droite (Δ) .

Remarque

- ☞ Tout demi-tour de l'espace est une application affine.
- ☞ Soit S le demi-tour d'axe (Δ) de vecteur directeur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs non colinéaires et orthogonaux à $\vec{u}$.
L'application linéaire associée à S est l'application ϕ de W dans W telle que :
 $\phi(\vec{u}) = \vec{u}$, $\phi(\vec{v}) = -\vec{v}$ et $\phi(\vec{w}) = -\vec{w}$.

➤ **Demi-tours et configurations**

- Tout demi-tour transforme les droites(respectivement les plans) en droites (respectivement en plans) en conservant parallélisme et orthogonalité.
- L'image d'une figure plane par un demi-tour est une figure de même nature et de mêmes dimensions.
- L'image d'un solide de l'espace par un demi-tour est un solide de même nature et de mêmes dimensions.

➤ **Expressions analytique d'une réflexion.**

On ne donne l'expression analytique d'un demi-tour d'axe (Δ) que lorsque celui-ci est parallèle à l'un des axes du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Propriété

L'espace est muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

L'expression analytique du demi-tour ayant pour système d'équations $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ est :

$$\begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b \\ z' = z \end{cases}$$

➤ Composée de deux demi-tours Propriétés

P₁ :

- La composée de deux demi-tours d'axes parallèles est une translation de vecteur orthogonal à ces deux axes.
- Toute translation de vecteur $\vec{u}$ non nul est la composée de deux demi-tours d'axes parallèles ayant $\vec{u}$ pour vecteur orthogonal.

P₂ :

- La composée de deux demi-tours d'axes (D) et (D') perpendiculaire en un point A est le demi-tour dont l'axe (Δ) est la perpendiculaire commune à (D) et à (D') en A.
- Tout demi-tour de l'espace est la composée de deux demi-tours d'axes perpendiculaires.

➤ Composée d'un demi-tour et d'une réflexion.

- La composée d'un demi-tour d'axe (Δ) et d'une réflexion de plan (P) tel que (Δ) est orthogonale à (P) en un point A, est la symétrie de centre A.
- Toute symétrie centrale de l'espace est la composée d'un demi-tour et d'une réflexion dont l'axe et le plan **sont orthogonaux**.

Retenons :

♠ Pour démontrer qu'une application de l'espace dans l'espace est une symétrie orthogonale (réflexion ou demi-tour), on peut utiliser le procédé suivant :

- ☞ Déterminer l'ensemble (E) des points invariants ;
- ☞ Démontrer que pour tout point M et son image M' :
 - La droite (MM') est orthogonale à (E).
 - Le milieu K de [MM'] appartient à (E).

♠ De façon générale, on détermine l'expression analytique d'une réflexion et d'un demi-tour à partir respectivement du plan « cible » ou plan de la réflexion et de la droite « cible » ou de l'axe du demi-tour. Cependant, on peut également déterminer ces expressions analytiques à partir des applications vectorielles qui leur sont associées. Il suffit de remarquer qu'une réflexion et un demi-tour sont des applications affines et d'utiliser la forme générale de l'expression analytique des applications affines, associées aux données de l'exercice pour arriver à bon port...

S A n°2 : Organisation des données

CONTENU

Séquence d'apprentissage n°1 : Système d'équations

Séquence d'apprentissage n°2 : Arithmétique

Séquence d'apprentissage n°3 : Nombres Complexes

Séquence d'apprentissage n°4 : Limites et Continuité

Séquence d'apprentissage n°5: Dérivabilité-Etude de fonctions

Séquence d'apprentissage n°6 : Primitives

Séquence d'apprentissage n°7 : Fonction logarithme népérien

Séquence d'apprentissage n°8 : Fonction exponentielle népérienne

Séquence d'apprentissage n°9: Fonctions exponentielles-

Fonctions Puissances

Séquence d'apprentissage n°10: Calcul Intégral

Séquence d'apprentissage n°11: Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Séquence d'apprentissage n° 12: Probabilité

Séquence d'apprentissage n° 13: Suites Numériques

Séquence d'apprentissage n°14: Statistiques

Séquence d'apprentissage n°1 :

Système d'équations

Introduction

Dans les classes antérieures, nous avons appris à résoudre les systèmes d'équations linéaires par diverses méthodes mathématiques selon la taille du système ou le nombre d'inconnues qui s'y trouvent. Parmi ces méthodes, figure la performante méthode du mathématicien Allemand **Carl Friedrich GAUSS**, que nous appelons la méthode du '*pivot de Gauss*', étudiée à partir des classes Premières. D'autres méthodes de résolution des systèmes d'équations existent : on peut citer par exemple '*l'élimination de Gauss-Jordan*' appliquée avec les matrices, la '*décomposition LU*' etc. Nous nous contenterons, dans cette séquence d'apprentissage, d'exposer inclusivement la méthode du '*pivot de Gauss*' et la méthode de résolution par substitution déjà explorée en Troisième.



Karl Friedrich GAUSS, Mathématicien Allemand(1777-1855)

SOMMAIRE

I. Résolution d'un système d'équations par la substitution

II. Résolution de système d'équations par la méthode du pivot de Gauss

Généralités

On considère le système

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont les inconnues. Le système (S) est appelé système de n équations du premier degré (ou système linéaire) à p inconnues. Résoudre (S), c'est déterminer tous les p -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de nombres réels qui vérifient les n équations.

I. Résolution par substitution.

Nous l'exposons par un exemple simple.

Soit à résoudre le système (S) :

$$\begin{cases} x + y - 2z = 7 \quad (E) \\ 2x - y + z = 0 \quad (E') \\ 3x + y + z = 8 \quad (E'') \end{cases}$$

* Cette méthode de résolution consiste à tirer une inconnue d'une des équations et à la remplacer dans une autre équation jusqu'à obtenir un système à deux lignes et à deux inconnues. Et ainsi, on pourra facilement résoudre le système d'équations.

Pour ce système, on déduit de l'équation (E'') que $z = -3x - y - 8$

On remplace z par $-3x - y - 8$ dans les équations (E) et (E').

$$\text{On obtient : } (S) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 3y = 23 \\ -x - 2y = -8 \\ z = -3x - y - 8 \end{cases}$$

Le système $\begin{cases} 7x + 3y = 23 \\ -x - 2y = -8 \end{cases}$ admet un unique couple solution (2 ; 3).

On en déduit que $z = -3 \times 2 - 3 + 8 = -1$

Donc le système (S) a un unique triplet solution (2 ; 3 ; -1).

II. Résolution par le pivot de Gauss.

Cette méthode a été enseignée en classe de première. Nous allons l'exposer ici de manière simple.

Soit à résoudre le système (S) :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, on place en L_1 une ligne où le coefficient de x_1 est non nul (une telle ligne existe et ce coefficient est appelé **pivot**).

En effectuant successivement des **opérations élémentaires**, on transforme le système à résoudre en un système triangulaire supérieur équivalent puis on déduit les solutions du système. On rappelle que les **opérations élémentaires** consistent à **changer une ligne L_i en une autre L_j par multiplication de(s) coefficient(s)** visant à éliminer par combinaison une inconnue. On obtient une nouvelle ligne que l'on écrit dans le système. Les lignes non concernées doivent être réécrites dans le système sans modification.

Retenons

♠ Pour résoudre un système d'équations linéaires par la méthode du pivot de Gauss, il faut faire en sorte pour avoir un **pivot simple**, c'est-à-dire le coefficient qui est associé à x (pour notre système donné, celui de (x_1)). Cela pourrait nous amener à inverser les lignes d'un système d'équations avant de commencer les opérations élémentaires.

♠ Pour démontrer par exemple que trois plans sont sécants en un point, il suffit de rassembler leurs équations cartésiennes respectives dans un système, le dit système qu'on pourra résoudre avec la méthode du pivot de Gauss.

Séquence d'apprentissage n° 2 :

Arithmétique

Introduction

L'étude de l'arithmétique remonte aux Pythagoriciens ; on y mentionne notamment **Euclide**. Dans le temps, les mathématiciens Pythagoriciens qui accordaient une priorité aux nombres s'étaient intéressés à l'étude des entiers naturels $\mathbb{N}$, une étude qui s'étendra au fil du temps à d'autres ensembles tels que les ensembles des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ et des nombres réels $\mathbb{R}$. L'étude de l'arithmétique est aussi rattachée à plusieurs auteurs comme **Pierre de Fermat, Leonhard Euler, Karl Friedrich Gauss, Étienne Bézout, Jacques Hadamard, Tartaglia, Viète, Lagrange, Galois, etc.** De nos jours, l'arithmétique a connu de progrès éclatants et est très utilisée en programmation informatique, en électronique en Cryptographie, etc. L'arithmétique qui est encore actuellement un domaine de recherche très actif, est très passionnante et pour certains, est considérée comme la reine des Mathématiques... Allons à la découverte de l'arithmétique à travers les quatre grands titres ci- dessous.



**Euclide, Mathématicien grec
(IV^e-III^e s av. J.-C.)**



**Etienne Bézout, Mathématicien
Français(1730-1783)**

SOMMAIRE

I. Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

II. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

III. PPCM et PGCD de deux entiers relatifs

IV. Nombres premiers

I. Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ **1.L'ensemble $\mathbb{N}$**

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels. Il est muni de deux opérations : l'addition notée $+$ et la multiplication notée $\times$.

❖ **Propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{N}$.**

- Pour tous nombres entiers naturels a et b , $a + b$ et $a \times b$ sont des entiers naturels ; on dit que l'addition et la multiplication sont des **lois de composition interne**.
- Le tableau ci-après résume les propriétés de $+$ et de $\times$ dans $\mathbb{N}$ où a, b et c désignent des entiers naturels.

Addition dans $\mathbb{N}$	Multiplication dans $\mathbb{N}$
$a + 0 = 0 + a = a$ 0 est un élément neutre pour $+$	$a \times 1 = 1 \times a = a$ 1 est un élément neutre pour $\times$
$a + (b + c) = (a + b) + c$ $+$ est associative	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ $\times$ est associative
$a + b = b + a$ $+$ est commutative	$a \times b = b \times a$ $\times$ est commutative
$a + c = b + c \Rightarrow a = b$ ($c \in \mathbb{N}$)	$a \times c = b \times c \Rightarrow a = b$ ($c \in \mathbb{N}^*$)
$a + b = 0 \Rightarrow a = b = 0$	$a \times b = 1 \Rightarrow a = b = 1$

Remarque :

On a : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

On dit que $\times$ est **distributive par rapport à $+$** .

❖ **Ordre dans $\mathbb{N}$**

On définit dans $\mathbb{N}$ une relation notée $\leq$ par : $\forall (a ; b) \in \mathbb{N}^2, (a \leq b \Leftrightarrow \exists \delta \in \mathbb{N} \text{ tq } b = a + \delta)$.

Les propriétés que possèdent cette relation sont :

- $a \leq a$ (la relation $\leq$ est **réflexive**).
- $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$ (la relation $\leq$ est **antisymétrique**).
- si $a \leq b$ et $b \leq \delta$, alors $a \leq \delta$ (la relation $\leq$ est **transitive**).

NB : Deux entiers naturels a et b sont toujours comparables, c'est-à-dire on a toujours : $a \leq b$ ou $b \leq a$; on dit que $\leq$ dans $\mathbb{N}$ est une relation **d'ordre total**.

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

❖ **Raisonnement par récurrence**

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on procède en deux étapes :

1ere étape : on vérifie que la proposition est vraie pour tout entier naturel $n = n_0$.

2eme étape : on suppose par la suite qu'il existe un entier k quelconque tel que la proposition est vraie et sous cette hypothèse dite « **hypothèse de récurrence** », on démontre que la proposition est vraie au rang suivant $k+1$.

Ainsi, on conclut que la proposition est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

2.L'ensemble $\mathbb{Z}$

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs.

❖ **Propriétés de l'addition dans $\mathbb{Z}$**

Pour tous entiers relatifs a, b et c ,

① $a+b \in \mathbb{Z}$ (on dit que $+$ est **interne** dans $\mathbb{Z}$).

② $a + (b + c) = (a + b) + c$

(on dit que $+$ est **associative**).

③ $a + 0 = 0 + a = a$

(on dit que **0** est un **élément neutre pour l'addition**).

④ il existe $a' \in \mathbb{Z}$ tel que $a + a' = a' + a = 0$
(on dit que **tout élément de $\mathbb{Z}$ a un symétrique pour la loi $+$ dans $\mathbb{Z}$**).

Dans le cas de $\mathbb{Z}$, a' est l'opposé de a .

⑤ $a + b = b + a$

(on dit que la **loi $+$ est commutative**).

Plus généralement, un ensemble muni d'une loi de composition interne est un groupe lorsque :

- La loi est associative,
- L'ensemble possède un élément neutre pour cette loi,
- Tout élément de l'ensemble admet un symétrique pour cette loi dans cet ensemble. Ce groupe est commutatif si de plus la loi est commutative.

➤ Notion de sous-groupe

- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.
- $\mathbb{Z} \neq \emptyset$ (car $0 \in \mathbb{Z}$).
- Tout élément de $\mathbb{Z}$ a son symétrique pour la loi $+$ dans $\mathbb{Z}$. **On dit que $(\mathbb{Z}; +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.**
- Généralement, un sous-ensemble $E \subset F$ muni d'une loi de composition interne est un sous-groupe de F muni de la même loi lorsque :
 - ✓ $E \neq \emptyset$
 - ✓ Tout élément de E a son symétrique pour cette loi dans E .

Remarque : Tout sous-groupe est un groupe.

❖ Propriétés de la multiplication dans $\mathbb{Z}$

⑥ $a \times b \in \mathbb{Z}$ ($\times$ est interne dans $\mathbb{Z}$).

⑦ $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

($\times$ est associative dans $\mathbb{Z}$).

⑧ $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

(on dit que $\times$ est distributive par rapport à $+$).

⑨ $a \times b = b \times a$

⑩ $a \times 1 = 1 \times a = a$

Pour résumer les propriétés ①, ②, ③, ④, ⑤ et les propriétés ⑥, ⑦, ⑧, ⑨ et ⑩ de la multiplication, on dit que **$(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire**.

Généralement, un ensemble E muni de deux lois de composition interne (par exemple $*$ et $\perp$) est un anneau lorsque :

- $E(*; \perp)$ est un groupe abélien,
- $\perp$ est associative,
- $\perp$ est distributive par rapport à $*$ (à gauche et à droite).

On dit que $E(*; \perp)$ est un anneau.

NB :

- ✓ Cet anneau est **commutatif** si la loi $\perp$ est commutative.
- ✓ Cet anneau est **unitaire** s'il existe dans E un élément neutre pour la loi $\perp$
- ✓ Dans un anneau, s'il existe deux éléments $a, b \neq 0$ tel que $ab = 0$, on dit que les éléments a et b sont des **diviseurs de 0**. Un anneau sans diviseurs de 0 est un **anneau intègre**.
- ✓ Tout élément a d'un anneau tel qu'il existe un élément a' de cet anneau vérifiant **$aa' = 1$** est un élément **inversible** dans cet anneau.

Propriétés

Pour tous entiers relatifs a, b et c ,

- $(a + c = b + c) \Leftrightarrow a = b$.
- $a \times 0 = 0$.
- $c \times a = c \times b \Leftrightarrow a = b$ ($c \neq 0$).

❖ Ordre dans $\mathbb{Z}$

On définit dans $\mathbb{Z}$ une relation notée $\leq$ par : $\forall (a ; b) \in \mathbb{Z}^2, (a \leq b \Leftrightarrow \exists \delta \in \mathbb{Z} / b = a + \delta)$.

Les propriétés que possèdent cette relation sont :

- $a \leq a$ (la relation $\leq$ est **réflexive**).
- $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$ (la relation $\leq$ est **antisymétrique**).
- $a \leq b$ et $b \leq \delta$, alors $a \leq \delta$ (la relation $\leq$ est **transitive**).
- Pour tout entier relatif a et b , on a : $a \leq b$ ou $b \leq a$; on dit que $\leq$ dans $\mathbb{Z}$ est une relation **d'ordre total**.

➤ Propriétés

P₁ : Soit a et b deux entiers relatifs.

- Pour tout entier relatif c ,
 $(a \leq b) \Leftrightarrow (a + c \leq b + c)$.
- Pour tout entier relatif $c > 0, (a \leq b) \Leftrightarrow (a \times c \leq b \times c)$.

P₂ : Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.

P₃ : Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.

P₄ : Soit a et b deux entiers relatifs et $b \neq 0$. Il existe un entier relatif n tel que : **$nb \geq a$** .

On dit que $\mathbb{Z}$ est **archimédien**.

❖ Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ **➤ Propriétés**

Soit a et b deux entiers relatifs tels que : $b \neq 0$. Il existe un unique couple $(q ; r)$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que : **$a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$** .

Les nombres q et r s'appellent respectivement **quotient** et **reste** de la division euclidienne de a par b . Effectuer une division euclidienne, c'est déterminer son quotient et son reste.

❖ Numération**➤ Propriétés**

Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 2. Tout entier naturel x non nul peut s'écrire de façon unique $\sum_{k=0}^p a_k b^k$ où les a_k sont des entiers naturels tels que **$0 \leq a_k < b$ et $a_p \neq 0$** .

On écrit $x = \overline{a_p a_{p-1} \dots a_2 a_1 a_0}^b$. Cette écriture est appelée **écriture de x en base b** . Par convention, les écritures sans « barre » sont en **base 10**.

➤ Détermination de l'écriture d'un entier x en base b

$$\begin{aligned} x &= \overline{a_p a_{p-1} \dots a_2 a_1 a_0}^b \\ &= a_p b^p + a_{p-1} b^{p-1} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0. \end{aligned}$$

On a : $x = b(a_p b^{p-1} + a_{p-1} b^{p-2} + \dots + a_2 b + a_1) + a_0$ avec $0 \leq a_0 < b$.

On déduit de cette égalité que $q_0 = \overline{a_p a_{p-1} \dots a_2 a_1}^b$ et a_0 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de x par b .

$$q_0 = b(a_p b^{p-2} + a_{p-1} b^{p-3} + \dots + a_2) + a_1$$

avec $0 \leq a_1 < b$.

Donc $q_1 = \overline{a_p a_{p-1} \dots a_2}^b$ et a_1 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de q_0 par b . On détermine

ainsi de proche en proche l'écriture de x en base b .

➤ Système binaire

Le système binaire est constitué des chiffres $\{0; 1\}$ et l'écriture est en base 2.

➤ Le système hexadécimal

Il s'agit de la base 16. L'ensemble des chiffres utilisés est :

$\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; A; B; C; D; E; F\}$
où $\{A; B; C; D; E; F\}$ représentent respectivement 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15.

II. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

1. Multiples et diviseurs d'un entier relatif

❖ Définition et propriétés

➤ Définition

Soit a et b deux entiers relatifs. On dit que a est multiple de b s'il existe un entier relatif k tel que : $a = kb$.

Si de plus $b \neq 0$, on dit que b est un diviseur de a ou que b divise a .

Remarque :

- ✓ Tout entier relatif est multiple de 1 et -1. 1 et -1 divisent tout entier relatif.
- ✓ 0 est multiple de tout entier relatif. Tout entier relatif non nul divise 0, mais 0 ne divise aucun entier relatif.
- ✓ Lorsque $b \neq 0$, a est multiple de b (ou b divise a) si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

➤ Propriétés

P₁ : Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. Si b divise a , alors $|b| \leq |a|$.

P₂ : Soit a, b et c trois entiers relatifs

$(a \neq 0, b \neq 0)$.

- a divise a .
- Si a divise b et b divise a , alors $a = b$ ou $a = -b$.
- Si a divise b et b divise c , alors a divise c .

P₃ : Soit a, b et c trois entiers relatifs ($a \neq 0$).

Si a divise b et c , alors pour tous entiers relatifs p et q , a divise $pb+qc$.

On dit dans ce cas que a divise toute combinaison linéaire de b et c dans $\mathbb{Z}$.

❖ Détermination de l'ensemble des multiples d'un entier relatif

Soit $a \in \mathbb{Z}^*$. Un multiple de a est de la forme $ak, k \in \mathbb{Z}$. L'ensemble des multiples de a peut être noté $a\mathbb{Z}$.

➤ Propriétés

P₁ : Soit a un entier naturel. $(a\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.

P₂ : Pour tout entier naturel non nul n , $(n\mathbb{Z}; +, \times)$ est un anneau commutatif. Pour la preuve, il suffit de démontrer que, $(n\mathbb{Z}; +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Z}; +, \times)$, que $(n\mathbb{Z}; +)$ est un groupe abélien et que $\times$ est stable dans $n\mathbb{Z}$.

❖ Ensemble des diviseurs d'un entier relatifs.

Soit a un entier relatif. On note $\mathcal{D}(a)$ l'ensemble des diviseurs de a .

Pour tout entier relatif a non nul, $\mathcal{D}(a)$ est ensemble fini non vide.

Remarque :

Pour déterminer à cette étape l'ensemble des diviseurs d'un entier relatif, on peut d'abord déterminer ses diviseurs positifs et en déduire

par la suite ses diviseurs négatifs. Pour le faire, on fait une décomposition à son choix de l'entier en question puis on trouve les diviseurs positifs de chaque diviseur positif de l'entier dans la décomposition et par un simple développement des produits de la somme de ces sous-diviseurs, on retrouve tous les diviseurs positifs.

Exemple :

Soit à déterminer les diviseurs de 60.

On a : $60 = 3 \times 2 \times 10$.

- 3 a pour diviseurs positifs 1 et 3
- 2 a pour diviseurs positifs 1 et 2
- 10 a pour diviseurs positifs 1, 2, 5 et 10.

Ainsi, l'ensemble des diviseurs positifs de 60 est :

$(1+3)(1+2)(1+2+5+10) = 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60$.

Attention : Ici, il ne s'agit pas de faire la somme des termes développés. On fait le développement et on relève juste les entiers que ça contient **sans faire leur addition**.

De là, on peut déduire que

$D(60)$ est l'ensemble de ses diviseurs positifs et leurs opposés.

Retenons :

☞ Un nombre est divisible par :

- 2 s'il est paire ie se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8.
- 3 si la somme des chiffres qui le composent est multiple de 3.
- 4 si les deux derniers chiffres forment un nombre multiple de 4 ou lorsque sa division par 2 donne un nombre paire.
- 5 s'il est terminé par 0 ou par 5.
- 6 s'il est divisible par 2 et 3.
- 8 si le résultat de sa division par 4 est pair.

- 9 si la somme des chiffres qui le composent est multiple de 9.
- 10 s'il est divisible par 5 et par 2.
- 11 si la somme « alternée par + et - » partant de l'unité donne un nombre multiple de 11. (*Par exemple, pour montrer que 638 est divisible par 11, il suffit de remarquer que la somme « alternée » : $+8 - 3 + 6 = 11$, est multiple de 11 et que donc 11 divise 638*).
- 14 s'il est divisible par 7 et par 2.
- 15 s'il est divisible par 3 et 5.
- ☞ Pour démontrer dans $\mathbb{Z}$ que X (une suite d'entiers ou un entier) est divisible par Y (une suite d'entiers ou un entier) on peut, selon le cas :
 - ✓ Faire directement une division euclidienne,
 - ✓ Faire le tableau de congruence modulo en se prononçant sur les restes des divisions euclidiennes,
 - ✓ Faire un raisonnement par récurrence.
 - ✓ Utiliser les propriétés de divisibilité dans $\mathbb{Z}$
- ☞ Le produit de deux entiers consécutifs est toujours divisible par 2. Par exemple : $(n+1)(n+2) ; n(n+1)$ etc.

2. Application à la congruence modulo n.

❖ Définition et Propriétés

➤ Définition

Soit n un entier naturel et a et b deux entiers relatifs.

On dit que **a est congru à b modulo n** si et seulement si $a - b \in n\mathbb{Z}$.

On écrit : $a \equiv b[n]$ et on lit **a congru à b modulo n** .

Remarque :

$$a \equiv b[n] \Leftrightarrow a - b \in n\mathbb{Z}.$$

$$\text{Donc } a - b = nq \Rightarrow a = nq + b, q \in \mathbb{Z}.$$

b est le reste de la division euclidienne de a par n si $b < n$.

NB :

➔ $a \equiv b[n]$ signifie que a et b ont le même reste dans leur division euclidienne par n .

➔ Rien n'interdit qu'on écrive $a \equiv b[n]$ avec $b > n$ ou $a \equiv b[n]$ avec $b < 0$ (par exemple $3 \equiv 10[7]$ et $5 \equiv -1[6]$) ; l'idéal est que $b - a$ ou $a - b$ soit multiple de n et dans ce cas, comme $b > n$ ou $b < 0$, il n'est pas le reste de la division euclidienne de a par n .

❖ **Notion de classe**

Soit a un entier relatif. On appelle classe de a pour la relation de congruence modulo n , le sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ constitué des entiers relatifs qui sont congrus à a modulo n . Ce sous-ensemble est noté $\bar{a}$ ou $\text{cl}(a)$ ou $\bar{a}$.

L'ensemble de toutes les classes pour la relation de congruence modulo n est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et on lit : « $\mathbb{Z}$ quotient $n\mathbb{Z}$ ».

➤ **Propriétés**

P₁ : Soit n un entier naturel non nul, a et a' deux entiers relatifs, r et r' les restes respectifs des divisions euclidiennes de a et a' par n . On a : $a \equiv a'[n] \Leftrightarrow r = r'$.

P₂ : Soit n un entier naturel non nul, a' , a ; b et b' des entiers relatifs.

- Si $a \equiv a'[n]$ et $b \equiv b'[n]$ alors

$$a + b \equiv a' + b'[n]$$
- Si $a \equiv a'[n]$ et $b \equiv b'[n]$ alors

$$a \times b \equiv a' \times b'[n]$$

P₃ : On définit dans l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ deux opérations $\dot{+}$ et $\dot{\times}$ par :

Pour tous $\dot{a}$ et $\dot{b}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,

- $\dot{a} \dot{+} \dot{b} = \overbrace{a + b}^{\text{reste}}$
- $\dot{a} \dot{\times} \dot{b} = \overbrace{a \times b}^{\text{reste}}$

(1) Avec les opérations $\dot{+}$ et $\dot{\times}$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ est un anneau commutatif et unitaire.

(2) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si n est premier.

(3) $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \Leftrightarrow$ il existe r ($0 \leq r < n$) tel que : $a \equiv r[n]$. Or $a \equiv r[n] \Leftrightarrow a = nq + r$, donc $r \in \{0; 1; \dots; \overbrace{n-1}^{\text{reste}}\}$.

Ainsi, les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont :

$$\{\dot{0}; \dot{1}; \dots; \overbrace{\dot{n-1}}^{\text{reste}}\}.$$

Retenons :

♠ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps signifie simplement que c'est l'opération « $\div$ » qui cause problème. Pour justifier que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps, il suffit de prouver que n est premier. (Voir cours section III).

♠ Pour résoudre simplement l'équation $ax \equiv b[p]$ où x est l'inconnue, il faut chercher un entier y tel que l'équation $ax \equiv b[p]$ équivaille à $ax \equiv ay[p]$. On déduit par la suite que $x \equiv y[p]$.

Par exemple, pour résoudre $2x \equiv 3[7]$ dans $\mathbb{Z}$, il suffit de remarquer que $10 \equiv 3[7]$ et que $10 = 2 \times 5$. De là, on a : $2x \equiv 2 \times 5[7]$.

On déduit que $x \equiv 5[7]$

Soit $x = 7k + 5, k \in \mathbb{Z}$.

II. PPCM et PGCD de deux entiers relatifs**1. PPCM de deux entiers relatifs**❖ **Définition et Propriétés**

➤ **Définition**

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. On appelle plus petit commun multiple de a et b et on note $\text{PPCM}(a ; b)$, le plus petit élément strictement positif de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

Remarque :

- ✓ Pour tous entiers relatifs non nuls a et b , on a : $\text{PPCM}(a ; b) = \text{PPCM}(|a| ; |b|)$. Dans une recherche de PPCM, on peut donc se ramener à la recherche du PPCM de deux entiers naturels non nuls.
- ✓ Pour tous entiers naturels non nuls a et b , on a : $\text{Max}(a ; b) \leq \text{PPCM}(a ; b) \leq ab$.
- ✓ Pour tous entiers naturels non nuls a et b , on a : $\text{PPCM}(a ; b) = a \Leftrightarrow a \in b\mathbb{Z}$.

➤ **Propriétés**

P₁ : Soit a et b deux entiers naturels non nuls et μ leur PPCM. On a : $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mu\mathbb{Z}$.

P₂ : Soit a , b et k trois entiers naturels non nuls. On a : $\text{PPCM}(ka ; kb) = k\text{PPCM}(a ; b)$.

2. PGCD de deux entiers relatifs.❖ **Définition et propriétés**➤ **Définition**

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

On appelle plus grand commun diviseur de a et b et on note $\text{PGCD}(a ; b)$ ou $\text{pgcd}(a ; b)$ le plus petit entier naturel non nul de l'ensemble $|a|\mathbb{Z} + |b|\mathbb{Z}$ ou le plus grand élément de $D(a ; b)$.

On écrit aussi que : $\text{PGCD}(a ; b) = a \wedge b$.

Remarque :

- ✓ Pour tous entiers relatifs non nuls a et b , on a : $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(|a| ; |b|)$. Dans une recherche de PGCD, on peut donc se

ramener à la recherche du PGCD de deux entiers naturels non nuls.

- ✓ Pour tous entiers naturels a et b , on a : $1 \leq \text{PGCD}(a ; b) \leq \text{Min}(a ; b)$.
- ✓ Pour tous entiers naturels non nuls a et b , on a : $\text{PGCD}(a ; b) = b \Leftrightarrow b \in D(a)$.

➤ **Propriétés**

P₁ : L'ensemble des diviseurs communs de a et b est l'ensemble des diviseurs de leur PGCD. Soit

$$D(a ; b) = D(\text{PGCD}(a ; b)).$$

P₂ : Soit a , b et k trois entiers naturels non nuls. On a : $\text{pgcd}(ka ; kb) = k\text{pgcd}(a ; b)$.

P₃ : Soit a et b deux entiers naturels et δ leur PGCD.

Un entier relatif m est multiple de δ si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que :

$$m = au + bv.$$

❖ **Algorithme d'Euclide.**➤ **Propriétés**

P₁ : Soit a et b deux entiers naturels non nuls et r le reste de la division euclidienne de a par b .

- Si $r=0$ alors $D(a ; b) = D(b)$.
- Si $r \neq 0$ alors $D(a ; b) = D(b ; r)$.

P₂ : Soit a et b deux entiers naturels tels que $a > b > 0$ et r le reste de la division euclidienne de a par b .

- Si $r=0$, alors $\text{PGCD}(a ; b) = b$.
- Si $r \neq 0$, alors $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(b ; r)$.

P₃ : Si a et b sont deux entiers relatifs distincts et tous non nul, alors

$$\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(a - b ; b).$$

3. Nombres premiers entre eux.

❖ Définition et propriétés

➤ Définition

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. On dit que a et b sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.

Les seuls diviseurs communs de a et b sont alors 1 et -1.

Remarque :

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et d un diviseur commun à a et b . On a : $a = da'$; $b = db'$ et $\text{PGCD}(a ; b) = d \text{PGCD}(a' ; b')$. d est le PGCD de a et b si et seulement si a' et b' sont premiers entre eux.

➤ Théorème de Bézout

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que :

$$au + bv = 1.$$

➤ Théorème de Gauss.

Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls. Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c .

Conséquences

Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls.

- Si a et b sont premiers entre eux et si a et c sont premiers entre eux, alors **a et bc sont premiers entre eux.**
- Si a et b divisent c et si a et b sont premiers entre eux, alors **ab divise c .**

- Si a et b sont premiers entre eux, alors

$$\text{PPCM}(a ; b) = ab.$$

➤ Propriété

Soit n un entier naturel non nul et a, b et c trois entiers relatifs ($a \neq 0$).

Si a est premier avec n et si $ab \equiv ac[n]$, alors $b \equiv c[n]$.

❖ Relation entre le PGCD et le PPCM de deux entiers naturels.

Soit a et b deux entiers naturels non nuls, δ leur PGCD et μ leur PPCM.

$$\text{On a : } \delta \times \mu = ab.$$

❖ Résolution des équations de type $ax + by = c$ dans $\mathbb{Z}^2$

Soit à résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation

(E) : **$ax + by = c$** où a, b et c sont des entiers relatifs non nuls.

Soit $\delta = \text{PGCD}(a ; b)$ donc $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$ avec $\text{PGCD}(a' ; b') = 1$.

$$(E) \Leftrightarrow \delta(a'x + b'y) = c.$$

- Si **δ ne divise pas c** , alors (E) **n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$**
- Si **δ divise c** , alors (E) **admet de solution dans $\mathbb{Z}^2$** .

Il existe $c' \in \mathbb{Z}$ tel que : $c = \delta c'$.

$$(E) \Leftrightarrow a'x + b'y = c'.$$

On a : $a' \wedge b' = 1$, d'après Bézout, il existe $(u ; v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que : $a'u + b'v = 1$.

On a : $c' = a'(c'u) + b'(c'v)$ donc $x_0 = c'u$ et $y_0 = c'v$.

Soit $(x_0; y_0)$ est une solution particulière de (E). On a : $a'x_0 + b'y_0 = a'x + b'y \Leftrightarrow a'(x - x_0) = b'(y_0 - y)$;

a' divise $b'(y_0 - y)$ et $a' \wedge b' = 1$ donc a' divise $y_0 - y \Rightarrow y_0 - y = ka', k \in \mathbb{Z}$. Soit $y = y_0 - ka'$.

En remplaçant y dans l'égalité $a'(x - x_0) = b'(y_0 - y)$, on obtient

$$a'(x - x_0) = b'ka' \Rightarrow x = x_0 + kb'.$$

Les solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$ sont :

$$\{(x_0 + kb'; y_0 - ka')\}$$

III. Nombres premiers

❖ Définition et propriétés

➤ Définition

On dit qu'un entier **naturel P est premier s'il possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et P.**

Si $a \in \mathbb{Z}^*$, a est premier lorsque $|a|$ est un entier premier.

NB : 0 et 1 ne sont pas premiers. Deux nombres premiers distincts sont premiers entre eux.

➤ Propriétés

P₁ : Tout entier naturel différent de 0 et 1 admet au moins un diviseur premier.

P₂ : Il existe une infinité de nombre premier.

P₃ : Tout entier naturel n autre que 0 et 1 et non premier admet au moins un diviseur premier d tel que : $1 < d^2 \leq n$.

P₄ : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Il existe des nombres premiers $P_1; P_2;$

$P_3 \dots P_k$ et des entiers naturels non nuls $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_k$ tels que : $n = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times \dots \times P_k^{\alpha_k}$

avec $P_1 < P_2 < \dots < P_k$. Cette décomposition est unique.

P₅ : $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; +, \times))$ est un corps si et seulement si **n est nombre premier.**

(Dire que c 'est un corps signifie tout simplement que c 'est l'opération $\div$ qui cause problème).

Retenons :

Pour déterminer si un entier **naturel n est premier**, on essaie de le diviser par **tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$** . Si aucun de ces nombres ne divise n , on peut dire qu'il est premier.

Séquence d'apprentissage n° 3 :**Nombres Complexes****Introduction**

Dans les classes antérieures, nous avons appris que la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 + 1 = 0$ débouche sur l'absurdité $x^2 = -1$ qui prouve qu'elle n'admet pas de solutions réelles. Et pourtant, les mathématiciens s'étaient résolus d'en trouver de solutions. Ceci aurait trotté pour la première fois dans la cervelle de **Lan Stewart** qui s'exprimait en ces termes : « *Ainsi, y a-t-il ou non une racine carrée de -1 ? Si oui de quelle sorte d'animal s'agit-il ?* ». Cette préoccupation fit un coup d'appel aux théoriciens qui s'étaient lancés dans la recherche de cette racine. Plusieurs années de recherches se sont révélées vaines. Ce n'est que trois siècles après, à partir du XVI^{ème} siècle, que ce problème mathématique sera résolu grâce **au mathématicien Italien Jérôme Cardan** qui inventa le nombre surprenant i tel que $i^2 = -1$. Cette invention allait donner naissance à une panoplie de débats mathématiques pendant lesquels plusieurs savants qualifiaient ce nombre d' « impossible », d' « inutile »...



Cette invention a aidé à la résolution de plusieurs équations n'admettant pas de solution dans $\mathbb{R}$ et a conduit à la création d'un autre ensemble : l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

**(Leonhard Euler)****(Jérôme Cardan)**

Les travaux de Cardan ont été approfondis par divers mathématiciens notamment **Bombelli, Gauss, Abraham de Moivre, René DESCARTES, Cauchy, Schrödinger, Leonhard Euler**, d'autres mathématiciens modernes et les mathématiciens contemporains.

**(Abraham de Moivre)**

Dans cette séquence d'apprentissage, nous étudierons les nombres complexes et les équations dans cet ensemble. Cette étude s'étendra en partie aux similitudes planes que nous aborderons dans la SAN°3.

**(René DESCARTES)****SOMMAIRE**

1. Forme algébrique d'un nombre complexe et détermination de lieux géométriques.
2. Forme Trigonométrique et Exponentielle d'un nombre complexe.
3. Résolution d'équations à solutions complexes.

I. Forme Algébrique d'un nombre complexe et détermination de lieux géométriques.

❖ Définition et propriétés

➤ Définition

♠ Un nombre complexe est un nombre généralement noté z qui peut s'écrire sous la forme dite **algébrique** : $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels et i un nombre tel que $i^2 = -1$.

Remarque

Au premier contact, cette définition semble être incompréhensible et même floue du fait du « caractère » surprenant du nombre i qui paraît bizarre. Il faut simplement comprendre que ce n'est qu'une invention pour pouvoir résoudre les problèmes mathématiques. En réalité, i n'est pas un nombre concret dont on peut parler avec précision mais juste une imagination. Il est donc important de ne pas vouloir trouver une place pour le nombre i parmi les nombres du système décimal...

♠ L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

- a est la **partie réelle** de z et notée **Re(z)**.
- b est la **partie imaginaire** de z et notée **Im(z)**.

On rappelle que a et b sont des nombres réels.

- Si $a=0$, alors $z=bi$. On dit que z est un nombre **imaginaire**. L'ensemble des nombres complexes imaginaires est noté $i\mathbb{R}$.
- Si $a=0$ et $b \neq 0$, alors $z = bi$. On dit que z est un **nombre imaginaire pur**. L'ensemble des nombres complexes imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}^*$.
- Si $b=0$, alors $z = a$. On dit que z est un nombre réel.

- Ainsi, on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

➤ Propriétés

a, a', b et b' étant des réels, on a :

- $a + ib = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$
- $a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

➤ Notion de conjugaison et propriétés

Soit un nombre complexe $z = a + ib$, $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

On appelle **nombre complexe conjugué** de z et on le note $\bar{z}$, le nombre complexe défini par : $\bar{z} = \overline{a + ib} = a - ib$.

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ et tout nombre complexe $z' = a' + ib'$, on a :

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- $\overline{(z)^n} = (\bar{z})^n, n \in \mathbb{N}^*$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} (z \neq 0)$
- $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}} (z \neq 0)$
- $z + \bar{z} = 2a = 2\text{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2ib = 2i\text{Im}(z)$
- $z \times \bar{z} = a^2 + b^2 = [\text{Re}(z)]^2 + [\text{Im}(z)]^2$
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$ et $z \neq 0$
- z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$

❖ Calcul dans $\mathbb{C}$

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes, avec a, b, a' et b' des nombres réels.

Addition : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$

Soustraction : $z - z' = (a - a') + i(b - b')$

Multipliation : $z \times z' = (aa' + bb') + i(ab' + a'b)$

Inverse : $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}, (z \neq 0)$

Quotient : $\frac{z'}{z} = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} + i \frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2}, (z \neq 0)$

➤ Représentation géométrique d'un nombre complexe.

Soit le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A tout nombre complexe $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on fait correspondre le point $M(a; b)$ du plan ou le vecteur $\vec{u}(a; b)$. M est appelé **le point image de z** et $\vec{u}$ le vecteur image de z ; z est appelé **affixe** de M ou de $\vec{u}$.

Propriétés

Soient A et B deux points du plan complexe, d'affixes respectives z_A et z_B .

- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est notée $z_{\overrightarrow{AB}}$ et définie par :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A.$$

- L'affixe du milieu du segment $[AB]$ est définie par : $\frac{z_A + z_B}{2}$.
- L'affixe de l'isobarycentre des points A, B et C est : $\frac{z_A + z_B + z_C}{3}$.
- Soit α, β et γ trois réels tels que :
 $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

L'affixe de G barycentre des points pondérés $(A; \alpha)$, $(B; \beta)$ et $(C; \gamma)$ est égale à

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

➤ Module d'un nombre complexe

On appelle module du nombre complexe $z = a + ib$, $(a; b) \in \mathbb{R}^2$, le nombre réel positif $|z|$ défini par : $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Interprétation géométrique du module d'un nombre complexe.

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$,

- Si z est l'affixe d'un point M, alors le module $|z|$ représente la distance OM.
- Si A et B sont deux points du plan complexe, d'affixes respectives z_A et z_B alors $|z_A - z_B| = AB$.

Propriétés du module

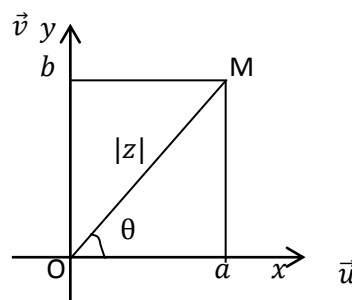
Pour tout nombre complexe z et z' , on a :

- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $|z^n| = |z|^n (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} (z \neq 0)$
- $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|} (z \neq 0)$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z| = |\bar{z}| = |-z| ; |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Argument d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $a + ib$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et M son point image dans le plan complexe défini par un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On appelle argument de z et on note $\arg(z)$, l'une quelconque des mesures (en radian) de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.



Propriétés

z est un nombre complexe de forme $z = a + ib$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et dont un argument est θ .

θ vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|z|} = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{b}{|z|} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} \end{cases}$$

Propriétés de l'argument

Pour tout nombre complexe $z \neq 0$, et $\forall z' \neq 0$, puis $n \in \mathbb{N}$, on a :

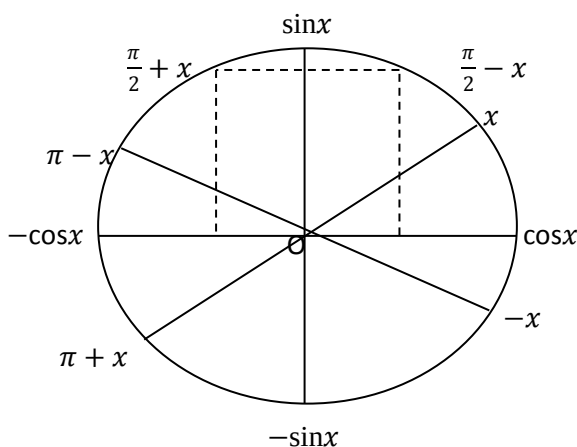
- $\arg(z \times z') = \arg z + \arg z' + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$
- $\arg \bar{z} = -\arg z + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$
- $\arg(-z) = \pi + \arg z + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$
- $\arg \frac{1}{z} = -\arg z + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$
- $\arg \frac{z'}{z} = \arg z' - \arg z + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$
- $\arg z^n = n \arg z + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$
- $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg z = \arg z' + 2k\pi \end{cases}$

II. Forme Trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe.

Pour mieux maîtriser cette partie et le reste de la séquence d'apprentissage, il est nécessaire de bien connaître ses cours de trigonométrie. C'est pourquoi nous allons d'abord faire un rappel sur la trigonométrie avant de passer à ce qui suit.

1. Problème de trigonométrie**Notion d'angles associés**

Considérons le cercle trigonométrique ci-contre :



Une analyse attentive des angles de ce cercle permet d'établir que :

- $\cos(x) = \cos(-x)$

- $\sin(x) = -\sin(-x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

Relation entre cos, sin et tan et cotan

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{1}{\cot^2 x}$

Formules d'addition

- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a - b) = \cos a \sin b - \sin a \cos b$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

Formules de duplication

- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
- $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

Formules de linéarisation

- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$
- $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$
- $\tan^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)}$

Transformation de Produit en somme

- $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$
- $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$
- $\cos a \cdot \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) - \sin(a - b)]$

Transformation de somme en Produit

- $\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sin a - \sin b = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Résolution d'équation trigonométrique

Soit x et y deux nombres réels et k un entier relatif.

- $\sin A(x) = \sin B(x) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} A(x) = B(x) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ A(x) = \pi - B(x) + 2k\pi \end{cases}$$
- $\cos A(x) = \cos B(x) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} A(x) = B(x) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ A(x) = -B(x) + 2k\pi \end{cases}$$

Soit $(x; y) \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\tan A(x) = \tan B(x) \Leftrightarrow A(x) = B(x) + \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

Cosinus et sinus des angles usuels

x en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

2. Forme trigonométrique

Tout nombre complexe non nul dont un argument est θ peut se mettre sous la forme :

$Z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$: c'est la forme trigonométrique de z .

Remarque :

Les expressions :

$Z_1 = -2(\cos \theta + i \sin \theta)$
ou $Z = 5 \cos \pi (\cos \frac{17\pi}{6} + i \sin \frac{17\pi}{6})$ par exemple ne peuvent pas être appelées forme trigonométrique de Z_1 et Z car $-2 < 0$ et $5 \cos \pi = -5 < 0$.

Dans le cas où le réel qui est censé être le module est **négatif**, il faut **le multiplier par (-1) et ajouter π** à l'angle. Par exemple ici, $z_1 = 2[\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)]$. On déduit que $|Z_1| = 2$ et $\text{Arg}(Z_1) = \theta + \pi$.

3. Forme exponentielle :

Par convention, on pose : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Tout nombre complexe non nul dont un argument est θ peut se mettre aussi sous la forme :

$z = |z|e^{i\theta}$: c'est la **forme exponentielle de z** .

Remarque :

L'expression $Z = \frac{\cos 4\pi}{3} e^{ix}$ par exemple ne peut être appelé forme exponentielle de Z car $\frac{\cos 4\pi}{3} < 0$. Donc il faut être éveillé pour ne pas commettre ces genres d'erreurs.

❖ Forme exponentielle et opérations

Soit $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls avec θ et θ' des nombres réels, $r > 0$ et $r' > 0$. On a :

- $\bar{z} = r e^{-i\theta}$
- $z \times z' = r \times r' e^{i(\theta + \theta')}$
- $\frac{z'}{z} = \frac{r'}{r} e^{i(\theta - \theta')}$
- $z^n = r^n e^{in\theta} (n \in \mathbb{N})$.

➤ **Formule de Moivre**

Pour tout réel θ et tout entier relatif n , on a :
 $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

➤ **Formule d'Euler**

Pour tout nombre réel θ , on a :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Retenons :

♠ Un nombre complexe z , qu'il soit mis sous sa forme algébrique, trigonométrique ou exponentielle, est le même, ce n'est que les écritures qui diffèrent. En conséquence, on peut donner la forme trigonométrique ou exponentielle d'un nombre complexe et dire de retrouver par exemple sa forme algébrique. Comme il y a égalité entre les trois écritures, il suffit de poser égalité entre les parties imaginaires et réelles.

♠ Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r > 0$.

$\text{Re}(z) = r\cos\theta$ et non $\cos\theta$ et $\text{Im}(z) = r\sin\theta$ et non $\sin\theta$ car plusieurs élèves commettent ces erreurs...

III. Résolution d'équations à solutions complexes.

Z est un nombre complexe. On appelle racine carrée de Z tout nombre complexe δ tel que $\delta^2 = Z$.

Propriétés

$\delta = x + iy$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ est une racine carrée de Z si et seulement si on a :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \text{Re}(Z) \\ x^2 + y^2 = |Z| \\ 2xy = \text{Im}(Z) \end{cases}$$

Equation du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a, b et $c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$).

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution réelle $z = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux racines distinctes :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ où } \delta \text{ est une racine carrée de } \Delta.$$

Remarque :

Soit $\Delta = a + bi$ le discriminant d'une équation du second degré où a et b sont des nombres réels avec b non nul.

On n'écrit pas, en voulant donner les

solutions, par exemple $z = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ i.e

$z = \frac{-b + \sqrt{a+ib}}{2a}$ En effet, Δ est un nombre complexe privé des nombres réels et donc on ne peut pas connaître son signe pour s'assurer qu'il peut « habiter la maison $\sqrt{\cdot}$ » qui n'accepte que les réels positifs ».

Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe.

Soit Z un nombre complexe. On appelle racine $n^{\text{ièmes}}$ (n un entier naturel ≥ 2) de Z , tout nombre complexe z tel que : $z^n = Z$.

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de $re^{i\alpha}$ ($r \in \mathbb{R}^*_+, \alpha \in \mathbb{R}$)

sont les nombres complexes z_k définis par :

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Remarque:

Pour $n \geq 3$, les points images de ces racines $n^{\text{ièmes}}$ sont les sommets d'un polygone régulier à n cotés inscriptible dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$, (O étant

l'origine du repère choisi dans le plan complexe).

Nature de certaines configurations planes

A, B, C et D sont des points deux à deux distincts et $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct.

- $\text{mes}(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- $\text{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*.$
- $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*.$
- ABC est un **triangle rectangle en A**
 $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*.$
- ABC est un **triangle isocèle en A**
 $\Leftrightarrow \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1.$
- ABC est un **triangle rectangle et isocèle en A** $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i.$
- ABC est un **triangle équilatéral** $\Leftrightarrow$
 $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$
- A, B, C et D sont **cocycliques**(situés sur un même cercle) $\Leftrightarrow \frac{\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A}}{\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B}} \in \mathbb{R}^*.$
- ABCD est un parallélogramme si on a :
 $z_B - z_A = z_C - z_D.$

Retenons

Pour démontrer, à l'aide des théories relatives aux nombres complexes, qu'un quadrilatère ABCD est :

- **un rectangle** : on pourra montrer d'abord que ABCD est un parallélogramme. Par la suite, on montre que ce parallélogramme contient un triangle rectangle.
- **un carré** : On pourra montrer que ABCD est un parallélogramme dont le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

- **un losange** : on pourra montrer que ABCD est un parallélogramme tel que $(AC) \perp (BD).$

Séquences d'apprentissage 4 & 5 :

Limites-Continuité-Dérivabilité-Etude de fonctions

Introduction

La notion générale de limite remonte à **Isaac NEWTON**. En effet, aux XVIIème siècle, il fonda avec **Leibniz** le calcul infinitésimal à travers sa méthode des fluxions et des suites infinies dans laquelle il considère les quantités mathématiques comme les espaces décrits par un corps en mouvement et imagine des vitesses des mouvements qui les engendrent.



(Isaac Newton)

Avec cette séquence d'apprentissage, nous allons approfondir et compléter les notions déjà vues en classe de Première notamment en ce qui concerne les applications de la continuité d'une fonction sur un intervalle,

Euler et **CAUCHY** vont partir de ces calculs étudier la notion de limite, puis celle de dérivée conduisant au calcul mathématique des vitesses...

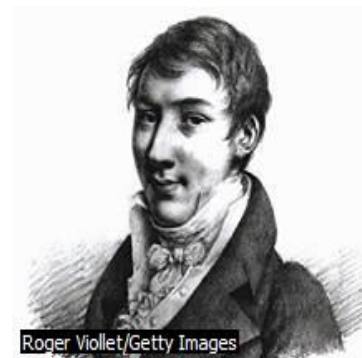


(Leonhard Euler)



(Leibniz)

le calcul de la dérivée de fonctions composées et de la réciproque d'une fonction, l'inégalité des accroissements finis, les dérivées successives, l'approximation locale d'une fonction,



(Cauchy Antoine)

ses variations sur l'ensemble de définition et la construction de sa courbe représentative ainsi que l'analyse de certaines propriétés.

SOMMAIRE

I. Limites- Continuité- Dérivabilité

II. Etude de fonctions

I. Limites-Continuité-Dérivabilité.**1. Notion de limites****❖ Définition**

Soit f une fonction numérique de variable réelle x définie sur D_f et α un élément appartenant ou non à D_f ; α peut prendre une valeur finie comme infinie.

La limite de f en α (bien évidemment lorsque f admet de limite en α) peut être appréhendée comme la valeur réelle ou approximative ou la valeur à laquelle $f(x)$ tend à se confondre lorsque x est aussi voisin que l'on veut de α .

Ainsi, cette limite peut être finie ou infinie.

❖ Limite d'une fonction f en un point α

Soit D_f le domaine de définition de f .

- Si $\alpha \in D_f$ alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$.
- Si $\alpha \notin D_f$ et $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, trois cas peuvent se présenter :

✓ **1^{er} cas** : $\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha} v(x) = l' \neq 0$. On a alors :
 $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \frac{l}{l'} \quad (l \in \mathbb{R} \text{ et } l' \in \mathbb{R}^*)$

✓ **2^{ème} cas** : $\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) = l \quad (l \in \mathbb{R}^*)$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha} v(x) = 0$. On a alors :
 $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \frac{l}{0} = ? \infty$. Le signe de l et du 0 ou de $v(x)$ permet de savoir si la limite est $+\infty$ ou $-\infty$.

✓ **3^{ème} cas** : $\lim_{x \rightarrow \alpha} u(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha} v(x) = 0$. On a alors :

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \frac{0}{0}$. Il est question là d'une **indétermination**. (Nous en parlerons en détails plus loin).

Pour lever cette indétermination, on peut :

- ➡ Factoriser $u(x)$ et $v(x)$ puis simplifier $f(x)$ par $(x - a)$ si f est une fonction rationnelle.
- ➡ Utiliser l'expression conjuguée si f est une fonction irrationnelle.
- ➡ Utiliser le développement limité de f au voisinage de 0.
- ➡ Utiliser les limites remarquables dans les autres cas.

❖ Limites usuelles de quelques fonctions à l'infinie

Pour tous réels R et P et pour tout $n \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} R = R ; \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P}{x^n} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

➤ Règles de calcul de quelques limites à l'infinie

- A l'infini, la limite d'une fonction polynôme est celle de son monôme de plus haut degré.
- A l'infini, la limite d'une fonction rationnelle est celle du quotient du monôme de plus haut degré du numérateur par le monôme de plus haut degré du dénominateur.

❖ Limites usuelles de fonctions trigonométriques

Soit a un nombre réel. On démontre et on admet que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{x} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} = \frac{a^2}{2}$$

❖ Les formes déterminées et indéterminées.

➤ Les formes déterminées

Les formes déterminées sont :

$$\frac{\infty}{\text{réel}} = \infty ; \frac{0}{\text{réel} \neq 0} = 0 ; \frac{\text{réel} \neq 0}{0} = \infty ; \frac{\text{réel}}{\infty} = 0$$

➤ Les formes indéterminées.

$$\frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty} ; 0 \times \infty ; +\infty - \infty ; 0^0.$$

Pour lever ces indéterminations, on peut :

- Utiliser l'expression conjuguée,
- Mettre une puissance convenable de x en facteur,
- Factoriser ou développer l'expression selon le cas,
- Utiliser les règles de calculs,
- Utiliser les règles de comparaison,
- Faire usage des limites remarquables,
- Faire usage du développement limité au voisinage de 0.

Remarque :

☞ On n'écrit pas des choses comme

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \frac{0}{0} \text{ ou } \frac{\infty}{\infty} \text{ ou } 0 \times \infty ;$$

$+\infty - \infty$ ou 0^0 sur sa feuille de composition car ce n'est pas autorisé. On peut l'écrire sur son brouillon et mettre sur sa copie le résultat précédé des étapes opératoires ou

de transformations ayant abouti à ce dernier.

☞ 0^0 est une indétermination en termes de limite. Mais dans les calculs, $0^0=1$, car tout nombre à l'exposant 0 est égal à 1.

❖ Autres modes de calcul de limites d'une fonction.

➤ Limites par composition

Soit f et g deux fonctions telles que :

$$\lim_a f = b \text{ et } \lim_b g = l.$$

$$\text{On a : } \lim_a g \circ f = l.$$

➤ Limites par comparaison

Soit f , g et h trois fonctions.

- Si $\begin{cases} f(x) \geq g(x) \text{ pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim_{x_0} g = +\infty \end{cases}$

Alors $\lim_{x_0} f = +\infty$ (x_0 fini ou infini)

- Si $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \text{ pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim_{x_0} g = -\infty \end{cases}$

Alors $\lim_{x_0} f = -\infty$ (x_0 fini ou infini).

- Pour x voisin de x_0 , si on a :

$$\begin{cases} f(x) \leq h(x) \leq g(x) \\ \lim_{x_0} f = \lim_{x_0} g = l \end{cases}$$

Alors $\lim_{x_0} h = l$ (x_0 fini ou infini)

Cette propriété est connue sous le nom de **théorème des gendarmes**.

❖ Une application du calcul de limites : Branches infinies.

Soit f une fonction et (c) sa courbe représentative dans un repère cartésien ($O ; \vec{i}, \vec{j}$) et $M(x; y)$ un point de la courbe (c). On dit que la courbe (c) admet une branche infinie si x ou y tend vers l'infini.

➤ **Les asymptotes possibles**

• **Asymptotes parallèle à l'axe des abscisses.**

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$, $b \in \mathbb{R}$, on dit alors que la droite d'équation $y = b$ est une asymptote parallèle à l'axe des abscisses à (c) au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$ selon le cas.

Remarque :

☞ On parle aussi d'asymptote horizontale. Mais cette désignation est souvent condamnée parce qu'on peut disposer le repère autrement de manière que l'axe des abscisses et celui des ordonnées ne soient plus respectivement horizontal et vertical à notre regard.

☞ En général, on dit simplement que la droite d'équation $y = b$ est asymptote à la courbe (c) au voisinage de l'infini en question.

• **Asymptotes parallèle à l'axe des ordonnées**

Si $\lim_a f = \pm\infty$ $a \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote parallèle à l'axe des ordonnées à (c).

Remarque :

☞ On parle aussi d'asymptote verticale souvent condamnée parce qu'on peut disposer le repère autrement de manière que l'axe des abscisses et celui des ordonnées ne soient plus respectivement horizontal et vertical à notre regard.

☞ En général, on dit simplement que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe (c).

• **Asymptote oblique**

Pour envisager l'existence d'une asymptote oblique, il faut

d'abord avoir $\lim_{\pm\infty} f = \pm\infty$.

Prenons par exemple $\lim_{+\infty} f = \pm\infty$.

On calcule ensuite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Si on a :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, $a \in \mathbb{R}^*$, on calcule par la

suite $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$. Si on trouve

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$, $b \in \mathbb{R}$, on conclut

que la droite d'équation $y = ax + b$ est

asymptote oblique à la courbe

représentative de f au voisinage de l'infini

en question. Ici par exemple c'est au

voisinage de $+\infty$.

Remarque :

- Ici, nous avons pris $+\infty$ seulement pour travailler. L'étude se fait de la même manière que pour $-\infty$.
- En général, on dit simplement que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe (c).
- On peut demander dans les exercices de démontrer qu'une droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative d'une fonction f au voisinage de $\pm\infty$. Pour le faire, on n'a pas besoin de faire tout ce que nous avons prédéveloppé. Il suffit juste de prouver que $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} [f(x) - ax - b] = 0$.

➤ **Les Branches paraboliques**

Pour envisager l'existence d'une branche parabolique, il faut d'abord avoir :

$$\lim_{\pm\infty} f = \pm\infty.$$

Prenons par exemple $\lim_{+\infty} f = \pm\infty$.

On calcule ensuite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Si on a :

✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on conclut que (c)

admet une **branche parabolique de direction**

celle de l'axe des abscisses au voisinage de l'infini en question (ici c'est $+\infty$).

- ✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, on conclut que (c) admet une **branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées** au voisinage de l'infini en question (ici c'est $+\infty$).
- ✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, a \in \mathbb{R}^*$, on calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$. Deux cas peuvent se présenter :
 - ☞ 1^{er} cas : On trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$ avec $b \in \mathbb{R}$. On revient toujours à la conclusion qu'il s'agit d'une **asymptote oblique**.
 - ☞ 2^{ème} cas : On trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$. Dans ces conditions, on conclut que (c) admet une **branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y=ax$** au voisinage de l'infini en question (ici c'est $+\infty$).

2. Continuité

❖ Définitions et Propriétés

♠ Définition

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.
 f est continue en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; a + \alpha[$ ($\alpha > 0$). f est continue à droite en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a - \alpha; a]$, ($\alpha > 0$). f est continue à gauche en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

NB : Pour étudier la continuité d'une fonction f en a , il faut que f soit définie en a , à gauche en a et à droite en a .

♠ Propriétés

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a c'est -à-dire

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

❖ Opérations sur les fonctions continues.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

- Si f est continue en a , alors, chacune des fonctions $af, |f|, f^n$ ($n \in \mathbb{N}$) est continue en a .
- Si f et g sont continues en a , alors les fonctions $f+g$ et fg sont continues en a .
- Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en a .
- Si f est continue en a et positive sur l'intervalle I , alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a .
- Toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son domaine de définition.
- Les fonctions : $x \mapsto \sin x$; $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto \tan x$ sont respectivement continues en tout point de $\mathbb{R}$.
- La fonction : $x \mapsto \tan x$ est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

❖ Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf en un réel a de I .

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ avec ($l \in \mathbb{R}$) alors on dit que f est **prolongeable par continuité en a** .

La fonction g définie sur I par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \neq a \\ g(a) = l \end{cases} \text{ est continue en } a.$$

g est le prolongement par continuité de f en a .

❖ Continuité sur un intervalle

- Une fonction est continue sur un intervalle ouvert si elle est continue en tout point de cet intervalle.
- Une fonction f est continue sur un intervalle $[a; b]$ si elle est continue sur $]a; b[$ à droite en a et à gauche en b .
- De façon analogue, on définit la continuité d'une fonction sur les intervalles $[a; b[$; $]a; b]$; $[a; +\infty[$ et $]-\infty; a]$.

➤ Propriétés

- Si f ne s'annule pas sur un intervalle K sur lequel elle est définie et continue, alors f garde un signe constant sur K .
- Si f est continue et strictement monotone sur K contenant les réels a et b et si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une **solution unique** dans l'intervalle $[a; b]$.

Plus généralement,

- Si f est une fonction continue sur un intervalle K contenant les réels a et b et si α est un réel compris entre les réels $f(a)$ et $f(b)$ alors l'équation $f(x) = \alpha$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.
- Si f est une fonction **continue** et strictement **monotone** sur K alors :
 - ☞ f réalise une bijection de K sur $f(K)$.
 - ☞ La bijection réciproque f^{-1} de f est continue sur $f(K)$.
 - ☞ f^{-1} est strictement monotone et a le même sens de variation que f .

❖ Image d'un intervalle K par une fonction continue f

K	$f(K)$	
	f est strictement croissante sur K .	f est strictement décroissante sur K
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)[$
$]a; b]$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)]$	$]f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$
$]a; b[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$[a; +\infty[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)]$
IR	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$

3. Dérivabilité

❖ Dérivabilité d'une fonction en un point.

Définition 1 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a .

On dit que f est dérivable en a s'il existe un nombre réel l tel que :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l.$$

Le réel l lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivée de f en a , il est noté : $f'(a)$.

Si f est dérivable en a , alors la courbe représentative de f admet au point

$M(a; f(a))$ une tangente (T) d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Le vecteur directeur de cette tangente est $\vec{u}(1; f'(a))$.

Définition 2 :

Soit f une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle de la forme : $]a - h; a]$ ($h > 0$).

On dit que f est dérivable à gauche en a s'il existe un nombre réel l' tel que :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l'.$$

Le réel l' lorsqu'il existe est appelé le **nombre dérivé** de f à gauche en a . Il est noté $f'_g(x)$.

Définition 3

Soit f une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle de la forme : $[a; a + h[$ ($h > 0$).

On dit que f est dérivable à droite en a s'il existe un nombre réel l'' tel que :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l''.$$

Le réel l'' lorsqu'il existe, est appelé **nombre dérivé de f à droite en a** , il est noté $f'_d(x)$.

Conséquences

- f est dérivable en a si et seulement si $f'_d(x) = f'_g(x)$ et le résultat doit être un nombre fini.
- Si f est dérivable à droite de a , alors la courbe représentative de f admet au point $M(a; f(a))$ une demi-tangente (T_d) définie par :

$$(T_d) : \begin{cases} x \geq a \\ y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \end{cases}$$

- Si f est dérivable à gauche de a , alors la courbe représentative de f admet au point $M(a; f(a))$ une demi-tangente (T_g) définie par :

$$(T_g) : \begin{cases} x \leq a \\ y = f'_g(a)(x - a) + f(a) \end{cases}$$

❖ Interprétations graphiques

On n'est dans la logique que :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$$

- ➡ Si on a : $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$, ou $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ on dit que la courbe représentative (c) de f admet au point $M(a; f(a))$ une demi-tangente verticale dirigée vers le haut définie par :

$$\begin{cases} x = a \\ y \geq f(a) \end{cases}$$

- ➡ Si on a : $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$, on dit alors que la courbe représentative (c) de f admet au point $M(a; f(a))$ une demi-tangente verticale dirigée vers le bas définie par :

$$\begin{cases} x = a \\ y \leq f(a) \end{cases}$$

❖ Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

➤ Définition

Si une fonction f est dérivable en tout point x_0 d'un intervalle I , on dit que f est dérivable sur I . La fonction dérivée de f est notée f' .

➤ Dérivée de fonctions usuelles

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$f(x) = k(\text{constante})$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$

$f(x) = x^r (r \in \mathbb{Q}^*)$	$f'(x) = rx^{r-1}$	$\mathbb{R}^*_+$ ou $\mathbb{R}^*_-$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*_+$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*_+$ ou $\mathbb{R}^*_-$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$ $= \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$f(x) = \cos(ax + b)$ ($a \in \mathbb{R}^*$)	$f'(x) = -a \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax + b)$ ($a \in \mathbb{R}^*$)	$f'(x) = a \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan(ax + b)$ ($a \in \mathbb{R}^*$)	$f'(x) = a(1 + \tan^2(ax + b))$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Dérivée et opérations sur les fonctions.

- Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors :
 - les fonctions $f+g$, af ($a \in \mathbb{R}$) et $f \times g$ sont dérivables sur I .
 - si $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$, les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I .
- si g est dérivable sur I et f est dérivable sur un intervalle J tel que : $J \subset f(I)$ alors la fonction $f \circ g$ est dérivable sur I .

Le tableau ci-après récapitule les formules de calcul des dérivées.

Fonctions	Dérivées
$f + g$	$f' + g'$
$a.f$ ($a \in \mathbb{R}$)	$a.f'$
$f.g$	$f'.g + g'.f$
$\frac{1}{g}$ ($g \neq 0$)	$-\frac{g'}{g^2}$
$\frac{f}{g}$ ($g \neq 0$)	$\frac{f'.g - g'.f}{g^2}$
f^r	$r.f'.f^{r-1}$
$\sqrt{f}$ ($f > 0$)	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$f \circ g$	$g' \times (f' \circ g)$
$\cos(f)$	$-f' \times \sin(f)$
$\sin(f)$	$f' \cos(f)$

II. Etude de fonctions.

L'étude d'une fonction se résume en deux étapes :

1^{ère} étape : L'étude des variations de la fonction. Cette étude consiste à :

- ➡ Déterminer le domaine de définition de la fonction,
- ➡ Etudier sa continuité sur son domaine de définition,
- ➡ Déterminer son ensemble de dérivabilité et calculer sa dérivée première pour tout élément de cet ensemble,

- ➡ Etudier le signe de la dérivée première et dégager le sens de variation de la fonction,
- ➡ Calculer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition,
- ➡ Dresser le tableau des variations de la fonction.

2^{ème} étape : La construction de la courbe représentative de la fonction. Cette étape consiste à :

- ➡ étudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction,
- ➡ écrire les équations des tangentes et demi-tangentes éventuelles de cette courbe,
- ➡ étudier les points remarquables (les points d'intersection de la courbe avec les axes du repère),
- ➡ construire avec soin dans un repère les points remarquables, les asymptotes, les demi-tangentes éventuelles puis la courbe en suivant le tableau de variations et en faisant attention aux branches infinies.

Remarque :

Etudier le **sens de variations** d'une fonction **ne signifie** pas étudier **les variations** de cette fonction. Le sens de variation suppose l'étude la croissance ou la décroissance de la fonction sur son domaine alors que pour les variations on doit d'abord faire le sens de variations puis dresser par la suite le tableau des variations.

❖ **Dérivée et sens de variations**

Une fonction strictement monotone sur un intervalle est une fonction qui est soit strictement croissante, soit strictement décroissante sur cet intervalle.

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- ❖ Si $f'(x) = 0$ sur I , alors f est constante sur I .
- ❖ Si $f'(x) \geq 0$ (respectivement $f'(x) > 0$) sur I , alors f est croissante (respectivement strictement croissante) sur I .
- ❖ Si $f'(x) \leq 0$ ($f'(x) < 0$) sur I , alors f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur I .

En conséquence, le sens de variation de f sur $[a, b]$ est celui de f sur $]a, b[$

Dérivée et bijection

Soit f une fonction continue, dérivable et strictement monotone sur un intervalle K , telle que :

$\forall x \in K, f'(x) \neq 0$, on a :

$g : K \rightarrow f(K)$

$$x \rightarrow g(x) = f(x)$$

- La fonction g est une application bijective ou une bijection de K sur $f(K)$.
- La bijection réciproque g^{-1} est définie et continue $f(K)$.
- L'ensemble E de dérivabilité de g^{-1} est : $E = f(K) \setminus \{f(x) / f'(x) = 0 ; x \in K\}$.
Donc pour déterminer l'ensemble de dérivabilité de g , il faut déterminer les x pour lesquels $f'(x) = 0$. Par la suite, on calcule les $f(x)$ pour les valeurs des x trouvés et ainsi, on les enlève dans le domaine de définition de la réciproque ie $f(K)$.
- g^{-1} est dérivable sur E et $\forall x \in E$, on a :

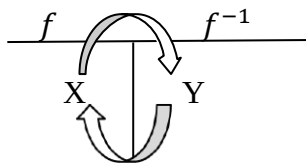
$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'[g^{-1}(x)]}$$

Retenons :

Soit f une bijection et f^{-1} sa bijection réciproque.

☞ On a : $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

En effet, considérons le schéma ci-contre :



X est l'**antécédent** de Y par f et Y est l'**image** de X par f . On a : $f(X) = Y$ et $f^{-1}(Y) = X$. Par suite, $(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = x$. Il en est de même pour $(f^{-1} \circ f)(x)$.

Cette compréhension générale de la relation entre la bijection et sa réciproque peut aider à répondre à certaines questions posées par rapport à la réciproque.

☞ Soit α un élément du domaine de dérivabilité de f^{-1} . Dans un exercice, on peut dire par exemple de calculer $(f^{-1})'(\alpha)$.

$$\text{On a : } (f^{-1})'(\alpha) = \frac{1}{f'[f^{-1}(\alpha)]}.$$

Restons dans la logique qu'on a du mal à expliciter la dérivée $(f^{-1})'$ ou la réciproque f^{-1} . Dans ce cas, on ne peut pas calculer directement $(f^{-1})'(\alpha)$ et le calcul semble être difficile. Comment alors procéder ?

Nous savons que α est dans le domaine de définition de f^{-1} . Donc α est l'image d'un réel par f . Soit x ce réel. On a : $f(x) = \alpha$. Réciproquement, $f^{-1}(\alpha) = x$. Ainsi, en résolvant l'équation $f(x) = \alpha$, on trouve x . Cette valeur de x correspond à $f^{-1}(\alpha)$. Une fois cette valeur trouvée, on pourra effectuer le calcul.

☞ Les questions qui demandent par ailleurs de déterminer le point en lequel la courbe de la réciproque a une demi-tangente horizontale (ou verticale) et autres ne

constituent que des dérivées de la question précédente.

Théorème des inégalités des accroissements finis

Soit f une fonction continue et dérivable sur un intervalle K contenant les réels a et b ($a < b$).

- S'il existe deux nombres réels m et M tels que :

$\forall x \in [a; b], m \leq f'(x) \leq M$, alors

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

- S'il existe un nombre réel M tel que :
 $\forall x \in [a; b], |f'(x)| \leq M$ alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

Développement limité d'ordre n d'une fonction au voisinage de 0 ($n \in \mathbb{N}^*$)

Si f est n fois dérivable sur un intervalle contenant 0 alors on a :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x)$$

$$\text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Point anguleux

(c) est la courbe représentative d'une fonction f et M_0 le point de (c) d'abscisse x_0 . M_0 est un point anguleux de (c) lorsque (c) admet en M_0 deux demi-tangentes de supports distincts.

Point d'inflexion

Soit x_0 un réel et f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant

x_0 . Le point $M(x_0; f(x_0))$ est un point d'inflexion à la courbe de f si :

- f' s'annule en x_0 **sans changer de signe ou bien :**
- f'' s'annule en x_0 **en changeant de signe.**

Quelques propriétés pour réduire l'ensemble d'étude d'une fonction.

Soit f une fonction définie sur un ensemble (D) et (c) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On peut réduire l'ensemble d'étude de f selon qu'elle est **paire, impaire, périodique**, admet un **axe de symétrie** ou un **centre de symétrie**.

➤ Fonction paire

f est dite fonction paire si et seulement si pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et $f(x) = f(-x)$. Dans ce cas, l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour la courbe (c).

Lorsqu'une fonction est paire, on peut l'étudier sur le domaine $E = D \cap [0; +\infty[$ puis compléter sa courbe par la symétrie d'axe $(O, \vec{j})$ sur D.

➤ Fonction impaire

f est dite impaire si et seulement si pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et $f(x) = -f(-x)$. Dans ce cas, l'origine du repère O est un centre de symétrie pour la courbe (c).

Lorsqu'une fonction f est impaire, on peut l'étudier sur le domaine $E = D \cap [0; +\infty[$ puis compléter sa courbe par la symétrie centrale de centre O sur D.

➤ Fonction périodique :

f est dite fonction périodique s'il existe un nombre réel T non nul tel que pour tout $x \in D$, $(x + T) \in D$ et $f(x + T) = f(x)$.

T est appelé **période** de f .

➤ Axe de symétrie

La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie pour la courbe (c) si, pour tout $x \in D$, on a $(2a - x) \in D$ et $f(2a - x) = f(x)$.

Lorsque la courbe d'une fonction f admet la droite d'équation $x = a$ pour axe de symétrie, on peut étudier f sur le domaine $E = D \cap [0; +\infty[$. Par la suite, on complète la courbe par la symétrie d'axe $(S; \vec{j})$ ou $S(a; 0)$.

➤ Centre de symétrie

Le point $M(a; b)$ est un centre de symétrie pour la courbe (c) si pour tout $x \in D$, on a $(2a - x) \in D$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Lorsque la courbe (c) de f admet un point $M(a; b)$ comme axe de symétrie, on peut étudier f sur le domaine $E = D \cap [0; +\infty[$. Par la suite, on complète la courbe par la symétrie centrale de centre $M(a; b)$.

Retenons :

☞ Dans certains exercices il arrive parfois qu'on ne propose pas un encadrement pour le(s) zéro(s) d'une fonction qui s'annule sur son domaine d'existence. Dans ces conditions, au niveau de l'étude des points remarquables, on est appelé à résoudre l'équation $f(x) = 0$. Si la résolution de cette équation n'est pas possible, on peut encadrer le(s) zéro(s) en utilisant la méthode de **balayage** ou celle de **dichotomie** (voir classe 1^{ère}).

Séquence d'apprentissage n° 8 :**Primitives.****Introduction**

A travers l'étude des fonctions, nous avons vu que les dérivées successives d'une fonction sont également des fonctions. Cela peut nous amener à dire intuitivement qu'une fonction, lorsqu'elle est définie, serait la dérivée d'une autre fonction. Dès lors, toute fonction admettrait, au moyen d'une dérivation, une « génitrice » qui est une autre fonction. Il serait quand même intéressant d'aller chercher les « génitrices » successives d'une fonction donnée : c'est ce fameux jeu qui aurait préoccupé les mathématiciens qui ont fini par établir quelques formules permettant d'aller déterminer une ou les « génitrice(s) » d'une fonction que nous allons appeler une ou les primitives de cette fonction. Mais malheureusement, ces règles ne nous permettent pas de déterminer les primitives de toutes les fonctions continues, ce qui pourrait rendre complexe, comme nous le verrons plus loin, la notion d'intégrale... Nous étudierons néanmoins dans ce chapitre, quelques règles de détermination des primitives et nous tenterons, s'il est possible à notre niveau, de déterminer les primitives d'une fonction continue sur un ensemble donné.

$$F(x) = \frac{1}{n+1} u(x)^{n+1} + k$$

$$G(x) = 2\sqrt{u(x)} + k$$

$$H(x) = -\frac{1}{(n-1)u(x)^{n-1}} + k$$

$$I(x) = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + k$$

SOMMAIRE**I. Primitives des fonctions usuelles.****II. Primitives des fonctions en général****III. Les principales techniques de détermination de Primitives.**

I. Primitives des fonctions usuelles.**Définition**

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I . On appelle primitive de f , toute fonction F dérivable sur I telle que $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Propriétés

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives sur I .
- Si F est une primitive de f alors la fonction $x \rightarrow F+c$ (avec $c \in \mathbb{R}$) est aussi une primitive de f et toutes les primitives de f sont de cette forme.
- Soit f une fonction continue sur un intervalle I , $a \in I$ et b un nombre réel quelconque. Il existe une et une seule primitive F de f qui prend la valeur b en a ($F(a) = b$).

Tableau donnant les primitives des fonctions usuelles

Intervalle	Fonction f	Primitive F
$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto a, a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto ax + c, c \in \mathbb{R}$
$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{Q}_+^*$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, c \in \mathbb{R}$
$I \subset \mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{Q}_+^* - \{1\}$	$x \mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c, c \in \mathbb{R}$
$I \subset \mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}$
$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c, c \in \mathbb{R}$

$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c, c \in \mathbb{R}$
$I \subset \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$x \mapsto \tan^2 x$	$x \mapsto -x + \tan x + c, c \in \mathbb{R}$
$I \subset \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \mapsto \tan x + c; c \in \mathbb{R}$

II. Primitives des fonctions en général.

Dans tout le tableau, c désigne une constante réelle.

Conditions	Fonctions f	Primitives F
$a \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto au'(x)$	$x \mapsto au(x) + c$
	$x \mapsto u'(x) + v'(x)$	$x \mapsto u(x) + v(x) + c$
	$x \mapsto u'(x)u^n(x), n \in \mathbb{Q}_+^*$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}u^{n+1}(x) + c$
$\forall x \in I, u(x) \neq 0$	$x \mapsto \frac{u'(x)}{u^n(x)}$	$x \mapsto \frac{-1}{(n-1)u^{n-1}(x)} + c$
$\forall x \in I, u(x) > 0$	$x \mapsto \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$x \mapsto 2\sqrt{u(x)} + c$
	$x \mapsto u'(x)\sin[u(x)]$	$x \mapsto -\cos[u(x)] + c$
	$x \mapsto u'(x)\cos[u(x)]$	$x \mapsto \sin[u(x)] + c$

$a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$
$a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$
	$x \mapsto u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$	$x \mapsto u(x) \cdot v(x) + c$
	$x \mapsto \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}$	$x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)} + c$
	$x \mapsto u'(x) \times v'[u(x)]$	$x \mapsto v(u(x)) + c$

III. Les principales techniques de détermination des Primitives

Pour déterminer les primitives des fonctions continues,

♣ vous devez, après quelques petites transformations, appliquer les formules pour les fonctions usuelles,

♣ utiliser les formules d'addition, de duplication, de transformations de somme en produit, de produit en somme, les relations entre sinus, cosinus, tangente et cotangente, pour les fonctions trigonométriques,

♣ linéariser les fonctions trigonométriques à exposant,

♣ décomposer les fonctions en fractions partielles, lorsqu'il s'agit des fonctions rationnelles, (*)

♣ faire une intégration partie, (nous en parlerons plus loin, au niveau du calcul intégral),

♣ opérer un changement de variable, (affine ou trigonométrique) pour toutes fonctions, (nous en parlerons au niveau du calcul intégral).

*Dans cette section, nous nous contenterons d'exposer inclusivement la méthode de décomposition des fonctions rationnelles en fractions partielles.

❖ Méthode de décomposition des fonctions rationnelles en fractions partielles

Lorsque la fonction dont on veut déterminer une primitive est une fonction rationnelle, s'elle n'est pas sous forme de fonctions usuelles où l'on pourrait, à une constante près, appliquer les formules, on pourra alors décomposer cette fonction en fractions partielles avant de déterminer les primitives.

La décomposition en fractions partielles se fait en général à l'aide de trois outils :

- soit par une **division euclidienne** lorsque le degré du polynôme du numérateur est supérieur ou égal à celui du dénominateur.
- si le polynôme du numérateur est de degré inférieur à celui du dénominateur, deux cas peuvent se présenter : soit le numérateur et le dénominateur ont au moins une racine commune, soit ne l'ont pas du tout.

Ici, on a deux solutions possibles :

♣ Dans le 1^{er} cas, on cherche les racines communes aux deux polynômes pour pouvoir les simplifier et obtenir un quotient simple avant de penser aux transformations subséquentes.

♣ Si les deux polynômes n'admettent pas de racines communes, il faut mettre en produit de facteurs le polynôme du dénominateur pour ensuite décomposer la fraction en fractions partielles en appliquant l'un des deux principes suivants selon le cas :

Principe 1

Si $f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$, ($Q(x)$ est un polynôme, y compris une constante et de **degré inférieur** à celui de $P(x)$).

Supposons qu'on peut factoriser $P(x)$ de manière à avoir :

$P(x) = p_1(x) \times p_2(x) \times \dots \times p_k(x)$ où $p_1(x), p_2(x) \dots$ et $p_k(x)$ sont des polynômes **dictincts les uns des autres**.

Notons $p_1^{(r_k)}(x)$ le polynôme $p_1(x)$ de degré r_k , (ceci pour spécifier le degré du polynôme). $f(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = \frac{q_1^{(r_1-1)}(x)}{p_1^{(r_1)}(x)} + \frac{q_2^{(r_2-1)}(x)}{p_2^{(r_2)}(x)} + \dots + \frac{q_k^{(r_k-1)}(x)}{p_k^{(r_k)}(x)}$$

où et $q_i^{(r_k)}$, (avec $i \in 1, 2, \dots, k$) sont des polynômes de **degré r_k** .

Principe 2

Soit $f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$, ($Q(x)$ est un polynôme, y compris une constante et de degré inférieur à celui de $P(x)$).

Si la factorisation de $P(x)$ en produit de facteurs premiers contient **au moins deux facteurs identiques**, i.e $P(x)$ s'écrit :

$P(x) = p_1(x) \times p_2(x) \times \dots \times p_k(x) \times [u(x)]^n$.
(ce qui signifie que les $u(x)$ sont les facteurs identiques n fois et les polynômes $p_k(x)$ qui peuvent donc être aussi des constantes sont différents les uns des autres et distincts de $u(x)$).

Si $u(x)$ a pour degré l et si on note $q_k^{(r_k-1)}$ et $p_k^{(r_k)}$ les polynômes q_k et p_k de degré respectif $r_k - 1$ et r_k , alors : $f(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = \frac{q_1^{(r_1-1)}(x)}{p_1^{(r_1)}(x)} + \dots + \frac{q_k^{(r_k-1)}(x)}{p_k^{(r_k)}(x)} + \frac{R_1(x)}{[u(x)]^1} + \dots + \frac{R_n(x)}{[u(x)]^n}$$

où $R_i(x)$, (avec $i \in 1, 2, \dots, n$) sont des polynômes de **degré $l - 1$** .

L'application de ses deux principes se fera avec l'activité 5 de cette séquence.

Retenons :

Pour déterminer les primitives des fonctions polynômes et rationnelles, sachant que c'est possible d'utiliser les formules établies, il faut effectuer des transformations et ramener la fonction sur la forme que l'on veut i.e une forme remarquable pour pouvoir appliquer les formules. Il en est de même pour les fonctions irrationnelles et ici, il ne faut pas oublier de près que $\sqrt{f(x)} = [f(x)]^{\frac{1}{2}}$ et que $\sqrt[n]{f(x)} = [f(x)]^{\frac{1}{n}}$ (n étant un entier strictement supérieur à 2), pour effectuer les transformations.

Séquence d'apprentissage n°7 :**Fonction logarithme népérien****Introduction**

Dans la séquence d'apprentissage précédente, nous avons parlé de la notion de primitives des fonctions usuelles et des fonctions en général. Mais nous avons exceptionnellement laissé la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. S'intéressant un instant à cette fonction, une application des règles de détermination de primitives qui d'ailleurs excluaient ce cas, débouche sur une absurdité. Mais cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^*$ et par conséquent elle devrait y avoir de primitives. C'est en effet ces primitives que le mathématicien écossais **John NAPIER ou NEPER** inventera en 1614 et que nous appellerons le *logarithme népérien* définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Cette découverte allait donner naissance aux tables de logarithmes, à la règle à calcul et au pH-mètre. Les travaux de NEPER ont été approfondis par **Henry Briggs**, **Edmund GUNTER**, d'autres mathématiciens modernes et du monde contemporain. Dans cette séquence d'apprentissage, nous étudierons les fonctions logarithme népérien et les propriétés qui leur sont relatives.



John Neper, (1550-1617)
Mathématicien écossais



Henry Briggs, (1561-1630)
Mathématicien Britannique

SOMMAIRE

I. Equations et Inéquations logarithmiques.

II. Calcul de limites de la fonction logarithme népérien.

III. Etude de la fonction logarithme népérien

I. Equations et Inéquations logarithmiques.**Définitions et Propriétés****➤ Définition**

La fonction logarithme népérien notée **ln** est l'**unique primitive** de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ et qui prend la valeur 0 en 1.

En conséquence, $\ln X$ existe si X existe et $X > 0$ et $\ln 1 = 0$.

La fonction $\ln$ est définie, continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a $\forall x \in]0; +\infty[$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Remarques :

- ☞ la fonction $\ln$ se lit ‘‘ logarithme népérien’’ et **non** « el ène », comme le disent certaines personnes.
- ☞ la fonction **ln** est définie sur $]0; +\infty[$. Cela ne veut pas dire que toutes les fonctions $\ln(u(x))$ sont définies sur $]0; +\infty[$. L'idéal est de poser la condition que $u(x)$ existe et que $u(x) > 0$. Donc ne t'étonnes pas de te retrouver devant des domaines de définition comme $]-\infty; 0[$.

➤ Propriétés

Pour $a > 0$ et $b > 0$ et pour tout nombre rationnel r , on a :

- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln a^r = r \ln a$
- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1$
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$
- $\ln 1 = 0$
- $\ln e = 1$; e est un réel et $e \approx 2,718$

Résolution d'équation de type $\ln x = m$.

$$\ln x = m \Leftrightarrow \ln x = m \ln(e) \text{ (car } \ln(e) = 1) \\ \Rightarrow \ln x = \ln e^m \Rightarrow x = e^m.$$

II. Calcul de limites de la fonction logarithme Népérien

On démontre et on admet que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}_+^*.$$

Retenons :

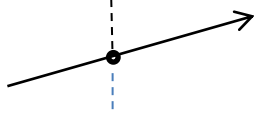
Pour calculer les limites des fonctions logarithmiques, vous aurez toujours recours à ces limites remarquables. Pour les retrouver, il faut effectuer des transformations au niveau de la fonction, effectuer des changements de variables pour les indéterminations délicates et penser au développement limité au voisinage de 0 pour une indétermination en 0...

III. Etude de la fonction logarithme népérien**❖ La fonction $x \mapsto \ln x$**

Nous avons dit que cette fonction est définie, continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Cette dérivée est positive, c'est la preuve que la fonction $\ln$ est strictement **croissante** sur $]0; +\infty[$.

Son tableau de variation se dresse comme suit :

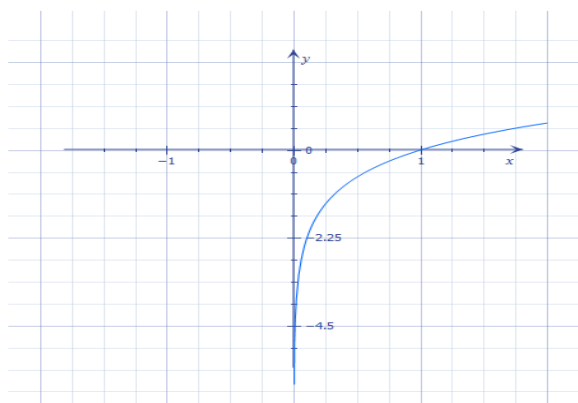
x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x)$		+	
$\ln(x)$	$-\infty$		$+\infty$



De ce tableau, on déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative (c) de la fonction $\ln$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, on conclut que (c) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

La courbe représentative de cette fonction est:



Considérons le tableau de variation de la fonction $\ln$.

- ➡ Cette fonction est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$. C'est donc une bijection sur $]0; +\infty[$.
- ➡ On déduit également que $\ln x < 0$ si $x \in]0; 1[$ et $\ln x > 0$ si $x \in]1; +\infty[$.

❖ Fonctions comportant $\ln$

➤ Ensemble de définition

- La fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ a pour domaine de définition D :
 $D = \{x \in \mathbb{R} / u(x) \text{ existe et } u(x) > 0\}$.

- La fonction $x \mapsto \ln |u(x)|$ a pour domaine de définition D :
 $D = \{x \in \mathbb{R} / u(x) \text{ existe et } u(x) \neq 0\}$.

➤ Dérivée de $\ln \circ u$

- Si u est une fonction dérivable et **strictement positive sur un intervalle I** , alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et $\ln' u = \frac{u'}{u}$.
- Si u est une fonction dérivable et **non nul sur un intervalle I** , alors la fonction $\ln |u|$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, \ln' |u| = \frac{u'}{u}$.

➤ Primitive de $\frac{u'}{u}$

u est une fonction dérivable sur un intervalle I , **ne s'annule pas sur I** , alors une primitive de la fonction $\frac{u'}{u}$ est la fonction $x \mapsto \ln |u(x)|$.

➤ La fonction logarithme décimal à base a

- La fonction logarithme décimal notée **log** est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :
 $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$; $\log 1 = 0$; $\log 10 = 1$.
- La fonction logarithme à base **a** est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :
 $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Retenons :

☞ Lorsqu'une fonction est croissante sur un intervalle, cela ne veut pas dire qu'elle est forcément positive sur cet intervalle et de même, lorsqu'une fonction est décroissante sur un intervalle, cela ne signifie pas qu'elle est forcément négative sur cet intervalle. Le signe d'une fonction n'a rien avoir avec son sens de variation. Une fonction croissante sur un intervalle peut être positive comme

négative sur cet intervalle. Il en est de même quand elle y est décroissante. Donc il faut éviter cette confusion.

Pour connaître le signe d'une fonction, on se base sur son tableau de variation et se prononce sur l'ensemble des valeurs prises par celle-ci, selon qu'elle est monotone par intervalles.

☞ Soient a et b des nombres réels et a non nul.

Les fonctions $x \mapsto \ln(ax + b)$ ont pour primitives : **$(ax + b) \ln(ax + b) - ax + k$** avec k une constante réelle.

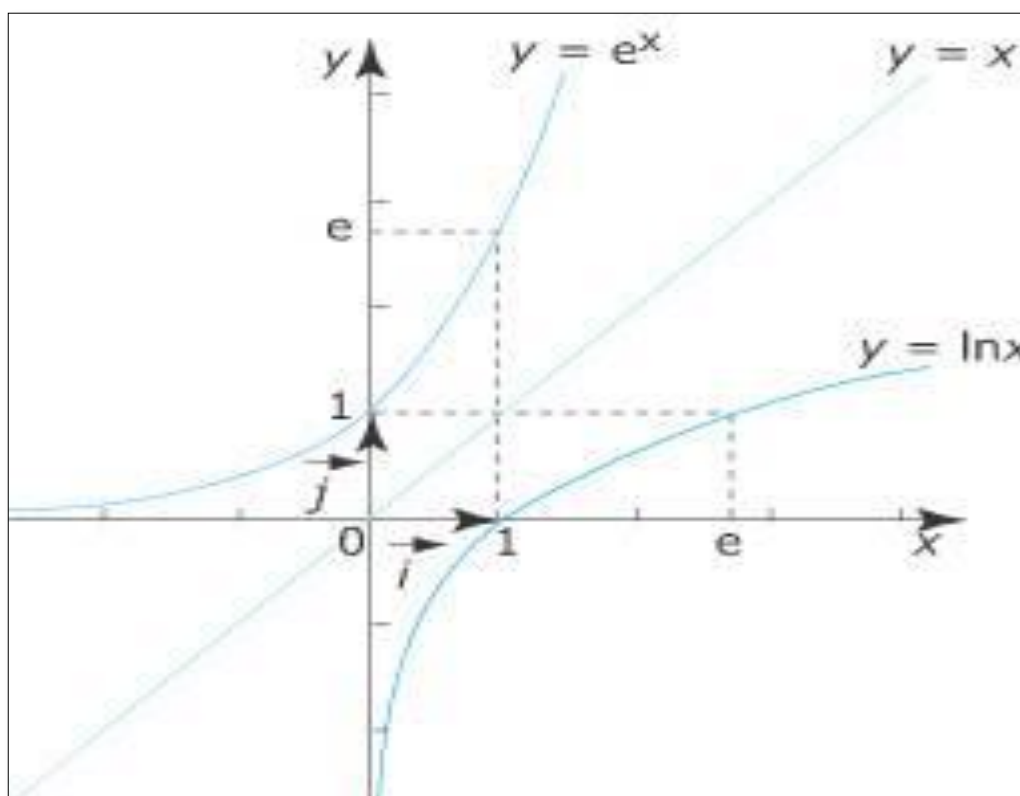
En particulier, $\ln x$ a pour primitive :

$x \ln x - x + k$ où k est une constante réelle.

Séquence d'apprentissage n° 8 :
Fonction exponentielle népérienne

Introduction

Dans la séquence d'apprentissage précédente, nous avons étudié que la fonction élémentaire logarithme népérien, $(\ln)$ est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. En conséquence, elle admettrait une bijection réciproque. C'est cette bijection réciproque que nous appellerons la fonction exponentielle népérienne définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$. Nous étudierons dans cette partie cette fonction et les propriétés qui lui sont relatives.



SOMMAIRE

- I. Equations et Inéquations impliquant la fonction exponentielle.**
- II. Calcul de limites des fonctions exponentielles népériennes.**
- III. Etude des fonctions exponentielles népériennes.**

I. Equations et Inéquations impliquant la fonction exponentielle.

Définition

La fonction exponentielle népérienne est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien (ln). On la note **exp**.

Pour tout réel x , $\exp(x) = e^x$.

Conséquences de la définition.

- Le domaine de définition de la fonction exp est $\mathbb{R}$.
- e^X existe si X existe.
- La fonction exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0; +\infty[$. Donc e^X est toujours strictement positif.
- $\exp \circ \ln$ ou $\ln \circ \exp$ est une identité.

Propriétés algébriques

- Pour tout réel x , $e^x > 0$, et $\ln e^x = x$
- Pour tout réel x et tout réel $y > 0$.

$$e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y \text{ et } e^{\ln y} = y$$

- Pour tous réels a et b et tout entier relatif k , on a :

$$\checkmark e^{a+b} = e^a \times e^b ; (e^a)^k = e^{ak}$$

$$\checkmark e^{-a} = \frac{1}{e^a} ; \frac{e^b}{e^a} = e^{b-a}$$

$$\checkmark e^a = e^b \Leftrightarrow a = b ; e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

- Résolution d'équation $e^x = m$

$$e^x = m \Leftrightarrow \ln e^x = \ln m \Rightarrow x = \ln m$$

II. Calcul de limites de la fonction exponentielle

Vous ferez usage de ces limites usuelles dans vos calculs de limites au quotidien.

On démontre et on admet que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$

Pour tout réel $\alpha > 0$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = 0.$$

III. Etude de la fonction exponentielle Népérienne

❖ La fonction élémentaire exp

Nous avons dit plus haut, en se basant sur la propriété selon laquelle la bijection a le même sens de variation que sa réciproque, que la fonction exp, la réciproque de la fonction ln, est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puisque ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Cette propriété se confirme par l'étude de la fonction exp.

En effet, la fonction exp est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée. Soit $\exp'(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$. En conséquence, une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction élémentaire $x \mapsto e^x$ est la fonction $x \mapsto e^x$.

De tout ce qui précède, $\exp'(x) = e^x ; e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Il en résulte que la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

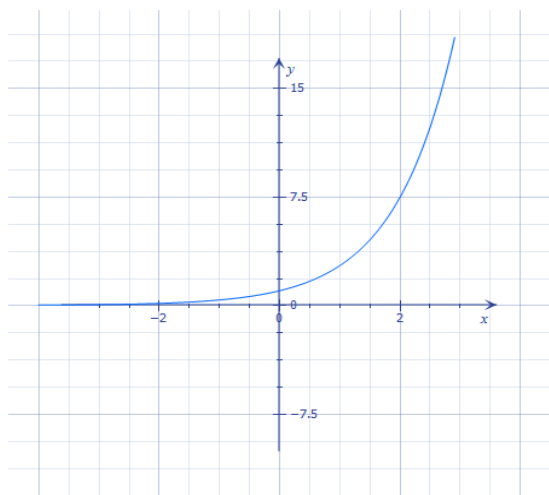
Le tableau de variation de exp se dresse comme suit :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'(x)$	+	
$\exp(x)$	0	$+\infty$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative (c) de la fonction $\exp$ au voisinage de $-\infty$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

On conclut que (c) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$. (c) coupe l'axe des ordonnées au point $M(0; 1)$. La courbe (c) est la suivante :



❖ Fonctions comportant exp

➤ Domaine de définition

On rappelle que la fonction $x \mapsto \exp[u(x)]$ a pour domaine de définition D :

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } u(x) \text{ existe}\}.$$

➤ Dérivée de exp(u)

Si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $f: x \mapsto e^{u(x)}$

est dérivable sur I et pour tout réel x de I, on a : $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$.

➤ Calcul de primitives

Si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, alors une primitive sur I de la fonction $x \mapsto u'(x) \times e^{u(x)}$ est la fonction définie sur I par : $x \mapsto e^{u(x)}$.

Propriétés

a est un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et b est un réel.

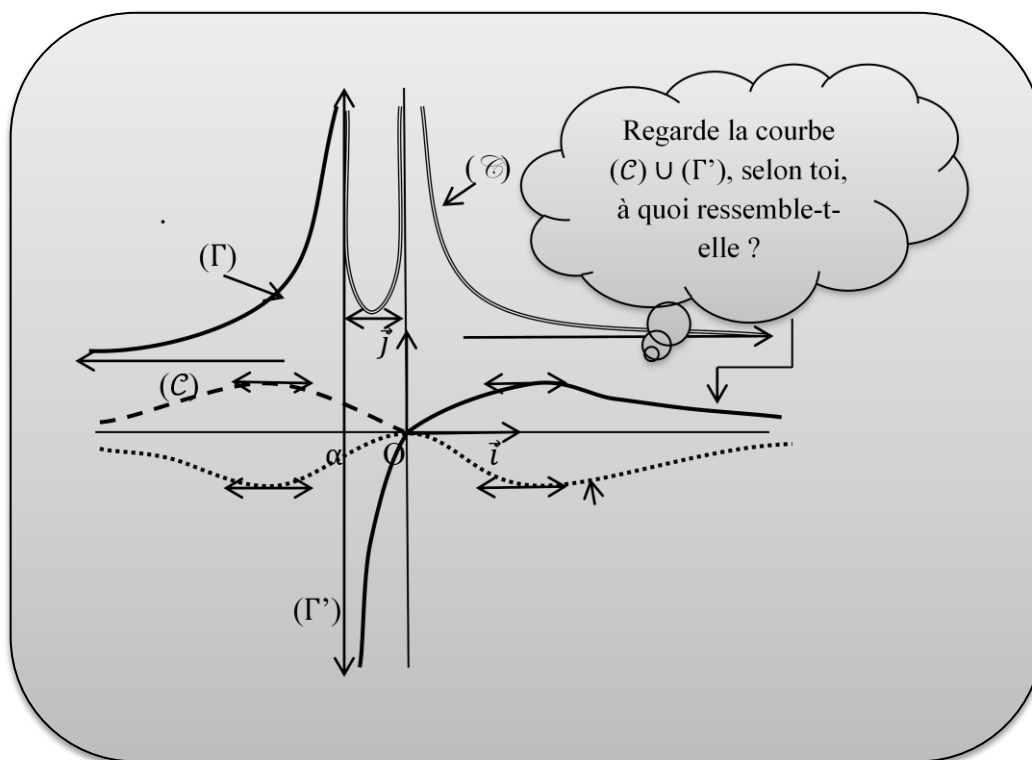
Soit u une fonction admettant une limite en a .

- Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ alors $\lim_{x \rightarrow a} e^{u(x)} = e^b$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} e^{u(x)} = 0$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} e^{u(x)} = +\infty$

Séquence d'apprentissage n° 9 :**Fonctions exponentielles- Fonctions puissances****Introduction**

La curiosité de découvrir le « comportement » des fonctions formées par la composition des fonctions logarithme népérien et exponentielle népérienne et autres, pourrait nous conduire à l'étude des fonctions exponentielles et des fonctions puissances. Avec ces fonctions, **BERNOULLI** et **HUYGHENS** ont pu déterminer en 1691 une équation à la courbe que décrivent les ponts de Lianes du paysage Africain que **GALILEE** pensait être une parabole. Des savants comme **Leibniz**, **René DESCARTES**, **Dirichlet** etc s'étaient également intéressés à ces fonctions. C'est toujours un domaine de recherches accélérées où les mathématiciens du monde contemporain ne cessent d'y établir des théories pour résoudre les problèmes de l'humanité...

Dans cette séquence d'apprentissage, nous étudierons ces deux catégories de fonctions et les propriétés qui leur sont relatives.

**SOMMAIRE**

- I. Résolution d'équations comportant les fonctions exponentielles- Fonctions puissances.**
- II. Calcul de limites des fonctions exponentielles-Fonctions Puissances.**
- III. Etude des fonctions exponentielles-Fonctions puissances.**

I. Equations et inéquations contenant les fonctions exponentielles-fonctions puissances

Cette séquence d'apprentissage met en jeu deux catégories de fonctions : les fonctions exponentielles de base a et les fonctions puissances d'exposant a .

❖ Définition de la fonction exponentielle de base a

Soit a un nombre réel strictement positif.

- Pour tout nombre réel x , on a :
$$a^x = e^{x \ln a}.$$
- On appelle fonction exponentielle de base a , la fonction $x \mapsto a^x$. On la note **exp $_a$** .
- En conséquence, A^x existe si A existe et est strictement positif.

Propriétés algébriques

Pour tout nombre réel a et b strictement positifs et pour tous nombres réels x et y , on a :

$$a^{x+y} = a^x a^y ; a^{-y} = \frac{1}{a^y} ; a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$(ab)^x = a^x b^x ; \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} ; (a^x)^y = a^{xy}$$

❖ Définition de la fonction puissance d'exposant α

α étant un nombre réel, on appelle fonction puissance d'exposant α et on note f_α , la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

En conséquence, X^α existe si X existe et est strictement positif.

Propriétés algébriques

Pour tous nombres réels strictement positifs x et y et pour tous nombres réels m et n , on a :

$$x^{m+n} = x^m x^n ; x^{-m} = \frac{1}{x^m} ; x^{m-n} = \frac{x^m}{x^n}$$

$$(xy)^m = a^m y^m ; \left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m} ;$$

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

II. Calcul de limites des fonctions puissances

Vous ferez référence aux limites usuelles dans vos calculs de limites au quotidien.

➤ Limites usuelles liées à la fonction exponentielle de base $a(a > 0)$

On démontre et on admet que :

➡ Lorsque $a > 1$, on a : $\ln a > 0$ et donc :

$$\spadesuit \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln a = -\infty$$

$$\spadesuit \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln a = +\infty$$

➡ Lorsque $0 < a < 1$, on a $\ln a < 0$ et donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0.$$

➤ Limites usuelles liées à la fonction puissance d'exposant a

On démontre et on admet que :

$$\clubsuit \lim_{x \rightarrow 0^+} a \ln x = \begin{cases} -\infty & \text{si } a > 0 \\ +\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \\ +\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$\clubsuit \lim_{x \rightarrow +\infty} a \ln x = \begin{cases} -\infty & \text{si } a < 0 \\ +\infty & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

III. Etude des fonctions exponentielles-fonctions puissances

❖ Etude des fonctions exponentielles de base a

➤ Etude de la fonction élémentaire

$$x \mapsto \exp_a (a \neq 1)$$

Soit $(\mathcal{C}_a)$ la courbe représentative de la fonction $\exp_a$.

La fonction $x \mapsto \exp_a$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\exp_a)'(x) = a^x \ln a$$

Signe de $(\exp_a)'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, a^x > 0$, donc $(\exp_a)'(x)$ a le signe de $\ln a$.

On distingue deux cas :

1^{er} cas : $0 < a < 1$

Dans ce cas, $\ln a < 0$ et donc $(\exp_a)'(x) < 0$ et par conséquent $\exp_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2^{ème} cas : $a > 1$

Dans ce cas, $\ln a > 0$ et donc $(\exp_a)'(x) > 0$; d'où $\exp_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau des variations de $\exp_a$

1^{er} cas : $0 < a < 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$(\exp_a)'(x)$	—	
$\exp_a(x)$	$+\infty$	0

2^{ème} cas : $a > 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$(\exp_a)'(x)$	+	
$\exp_a(x)$	0	$+\infty$

Branches infinies de $(\mathcal{C}_a)$

1^{er} cas

• On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$; on en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $(\mathcal{C}_a)$ en $+\infty$.

• On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ et :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\ln a \frac{e^{x \ln a}}{x \ln a} \right) = -\infty$$

$(\mathcal{C}_a)$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

2^{ème} cas :

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$; on en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $(\mathcal{C}_a)$ en $-\infty$.

♣ On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln a \frac{e^{x \ln a}}{x \ln a} \right) = +\infty.$$

$(\mathcal{C}_a)$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

Courbe représentative $(\mathcal{C}_a)$ de $\exp_a$

Suivant les valeurs de a , $(\mathcal{C}_a)$ a deux différentes allures. On pourra construire les deux courbes dans le même repère.

➤ Les fonctions $\exp_a$ en général

Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \exp_a[u(x)], a > 0.$$

On rappelle que f existe si $u(x)$ existe.

Cette fonction est dérivable sur son ensemble de définition et on a :

$$f'(x) = (e^{u(x) \ln a})' = \ln a u'(x) e^{u(x) \ln a}.$$

On convient donc qu'une primitive de la fonction $x \mapsto \ln a \cdot u'(x)e^{u(x)\ln a}$ est la fonction $x \mapsto e^{u(x)\ln a}$.

❖ Etude des fonctions puissance d'exposant a

➤ Etude de la fonction élémentaire ($x \mapsto x^a$)

Soit (C_a) la courbe représentative de la fonction $f_a: x \mapsto x^a$.

La fonction f_a est définie, continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_a'(x) = \frac{a}{x} e^{a \ln x} = ax^{a-1}.$$

Signe de $f_a'(x)$:

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, et $\forall a \in \mathbb{R}$, $x^{a-1} > 0$, donc $f_a'(x)$ a le signe de a .

On distingue deux cas :

1^{er} cas : $a < 0$

On a donc, $f_a'(x) < 0$ et donc f_a est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

2^{ème} cas : $a > 0$

Dans ce cas, $f_a'(x) > 0$ et donc f_a est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Tableau des variations de f_a

1^{er} cas :

x	0	$+\infty$
$f_a'(x)$		—
f_a	$+\infty$	0

2^{ème} cas :

x	0	$+\infty$
$f_a'(x)$		—
f_a	0	$+\infty$

Branches infinies de (C_a)

1^{er} cas :

♣ $\lim_{0^+} f_a = +\infty$, la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C_a) .

♣ $\lim_{+\infty} f_a = 0$, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C_a) au voisinage de $+\infty$.

2^{ème} cas :

♣ $\lim_{+\infty} f_a = +\infty$. Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_a(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_a(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(a-1)\ln x}$$

♣ Si $0 < a < 1$, on a : $a - 1 < 0$, et donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_a(x)}{x} = 0$. Donc (C_a) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses en $+\infty$

♣ Si $a > 0$, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_a(x)}{x} = +\infty$.

On conclut que (C_a) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées en $+\infty$.

♣ Si $a = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_a(x)}{x} = 1$

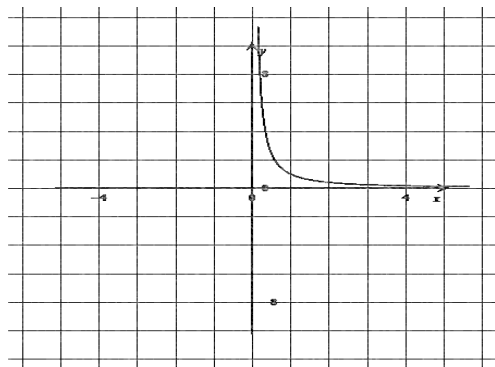
et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_a(x) - x] = 0$, on déduit que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C_a) .

Courbe représentative (C_a) de f_a

L'étude des branches infinies de (C_a) révèle que dans le 1^{er} cas, on aura à tracer une seule courbe et que dans le second cas, on distinguera 3 catégories de courbes.

1^{er} cas : $a < 0$

L'allure de la courbe est la suivante :



2^{ème} cas : $a > 0$

Ici, il y a 3 sous-cas à cause des valeurs que peut prendre a . Ceci ayant donné 3 branches infinies différentes, on aura alors 3 catégories de courbes.

Il y a les sous cas suivants : $0 < a < 1$; $a > 1$ et $a = 1$. (on pourra construire les 03 courbes dans le même repère).

➤ Les fonctions puissances d'exposant a en général.

Soit f_a la fonction définie par :

$$f_a(x) = [u(x)]^a$$

On rappelle que f_a existe si $u(x)$ et $u(x)$ est strictement positif. Cette fonction est dérivable sur son ensemble de définition.

L'étude de cette fonction se fera comme celle des fonctions exponentielle à base a dans la mesure où $u(x)$ est considérée comme cette base.

Retenons :

♠ Pour faire l'étude des fonctions exponentielles à base a , lorsqu'elles sont définies sous la forme $A^{u(x)}$ ou $\exp_A[u(x)]$ vous pourrez les ramener sous la forme

$e^{u(x)\ln A}$ pour voir clair afin de ne pas s'embrouiller.

♠ De même, pour faire l'étude des fonctions puissances d'exposant a , lorsqu'elles sont définies sous la forme $[u(x)]^a$, vous pourrez les ramener sous la forme $e^{a\ln[u(x)]}$ avant de commencer votre étude.

♠ De tout ce qui précède, on a, pour tout réel x strictement positif,

$$\boxed{\ln x \leq \sqrt{x} \leq e^{\ln x} < e^x} \quad (e^{\ln x} = x)$$

Cette compréhension générale de l'ordre entre ces différentes catégories de fonctions pourrait nous aider à ne pas avoir de doute sur le résultat d'une quelconque limite au voisinage de $\pm\infty$ du rapport entre ces fonctions.

Séquence d'apprentissage n° 10 :

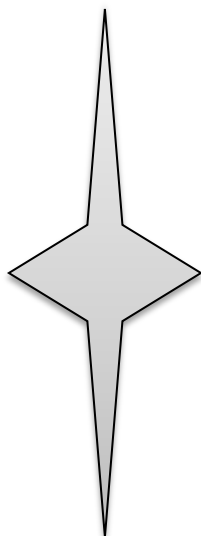
Calcul Intégral

Introduction

La notion générale d'intégrale d'une fonction est difficile. Née au XVII^e siècle à la suite du calcul différentiel fondé par **Newton et Leibniz**, elle s'est peu à peu éloignée du problème des primitives qui n'y est bien corrélé que pour les fonctions continues. Des définitions successives données notamment par **Riemann, Darboux**, ont conduit au début du XX^e siècle à l'intégrale de **Lebesgue**, théorie très aboutie mais trop difficile à notre niveau. Nous nous contenterons de définir l'intégrale d'une fonction continue, de faire le calcul intégral de quelques fonctions par détermination de primitives, s'il est possible, ou par une intégration par partie et l'on peut, comme nous le verrons, approcher d'aussi près que l'on veut par les méthodes des rectangles et des trapèzes.



Gottfried Wilhelm Leibniz, (1646-1716), philosophe et savant allemand



Bernhard Riemann (1826-1886) mathématicien allemand

SOMMAIRE

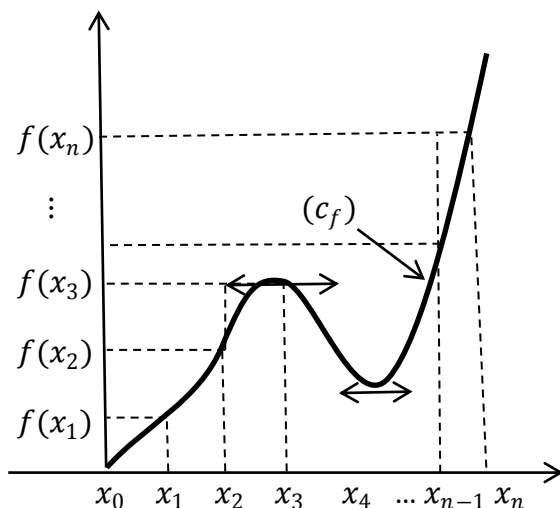
I. Calcul d'intégrale.

II. Calcul d'aire et de volume- valeur approchée d'une intégrale.

III. Fonction définie par intégrale.

I. Calcul d'intégrale**❖ Introduction à la notion d'intégrale**

Soit (c_f) la courbe représentative d'une fonction f sur l'intervalle $[a; b]$. Subdivisons cet intervalle en n intervalles de **même amplitude** : $x_0 = a, x_n = b$ et $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$.



Intéressons-nous à la quantité

$$S = (x_1 - x_0)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) + (x_3 - x_2)f(x_3) + \dots + (x_n - x_{n-1})f(x_n)$$

$$S = \sum_{i=0}^n (x_i - x_{i-1})f(x_i) = \sum_{i=0}^n f(x_i)\Delta x_i.$$

Le réel $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ est la longueur de chaque intervalle de la subdivision. Lorsque la subdivision n est infiniment grande, Δx_i serait petit et tendrait vers 0.

Nous allons poser $\Delta x_i = dx_i$ quand $n \rightarrow \infty$.

On a donc :
$$S = \sum_{i=0}^n f(x_i)dx_i.$$

Leibniz, mathématicien Allemand des temps modernes, va remplacer dans le temps cette notation pour introduire la notation $\int_a^b f(x)dx$.

On a donc :
$$\sum_{i=0}^n f(x_i)dx_i = \int_a^b f(x)dx.$$

En réalité, S est la somme des aires des rectangles de dimensions $f(x_i), \Delta x_i$. Ainsi, lorsque n est très grand, chaque rectangle serait extrêmement rétréci comme une ligne verticale et alors si $f(x) > 0$, la somme des aires de ces rectangles, donnerait l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (c_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Nous en parlerons plus loin...

Le réel $\int_a^b f(x)dx$ tel qu'introduit, serait difficile à calculer. C'est ce qui va amener les mathématiciens à établir que $\int_a^b f(x)dx$ n'est rien d'autre que $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de la fonction f !

❖ Définition et Propriétés**♠ Définition**

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I , contenant les réels a et b .

Si F est une primitive de f sur I , on définit l'intégrale de f de a à b comme étant le nombre réel $F(b) - F(a)$ et on note $\int_a^b f(x)dx$ et on lit : « **somme ou intégrale de a à b de $f(x)dx$** ».

Remarque :

- L'intégrale de f de a à b est un **nombre réel**.
- Ce nombre **ne dépend pas** de la primitive choisie pour f .
- L'élément différentiel « dx » que l'on trouve dans l'expression de l'intégrale est la longueur **infinitésimale**, ($x_i - x_{i-1}$) des intervalles pour une subdivision **infinie**. Ici, nous nous contenterons de dire simplement que « dx » signifie que l'on détermine la primitive ou que l'on « intègre » par rapport à la variable x .

On aurait pu bien écrire $\int_a^b f(x)dx$ ou $\int_a^b f(t)dt$. On peut employer n'importe quelle

lettre, à l'exclusion des lettres b, d et f . On dit que cette *variable est 'muette'*.

- On écrit souvent le réel $F(b) - F(a)$ sous forme condensée $[F(x)]_a^b$ et on peut le lire : « $F(x)$ pris entre a et b ou évaluée sur $[a; b]$ ».

Ainsi, on a :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

♠ Valeur moyenne d'une fonction

On appelle valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a; b]$, le réel $Vm_{f_{[a;b]}}$ définie par :

$$Vm_{f_{[a;b]}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

♠ Propriétés

Soit f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I , contenant les réels a, b et c . On suppose que $a \leq b$. On a alors :

- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

(C'est la relation de Chasles).

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

- α étant un réel,
 $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$:
 (c'est la propriété de linéarité de l'intégrale).
- Si pour tout $x \in I, f(x) \geq 0$, alors
 $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

- Si pour tout $x \in I, f(x) \leq 0$, alors
 $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

- Si f est **paire** alors, on a :
 $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

- Si f est **impaire** alors, on a :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

- S'il existe deux nombres réels m et M tels que $\forall x \in [a; b], m \leq f(x) \leq M$, alors on a :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

(C'est l'inégalité de moyenne)

- S'il existe un nombre réel M tel que :
 $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a; b]$, alors :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M|b-a|.$$

- Si f et g sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle I , et a et b deux nombres réels de cet intervalle, et si
 $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$ et $a \leq b$, alors :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

❖ Les principales techniques d'intégration.

Les intégrales se calculent par utilisation directe de primitives pour les fonctions usuelles, par Intégration par parties ou par changement de variable.

➤ Utilisation de primitives

Si on peut trouver une primitive de la fonction à intégrer, on peut calculer directement l'intégrale en appliquant la définition.

Nous en profitons pour compléter la table de primitives :

k désigne une constante réelle.

☞ la fonction $x \mapsto \tan x$ a pour primitive
 $-\ln|\cos x| + k$.

☞ la fonction $x \mapsto \frac{1}{\tan x}$ a pour primitive
 $\ln|\sin x| + k.$

☞ la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$ a pour primitive
 $\ln \left| \tan x + \frac{1}{\cos x} \right| + k.$

la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sin x}$ a pour primitive
 $-\ln \left| \cotan x + \frac{1}{\sin x} \right| + k.$

➤ Intégration par parties

Il peut arriver que la détermination de primitives d'une fonction cause problème. Dans ces conditions, pour calculer l'intégrale, on peut procéder par "Intégration par parties".

La formule d'intégration par partie est la suivante :

u et v sont dérivables et à dérivées continues sur un intervalle K , on a :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Remarques :

♣ Pour utiliser cette méthode pour le calcul d'intégrale d'une fonction donnée, on décompose la fonction à intégrer en deux fonctions. Parmi celles-ci, on identifie une comme fonction dérivée et l'autre comme fonction non dérivée. Par la suite, on trouve une primitive à la fonction dérivée et on dérive la fonction non dérivée puis on applique la formule.

Dans cette formule on a le terme

$\int_a^b u'(x)v(x)dx$ qui ramène à déterminer une primitive de $u'(x)v(x)dx$, pour achever le calcul. Donc le choix des fonctions dérivée et non dérivée dans la décomposition de la fonction en jeu importe, et ceci pour ne pas être bloqué en chemin.

Notez qu'il peut avoir cependant une double, triple ou même quadruple intégration par

parties pour le calcul d'intégrale d'une fonction donnée !!!

♣ Il y a aussi un langage simple pour garder sans difficulté cette formule. Dans la formule, on a le terme

$[u(x)v(x)]$ constitué uniquement des **fonctions non dérivées** et le terme

$\int_a^b u'(x)v(x)dx$ constitué des **nouvelles**

fonctions c'est-à-dire les fonctions qui représentent la dérivée de la fonction choisie comme non dérivée et la primitive de la fonction choisie comme dérivée. Dès lors, on dit que cette intégrale est égale *au produit des fonctions non dérivées entre crochet moins l'intégrale du produit des nouvelles fonctions.*

♣ Considérons cette formule :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Supposons que $u(x)v'(x)$ représente la décomposition d'une fonction f . Nous avons dit que le second travail restant à faire dans l'application de cette formule est le calcul de $\int_a^b u'(x)v(x)dx$ par détermination d'une primitive à la fonction $u'(x)v(x)$.

Soit $G(x)$ cette primitive. On a :

$$\int_a^b f(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - [G(x)]_a^b$$

On peut alors écrire que :

$$\int f(x)dx = u(x)v(x) - G(x)$$

On trouve ainsi une primitive à la fonction f . C'est cette méthode de détermination de primitives d'une fonction que nous avons annoncée plus haut dans la séquence 6 intitulée "Primitives" de la dite SA..

➤ Le changement de variable

Tel qu'introduit au niveau du chapitre 8, le changement de variable peut nous aider à déterminer des primitives des fonctions, et par conséquent nous permet de faire le calcul d'intégrale. On l'utilise en général s'il n'est pas possible de trouver directement une primitive à la fonction à intégrer ou si l'intégration par partie devient infructueuse.

☞ On peut faire un changement de variable affine ou trigonométrique ou n'importe quoi, selon le cas. A notre niveau, en général, les exercices vont suggérer quel changement de variables opérer.

☞ Lors d'un changement de variables, il ne faut pas oublier de changer les bornes de l'intégrale et d'introduire le nouveau élément différentiel obtenu.

☞ Pour les fonctions $x \mapsto \sqrt{x^2 + a^2}$, il est conseillé de poser $x = \mathbf{atan\theta}$.

☞ Poser $x = \mathbf{asin\theta}$ pour les fonctions $x \mapsto \sqrt{-x^2 + a^2}$.

☞ Poser $x = \frac{a}{\cos\theta}$ pour les fonctions $x \mapsto \sqrt{x^2 - a^2}$.

On aurait pu bien faire un exemple ici, mais pour respecter la structure du résumé, cet exemple est plutôt mis au niveau de l'activité 4 de cette séquence.

II. Calcul d'aire et de volume-Valeur approchée d'une intégrale.

❖ Calcul d'aire

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

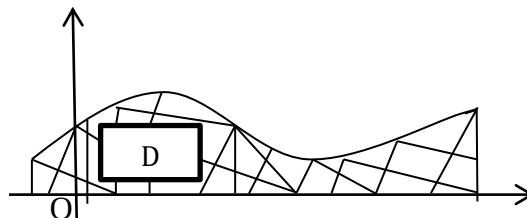
L'unité d'aire (ua) est $OI \times OJ$, aire du rectangle ayant pour cotés les segments $[OI]$ et $[OJ]$. f est une fonction continue sur un intervalle K contenant a et b .

- Si pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx$ désigne **l'aire** exprimée en

unité d'aire du domaine (D) limité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

(D) est l'ensemble constitué des points $M(x; y)$ vérifiant :

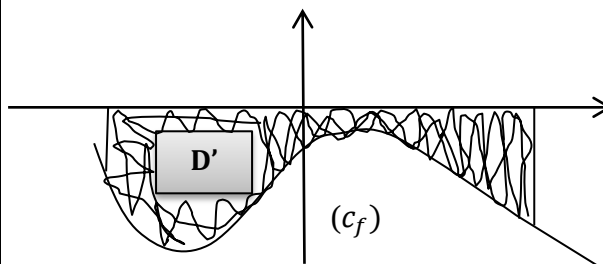
$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$



- Si pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \leq 0$,

$\int_a^b f(x) dx$ est égale à l'opposé de l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine (D') limité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. (D') est l'ensemble constitué des points $M(x; y)$ vérifiant :

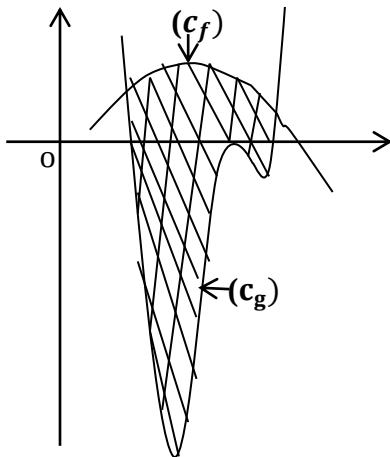
$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$



- Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I , a et b deux nombres réels tels que : $a < b$ de cet intervalle. Lorsque $f \geq g$ sur I , l'aire du domaine limité par les courbes c_f et c_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, est égale à : $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.

Le domaine peut être décrit comme l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant :

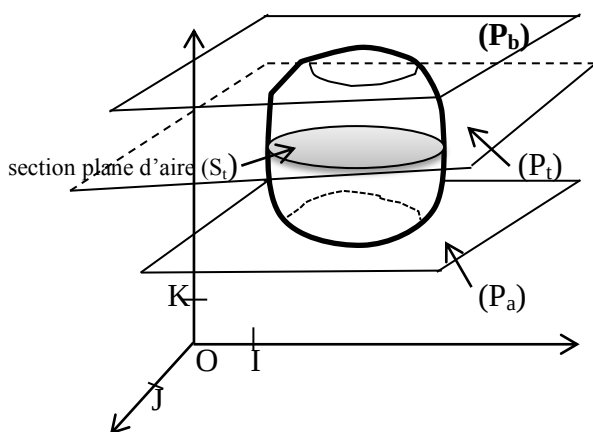
$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases}$$



❖ Calcul de volume

L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$.
L'unité de volume $u.v$ est $OI \times OJ \times OK$, volume du parallélépipède ayant pour coté les segments $[OI]$, $[OJ]$ et $[OK]$.

Si on suppose que la section d'un solide de l'espace par un plan (P) parallèle à (OIJ) d'équation $z = t$ a une aire $S(t)$ alors le volume du solide compris entre les plans d'équations $z = a$ et $z = b$ est $V = \int_a^b S(t) dt$ tel que $t \rightarrow S(t)$ soit une fonction continue sur $[a; b]$.



Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a; b]$ et (E) l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $a \leq x \leq b$ et

$0 \leq y \leq f(x)$. Alors le volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine (E) est $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

❖ Valeur approchée d'une intégrale.

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle K contenant les réels a et b .

Il y a des fonctions dont on n'arrive pas à en trouver une primitive pour l'intégrer et même si on procède par intégration par parties ou par changement de variable, on n'y arrive pas. Ceci indique qu'il n'est pas toujours possible de calculer $I = \int_a^b f(x) dx$. Dans ces conditions, on peut donner une valeur approchée de cette intégrale par deux méthodes : **la méthode des rectangles et la méthode des trapèzes.**

Nous savons que l'intégrale $I = \int_a^b f(x) dx$ est l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Donc une valeur approchée de cette aire donne une valeur approchée de $I = \int_a^b f(x) dx$. Pour Cela, on subdivise $[a; b]$ en n intervalle de même amplitude $\frac{b-a}{n}$ et de bornes :

$$x_0 = a; x_1 = x_0 + \frac{b-a}{n}; x_2 = x_1 + \frac{b-a}{n}; \dots; x_{n-1} = x_{n-2} + \frac{b-a}{n}; x_n = b.$$

➤ Méthode des rectangles

On calcule :

$$S_1 = \left(\frac{b-a}{n}\right) [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] \text{ et}$$

$$S_2 = \left(\frac{b-a}{n}\right) [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)].$$

- Si f est croissante sur $[a; b]$, alors on a : $S_1 \leq I \leq S_2$.
- Si f est décroissante sur $[a; b]$, alors on a : $S_2 \leq I \leq S_1$.

Dans tous les cas, on a :

$$I \approx \frac{S_1 + S_2}{2}$$

➤ **Méthode des trapèzes**

On calcule :

$$A = \left(\frac{b-a}{n}\right) \left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \dots + \frac{1}{2}f(x_n)\right]$$

$$I \approx A$$

III. Fonction définie par intégrale❖ **Intégrale et Calcul de limites**➤ **Limites des fonctions définies par une somme.**

Les intégrales peuvent nous aider à calculer certaines limites définies par une somme.

On rappelle que si $[a; b]$ est subdivisé en n intervalles où n tend vers l'infini, (avec les bornes $x_0 < x_1 < \dots < x_n$), alors on a :

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx \text{ où } \Delta x_i \text{ est le pas infinitésimal de chaque intervalle.}$$

On a donc $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ et ainsi $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

D'où on a :

$$\left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$$

avec $n \rightarrow +\infty$.

Les études supérieures systématiseront ce théorème sous le nom de la **somme de Riemann**.

L'application de ce théorème est faite au niveau de l'activité 7 de cette séquence.

➤ **Limites des fonctions définies par intégrale.**

Les limites des fonctions définies par intégrales peuvent se calculer par détermination de primitives ou si cela n'est pas possible, on peut les déduire à partir des encadrements que l'exercice aura proposés.

Remarque

♠ Si F est une primitive d'une fonction f et si a et b désignent des nombres réels ou $\pm\infty$, on a par définition :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Ainsi donc, si $]a; b[=]-\infty; +\infty[$, alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = "F(+\infty) - F(-\infty)".$$

De façon systématique,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x).$$

♠ De même, si u et v sont des fonctions et si F est une primitive d'une fonction f , alors la fonction G suivante est définie explicitement par :

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = F[v(x)] - F[u(x)]$$

L'application de tout ceci est laissée au niveau de l'activité 7 de cette séquence.

❖ **Notions sur les fonctions définies par intégrale**

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I , et a un réel de I .

La fonction F définie sur I par :

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la **primitive** de f qui **s'annule en a** .

- Le domaine de définition de F est I (en fait c'est la partie du domaine de I , sur laquelle f est continue).
- F est dérivable sur I et $\forall x \in I$, on a :
 $F'(x) = f(x)$ et $F(a)=0$.

Remarque:

Il ne faut pas craindre les fonctions définies comme $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Par exemple soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_a^x t \ln t dt$$

On a peur de voir qu'il y a dans cette fonction deux variables x et t .

En fait, on aurait pu bien écrire :

$$F(x) = \int_a^x t \ln x dx.$$

Mais en fin de compte, on aura à remplacer x par x après la détermination d'une primitive de la fonction à intégrer. Par exemple, pour la fonction F , on a : $F(x) = [x \ln x - x]_a^x$. Cette écriture **n'est pas commode**, ou peut **prêter confusion**, c'est pourquoi on décide de remplacer une autre variable, généralement t par x dans la primitive.

Ainsi, on peut avoir une écriture comme

$$F(x) = [t \ln t - t]_a^x \text{ qui nous ramène à remplacer } t \text{ par } x.$$

En définitive, c'est pour des raisons de commodité ou pour écarter toute confusion qu'on préfère l'écriture

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ à } F(x) = \int_a^x f(x)dx \text{ et ici, } a \leq t \leq x.$$

➤ Parité d'une fonction définie par intégrale.

Dans les exercices, vous aurez à effectuer des changements de variables élémentaires pour par exemple montrer qu'une fonction définie par intégrale est paire ou impaire.

Nous allons retenir de simples méthodes. On rappelle que $\int_a^x f(t)dt$ indique que l'on intègre par rapport à la variable t .

Prenons par exemple la fonction :

$$F(x) = \int_0^x \sqrt[5]{1+t^2} dt.$$

Soit à démontrer que F est impaire.

$$\text{On a : } F(-x) = \int_0^{-x} \sqrt[5]{1+t^2} dt$$

En posant $u = -t$, on a :

$$dt = -du.$$

$$\text{Si } \begin{cases} t = -x \\ t = 0 \end{cases} ; \text{ on a : } \begin{cases} u = x \\ u = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ainsi, } \int_0^{-x} \sqrt[5]{1+t^2} dt = - \int_0^x \sqrt[5]{1+u^2} du.$$

Puisque la variable u est muette, on peut la remplacer par n'importe quelle variable, par exemple t . On a donc :

$$- \int_0^x \sqrt[5]{1+u^2} du = - \int_0^x \sqrt[5]{1+t^2} dt$$

On établit ainsi que $F(-x) = -F(x)$. D'où F est impaire.

Remarque :

Dans l'exemple introductif précédent, à la fin de notre résolution, plusieurs lecteurs vont se demander pourquoi nous n'avons pas remplacé u par $-t$, vu que nous avons posé plus haut $u = -t$.

Une telle remarque est bien logique, mais si nous prétendons faire ainsi, on sera obligé de remplacer les bornes 0 et x par 0 et $-x$; ce qui nous revient encore à la fonction de départ. Puisque les bornes ne sont pas changées, on comprend donc pourquoi nous avons simplement remplacé u par t qui est d'ailleurs une variable muette.

Séquence d'apprentissage n° 11 :

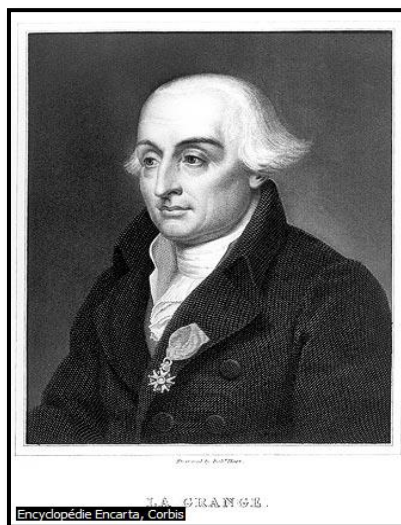
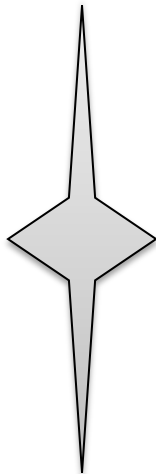
Equations différentielles

Introduction

De très nombreuses applications des mathématiques conduisent à la recherche d'une fonction assujettie à une certaine relation avec ses dérivées successives. C'est ce qu'on appelle une équation différentielle. L'immense progrès scientifique des XVII^e et XVIII^e siècles, en particulier en astronomie, repose sur la capacité de prévoir le comportement futur d'un système grâce à la résolution d'équations différentielles. De très nombreux noms de mathématiciens sont attachés à la théorie des équations différentielles : **Euler, d'Alembert, Lagrange, Riccati, Clairaut, Bernoulli, Legendre, Cauchy...** Malheureusement, il n'existe pas de méthode systématique pour résoudre exactement toutes les équations différentielles. Nous devons nous contenter d'étudier quelques types très simples, comme les équations linéaires. Par ailleurs il existe une branche des mathématiques en plein essor, l'analyse numérique, qui développe, à l'usage des physiciens et des ingénieurs, des algorithmes très performants de résolution approchée d'équations différentielles...



d'Alembert, (1717-1783), Philosophe rationaliste, Physicien et Mathématicien Français



Joseph Louis Lagrange, (1736-1813), Mathématicien et Astronome Français

SOMMAIRE

- I. Equations différentielles linéaires à coefficients constants sans second membre.**
- II. Equations différentielles linéaires du 2nd degré à coefficients constants avec second membre.**

Définition générale des équations différentielles

- Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue qui est une fonction est liée à ses dérivées successives.
- Résoudre une équation différentielle, c'est chercher toutes les fonctions solutions de cette équation.

Dans cette séquence, nous distinguerons deux catégories d'équations différentielles : les équations différentielles linéaires à coefficients constants sans second membre et les équations différentielles linéaires du 2nd degré coefficients à constants avec second membre.

I. Equations différentielles linéaires à coefficients constants sans second membre.

Nous en avons de trois types :

❖ **Equation différentielle du type :**
 $y' = f(x)$

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle K .

Les solutions de l'équation différentielle $y' = f(x)$ sur K sont les primitives sur K de la fonction f .

❖ **Equation différentielle du type :**
 $ay' + by = 0 \text{ (} a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \text{)}$

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = ke^{-\frac{b}{a}x} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

❖ **Equation différentielle du type** $ay'' + by' + cy = 0$ **avec** $a \in \mathbb{R}^*$ **et** $(b, c) \in \mathbb{R}^2$.

A cette équation différentielle, on associe l'équation : $ar^2 + br + c = 0$ d'inconnue r dans $\mathbb{C}$.

Cette équation est appelé **équation caractéristique associée cette équation différentielle**. Pour résoudre cette équation différentielle, il faut d'abord résoudre obligatoirement l'équation caractéristique qui y est associée. Soit (E) cette équation différentielle et (E') l'équation caractéristique associée.

Si (E') admet :	Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :
Une double racine r_0 (cas où $\Delta=0$)	$f(x) = (Ax + B)e^{r_0x}$, $(A ; B) \in \mathbb{R}^2$
Deux racines distinctes réelles r_1 et r_2 (cas où $\Delta > 0$)	$f(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ $(A ; B) \in \mathbb{R}^2$
Deux racines complexes conjuguées $\alpha - i\beta$ et $\alpha + i\beta$ (cas où $\Delta < 0$)	$f(x) = (A \cos \beta x + B \sin \beta x)e^{\alpha x}$ $(A ; B) \in \mathbb{R}^2$

II. Equations différentielles linéaires du 2nd degré à coefficients constants avec second membre.

Les équations différentielles linéaires à coefficients constants avec second membre se présentent sous la forme :

$$(E) : ay'' + by' + cy = f(x)$$

Avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ et $f(x)$ une fonction **non nulle**.

En Terminale, on n'autorise pas la résolution directe de cette équation. Pour cela, les

exercices vont vous ramener à la résoudre par étapes.

- D'abord, on peut vous demander de résoudre l'équation particulière (E') :
 $ay'' + by' + cy = 0$.
- Par la suite, on peut demander de déterminer deux réels a et b ou a , b et c pour que la fonction
 $\varphi(x) = (ax^2 + bx + c)e^{\alpha x}$,
 $(\alpha \in \mathbb{R}, \text{ et } a, b \text{ et } c \text{ des réels non tous nuls})$
 soit solution de cette équation (E).
 φ doit vérifier la relation $a\varphi'' + b\varphi' + c\varphi = f(x)$. Il suffit donc de dériver deux fois φ , de remplacer dans l'équation (E) et de procéder par identification pour trouver les réels demandés.
- En outre, on vous demande de démontrer qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si $g - \varphi$ est solution de (E').

L'expression '*si et seulement si*' montre qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Donc la démonstration devrait se faire en deux étapes :

1^{ère} étape :

On suppose que g est solution de (E).
 Puis on démontre que si g est solution de (E)
 $\Rightarrow g - \varphi$ solution de (E'). ❶

2^{ème} étape :

On suppose que $g - \varphi$ solution de (E').
 Puis on démontre que si $g - \varphi$ est solution de (E')
 $\Rightarrow g$ solution de (E). ❷

Conclusion :

De ❶ et ❷, nous avons deux implications réciproques, preuve que la proposition est vraie.

- Enfin, on vous demande de résoudre l'équation (E). Ici, on déduit les solutions de tout ce qui a été fait.

Soit h_k les fonctions solutions de l'équation particulière (E'). Nous savons que les solutions de (E) sont les fonctions g sous condition que $g - \varphi$ soit solution de (E').

Si $g - \varphi$ est solution de (E') alors $g - \varphi = h_k$.

Donc $g = h_k + \varphi$.

Les solutions de (E) sont alors les fonctions g définies par :

$$g(x) = h_k(x) + \varphi(x)$$

où h_k est solution de l'équation particulière et φ une solution particulière de l'équation (E).

Séquence d'apprentissage n° 12:

Probabilités

Introduction

On attribue en général à **Blaise Pascal** et à **Pierre de Fermat** l'invention au XVII^e siècle d'une première approche de la théorie des probabilités appliquée aux jeux de hasard, même si **Jérôme Cardan** s'était déjà penché sur la question dès le XVI^e siècle.



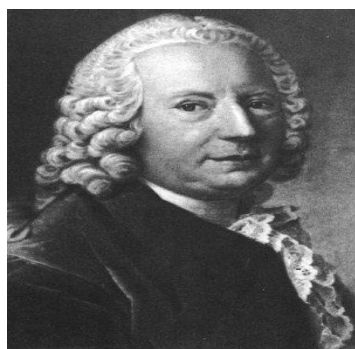
(Blaise Pascal)

Cinquante ans plus tard, dans son ouvrage posthume *Ars conjectandi* (1713), **Jacques Bernoulli** systématise le calcul des probabilités, en énonçant des



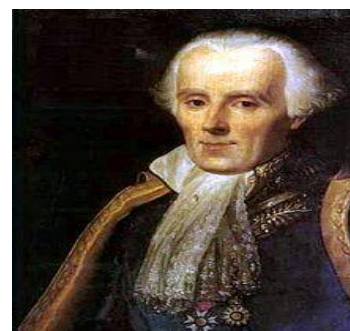
(Pierre de Fermat)

théorèmes prometteurs tels que l'additivité des probabilités. Au même moment, en Angleterre, **Abraham de Moivre** introduit la notion de loi normale dans son



(Jacques Bernoulli)

œuvre *Doctrine of Chances*. Grace aux nombreux travaux de recherche d'autres Mathématiciens comme **Laplace, Émile Borel, Bayes, Moivre, Tchebytchev, Poisson, Andreï Kolmogor**



(Pierre-Simon de Laplace)

et bien d'autres encore, les Probabilités ont aujourd'hui connu de succès éclatants et représentent un pilier incournable dans certains domaines d'assurance, de prévision et de gestion de risques tels que l'Actuariat, l'épidémiologie, etc

SOMMAIRE

I. Analyse combinatoire.

II. Calcul de probabilité.

III. Variable aléatoire réelle-Schéma de Bernoulli.

I. Analyse combinatoire.

Dans notre vie, nous faisons des expériences dont on peut compter le nombre de résultats possibles. Mais parfois, certaines de nos expériences nous exposent devant une multitude de résultats dont le décompte n'est pas toujours aisé. L'analyse combinatoire nous fournit un certain nombre de théorèmes pouvant nous permettre de dénombrer les résultats possibles de nos épreuves.

Nous allons scruter ces différents théorèmes à travers les notions sur les ensembles, le comptage, les p-listes, les arrangements, les permutations et les combinaisons.

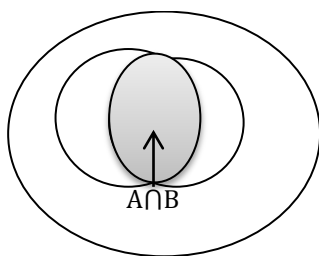
1. Notion sur les ensembles

Un ensemble fini est un ensemble dont on peut compter les éléments.

Si E est un élément fini, on note $\text{card}E$, le nombre des éléments de E . Ω est l'ensemble fini ; A et B sont deux sous-ensemble de Ω .

❖ Intersection de deux ensembles finis.

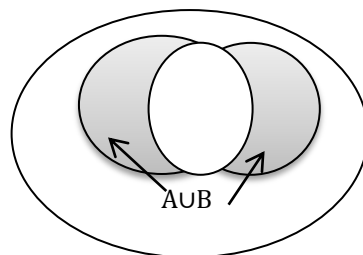
L'intersection de A et B est l'ensemble noté $A \cap B$, constitué des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B .

**❖ Réunion de deux ensembles finis**

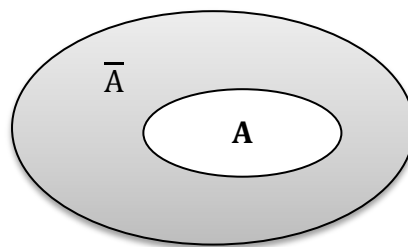
La réunion de A et B est l'ensemble noté $A \cup B$, constitué des éléments qui appartiennent à A ou à B .

On a ainsi :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B - \text{Card}(A \cap B).$$

**Complémentaire d'un ensemble fini**

Le complémentaire de A dans Ω est l'ensemble noté C_{Ω}^A ou $\bar{A}$ constitué des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A .

**❖ Ensemble finis disjoints**

Deux ensembles A et B sont disjoints si $A \cap B = \Phi$, Φ étant l'ensemble vide.

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B.$$

❖ Produit cartésien de deux ensembles finis.

Le produit cartésien de A par B est l'ensemble noté $A \times B$, constitué des couples $(x; y)$ où $x \in A$ et $y \in B$.

A \ B	a	b	c
x	(a; x)	(b; x)	(c; x)
y	(a; y)	(b; y)	(c; y)

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}A \times \text{Card}B.$$

Retenons :

- ♠ Les notions sur les ensembles mettent l'accent sur la notion **des diagrammes** ; ces derniers nous permettant de déterminer le nombre d'éléments que comptent la réunion, l'intersection des ensembles...
- ♠ Le produit cartésien nous permet en général de déterminer le nombre de couples qu'on peut former avec des éléments de deux ensembles...

2. Principe de comptage**Propriété**

Si r expériences sont effectuées telles qu'il y a n_1 résultats possibles pour la 1^{ère} expérience et que pour chacun de ces n_1 résultats il y a n_2 résultats possibles pour la 2^{ème} expérience, et que pour chacun des résultats possibles des deux premières expériences il y a n_3 résultats possibles pour la 3^{ème} expérience, et que ... alors il y a :

$$N = n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_r$$

résultats possibles pour les r expériences.

3. P-uplets ou P-listes**Définition**

E est un ensemble fini ayant n éléments. Une liste de p éléments de E est une suite ordonnée $(a_1 ; a_2 ; \dots ; a_p)$ de p éléments de E .

Une liste de p éléments de E s'appelle aussi **p –liste** ou **p –uplets**.

Propriétés

Dans un ensemble fini ayant n éléments, le nombre N de listes de p éléments est

$$N = n^p$$

Explication de la formule.

On veut former une liste de p éléments des n éléments d'un ensemble. Comme dans une liste, le même élément peut revenir plus d'une fois, alors on aura à faire p épreuves :

1^{ère} épreuve : on choisit un élément parmi les N éléments. On a n choix possibles.

2^{ème} épreuve : On remet l'élément choisi et on choisit encore un élément parmi les n éléments. On a n choix possibles.

⋮

p ^{ième} épreuve : On refait la même chose.

Finalement, le nombre N de résultats possibles est :

$$N = n \times n \times \dots \times n \text{ } p \text{ fois.}$$

$$\text{Soit } N = n^p.$$

Remarque :

De ce qui précède, si on doit former une liste à **$n+m$ éléments à partir de deux ensembles A et B à compositions différentes** où A est composé au total de X élément et donne n éléments dans la liste et B est composé de Y éléments et en donne m dans la liste, on serait tenté de dire que le nombre de résultats possibles est $N = X^n \times Y^m$ dans la mesure où on doit choisir n éléments parmi les X de A et m parmi les Y de B . **Ceci n'est pas tout à fait juste.**

En effet, cette expérience est composée de deux étapes. La première est qu'il faut choisir n éléments parmi les X de A et m parmi les Y de B puis ensuite classer les éléments choisis. Pour donc trouver le nombre de résultats possibles, il faut dénombrer le nombre de classements possibles que l'on peut faire avec les éléments choisis puis multiplier ce résultat par le nombre de résultats possibles pour un choix quelconque.

Si p désigne le nombre de classement qu'on réaliser avec les éléments tirés, alors le nombre de résultats possibles est :

$$N = X^n \times Y^m \times p$$

Retenons

- En dénombrement, dans les calculs, le terme “**et**” se traduit par $\times$ et les termes “**ou**” “**ou bien**” se traduisent par $+$
- Dans le cas de p – **listes**, lorsqu'il s'agit d'un tirage, le tirage est **effectué successivement avec remise**. Donc un même élément peut se répéter plusieurs fois. C'est pourquoi on dit intuitivement ou de façon populaire qu'il n'y a pas d'ordre. Mais **attention !!!**

Pour des fins explicatives, on va distinguer **deux types d'ordre** :

1^{er} ordre : C'est l'ordre axé sur l'organisation du tirage ou indiquant la répétition. Comme il y a répétition dans les p -listes, alors, tout devient confus, brouillé ou mélangé. C'est de ce 1^{er} ordre on parle de façon populaire ou ordinaire en disant qu'il n'y a pas d'ordre au niveau de p -liste.

2^{ème} ordre : C'est l'ordre de succession des éléments tirés ou l'ordre dans lequel on a tiré les éléments. Ici, l'ordre s'impose toujours. Pour dénombrer le nombre d'ordre, on va se baser sur la notion d'**anagramme**. L'anagramme d'un mot indique le nombre de mots (existants ou non), qu'on peut former avec les lettres de ce mot ; ou en encore c'est le **nombre de permutations distinctes** qu'on peut faire avec les lettres de ce mot. Pour trouver l'anagramme d'un mot, on compte le nombre de lettres que comporte ce mot puis le nombre de fois qu'une lettre se répète et on fait le rapport du factoriel du nombre total de lettres et du factoriel nombre de répétition de

chaque lettre. Par exemple, l'**anagramme** de **GABARRI** s'écrit : $\frac{7!}{1!2!1!2!1!} = 1260$.

Généralisation du nombre de tirages à partir de plusieurs ensembles.

Propriété :

Soient $E_1, E_2, \dots, E_r$ des ensembles finis comportant respectivement des échantillons $N_1, N_2, \dots, N_r$ d'éléments indiscernables. Si on veut réaliser une liste à n éléments à partir des ensembles $E_1, E_2, \dots, E_r$ tels qu'on doit tirer n_1 éléments dans l'ensemble E_1 , n_2 dans E_2 , ..., n_r dans E_r , alors le nombre N de résultats possibles est :

$$N = N_1^{n_1} \times N_2^{n_2} \times \dots \times N_r^{n_r} \times \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_r!}$$

4. Arrangement

Définition

E est un ensemble fini ayant n éléments et p est un entier naturel tel que : $0 \leq p \leq n$. Un arrangement de p éléments de E est une liste $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ de p éléments E dont les éléments sont deux à deux distincts.

Un arrangement de p éléments de E s'appellent aussi **p -arrangement**.

Un arrangement de n éléments de E est une **permutation**.

Propriété 1

Dans un ensemble fini ayant n éléments, le nombre d'arrangement de p éléments est le nombre noté A_n^p et défini par :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1).$$

En effet,

si on doit réaliser une liste arrangée à p éléments à partir d'un ensemble comportant au total N éléments, on doit faire p épreuves :

1^{ère} épreuve : on choisit un élément parmi les N éléments. On a n choix possibles.

2^{ème} épreuve : On **ne remet plus l'élément** choisi puis choisit encore un élément parmi les $n-1$ restant. On a $n-1$ choix possibles.

⋮

p ^{ième} épreuve : On refait la même chose. On a $n-p+1$ résultats possibles.

Finalement, le nombre N de résultats possibles est : $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)$.

Dans un ensemble fini ayant n éléments le nombre de permutations est noté A_n^p est définie par :

$$A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1.$$

Le nombre A_n^n est noté **$n!$** Et se lit : « **factoriel n** ».

A_n^p se calcule aussi de la manière suivante :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Propriété 2

Soit $E_1, E_2, \dots, E_r$ des ensembles finis comportant respectivement des échantillons $N_1, N_2, \dots, N_r$ d'éléments indiscernables.

Si on veut réaliser un arrangement à n éléments à partir des ensembles $E_1, E_2, \dots, E_r$ tels qu'on doit tirer n_1 éléments dans l'ensemble E_1 , n_2 dans E_2 , ..., n_r dans E_r , alors le nombre N de résultats possibles est :

$$N = A_{N_1}^{n_1} \times A_{N_2}^{n_2} \times \dots \times A_{N_r}^{n_r} \times \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_r!}$$

Retenons :

♣ Dans le cas des tirages, il s'agit d'un arrangement lorsque le tirage est fait **successivement et sans remise**. Donc un même élément ne peut pas se répéter ou ne peut pas être tiré plus d'une fois. C'est dire que les éléments d'un arrangement sont deux à deux distincts. Ici, l'ordre importe.

♣ Soit $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$

Nous avons jusqu'à présent utilisé le rapport $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_r!}$ pour dénombrer l'ordre pour des tirages.

☞ Il faut comprendre que ce ratio est le nombre de permutations différentes de n objets parmi lesquels n_1 sont indiscernables, (identiques entre eux, indissociables), n_2 autres indiscernables entre eux, ..., et n_r indiscernables entre eux.

☞ C'est également **le nombre de manière de ranger n objets dans r groupes** de tailles respectives $n_1, n_2, \dots, n_r$ où le 1^{er} groupe contient n_1 , le 2^{ème} n_2 , ..., le r ^{ième} n_r .

5. Combinaison

Définition

E est un ensemble fini ayant n éléments et p est un entier naturel tel que : $0 \leq p \leq n$. Une combinaison de p éléments de E est une partie $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ de p éléments E . Une combinaison de p éléments de E s'appelle aussi **p – combinaison**.

Propriété 1

Dans un ensemble fini ayant n éléments, le nombre de combinaisons de p éléments est le nombre noté **C_n^p ou $\binom{n}{p}$** et définie par :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

En effet, ici l'expérience résulte en une seule épreuve où il faut choisir d'un seul trait les p éléments. Puisqu'il n'y a pas un ordre dans lequel les éléments sont tirés, (*les p éléments forment un échantillon, un ensemble...*), alors on aura plus à faire de permutation des p éléments choisis. **C'est pourquoi on divise nos p -arrangement par p** : d'où la formule !!.

Propriété 2

Soit $E_1, E_2, \dots, E_r$ des ensembles finis comportant respectivement $N_1, N_2, \dots, N_r$ éléments.

- ♣ Si on veut réaliser une combinaison à n éléments à partir des ensembles $E_1, E_2, \dots, E_r$ tels qu'on doit tirer n_1 éléments dans l'ensemble E_1 , n_2 dans E_2 , ..., n_r dans E_r ,
- ♣ Et arranger tous les éléments tirés, alors le nombre N de résultats possibles est :

$$N = C_{N_1}^{n_1} \times C_{N_2}^{n_2} \times \dots \times C_{N_r}^{n_r} \times \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_r!}$$

Formule du binôme de Newton

Pour tous nombres complexes a et b non nuls et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^n b^n$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

Retenons

- Dans un tirage, il s'agit de combinaison lorsque le tirage est fait de façon **simultanée** ou d'**un seul trait**. Parfois même, on peut

éviter tous ces termes et dire tout simplement qu'on **tire au hasard p éléments** d'un ensemble à n éléments. Il s'agit toujours de p combinaison des n éléments de l'ensemble .

- En combinaison, il n'y a pas d'ordre : ni l'ordre de répétition ni l'ordre de tirage. Tout est tiré , choisi en même temps et d'un seul trait.
- La conséquence qui s'en déduit est que le fait qu'on ne va pas dénombrer les permutations ici, rend petit le nombre de tirages par rapport à celui d'un arrangement qui est plus petit que celui de p -liste à cause de l'absence de répétition au niveau de l'arrangement. Ainsi, on définit la relation d'ordre total :

$$C_n^p \leq A_n^p \leq n^p$$

II. Calcul de probabilité

❖ Vocabulaire probabiliste

- On appelle **expérience aléatoire** ou **épreuve** toute expérience dont l'issue est imprévisible mais dont on connaît tous les résultats possibles.
- Chaque résultat de l'expérience aléatoire est appelé **éventualité**.
- L'**ensemble des éventualités** est appelé **univers des éventualités** ou **univers des possibles**. On l'appelle aussi espace échantionnal. On le note Ω .
- Tous sous-ensemble A de l'univers des éventualités est appelé **événement**.
- Le complémentaire de A dans Ω est aussi un **événement**. On l'appelle événement contraire de A et on le note $\bar{A}$ si aucune confusion n'est à craindre.

$$\text{On a : } A \cap \bar{A} = \Phi \text{ et } A \cup \bar{A} = \Omega.$$

- Tout évènement constitué d'une seule éventualité est appelé **évènement élémentaire**.
- Soit a une éventualité ; si $a \in A$, alors on dit que l'éventualité a réalise l'évènement A .
- L'ensemble vide noté $\emptyset$ est aussi un évènement. Aucune éventualité ne le réalise. On dit que c'est l'**évènement impossible**.
- Ω lui-même est aussi un évènement. Toutes les éventualités le réalisent : on dit que c'est l'**évènement certain**.
- Soit A et B deux évènements :
 - ✓ $A \cup B$ est l'évènement **A ou B**.
 - ✓ $A \cap B$ est l'évènement **A et B**.
 - ✓ Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **incompatibles**.
- Lorsque les sous-ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ de Ω sont chacun non vide, deux à deux incompatibles et leur réunion donne Ω alors on dit qu'ils forment une **partition de Ω** . Par conséquent, les évènements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment un **système complet d'évènement**.

❖ Probabilité d'un évènement.

➤ Définition

Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. On appelle **probabilité** sur Ω toute application p de $P(\Omega)$ dans $[0 ; 1]$ qui à tout évènement A associe le nombre réel $p(A)$ appelé probabilité de l'évènement A et qui vérifie les conditions suivantes :

- ☞ $p(\Omega) = 1$
- ☞ Si A et B sont deux évènements incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

➤ Propriétés

Soit p une probabilité définie sur un univers Ω et A et B deux évènements de Ω .

- $p(A) + p(\bar{A}) = 1$
- Si $A \subset B$, alors $p(A) \leq p(B)$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, alors on a :

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n).$$

NB :

- $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ alors on a :

$$p(w_1) + p(w_2) + \dots + p(w_n) = 1$$

Cette formule traduit que la somme des probabilités de tous évènements formant au complet Ω est égale à 1. Cette relation est aussi **très importante**.

- La **probabilité** d'un évènement n'est **jamais supérieure à 1**.

❖ Probabilité conditionnelle

A et B sont deux évènements de Ω et p une probabilité sur Ω telle que $p(B) \neq 0$. La probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé (ou probabilité conditionnelle de A sachant B) est notée $p_B(A)$ ou $p(A/B)$ est définie par :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Conséquence :

- Si A et B sont deux évènements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$, alors :

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)$$

C'est la formule de **probabilité composée de deux événements**.

- Si deux événements A et B sont indépendants, on a : $p_B(A) = p(A)$ et $p_A(B) = p(B)$. Ainsi, $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$
- $B_1; B_2; \dots; B_n$ constituant un système complet d'événement, la probabilité de tout événement A est donnée par :

$$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \dots + p(A \cap B_n)$$

III. Variable aléatoire-Epreuve de Bernoulli-Loi Binomiale

❖ Variables aléatoires

Soit un univers fini associé à une épreuve.

- Une variable aléatoire X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. Les différentes valeurs de la variable aléatoire X sont souvent notées $x_1, x_2, \dots, x_n$ (Que l'on suppose rangées dans l'ordre croissant).

L'ensemble $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est appelé univers image.

- L'application qui à chaque élément x_i de $X(\Omega)$ associe le réel $p_i = p(X = x_i)$ est appelée **la loi de probabilité de X** ou de façon systématique, **la fonction de masse de probabilité de X**.
- On la présente sous forme d'un tableau du type :

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

NB : La somme des probabilités dans le tableau d'une loi de probabilité est **toujours égale à 1**.

❖ Fonction de répartition

- ♣ La fonction de répartition de X est l'application notée F de $\mathbb{R}$ dans $[0; 1]$ qui à tout nombre réel x associe le réel F(x) défini par :

$$F(x) = p(X \leq x)$$

Dans la pratique, si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, on a :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in]-\infty; x_1[\\ p_1, & \text{si } x \in [x_1; x_2[\\ p_1 + p_2, & \text{si } x \in [x_2; x_3[\\ \vdots & \\ 1, & \text{si } x \in [x_n; +\infty[\end{cases}$$

- ♣ Pour tout réel a,

$$p(X > a) = 1 - p(X \leq a) = 1 - F(a)$$

- ♣ Si a et b sont des réels,

$$p(a \leq X \leq b) = p(X \leq b) - p(X \leq a)$$

D'où $p(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

Caractéristiques d'une variable aléatoire : espérance mathématique, variance, écart type.

- L'espérance mathématique de X est le nombre réel défini par :

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

- La variance de X est le nombre réel défini par :

$$V(x) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(x)]^2$$

On utilise la définition équivalente suivante :

$$V(x) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

avec $E(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i$.

➤ L'écart type de X est le nombre réel défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

❖ Epreuve de Bernoulli-Loi binomiale

- On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire ne conduisant qu'à deux résultats possibles. L'un des résultats est appelé **succès** et l'autre **échec**.
- La probabilité d'obtenir le succès est appelé le **paramètre de l'épreuve de Bernoulli**.
- On appelle **processus ou schéma de Bernoulli** toute succession de plusieurs épreuves de Bernoulli **identiques** et **indépendantes**.
- Le nombre d'épreuve de Bernoulli et la probabilité p d'obtenir le succès lors d'une épreuve des épreuves de Bernoulli sont appelés les paramètres du schéma de Bernoulli.
- Considérons un processus de Bernoulli de paramètre n et p et désignons par X la variable aléatoire réelle égale au nombre de succès obtenu à l'issue des n épreuves. On dit que **X suit une loi binomiale de paramètres n et p** .

➤ Loi de probabilité de X

Si X suit une loi Binomiale de paramètres n et p , alors la loi de probabilité de X ou de façon systématique la fonction de masse de probabilité de X est donnée par :

$$p(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

(k étant le nombre de succès obtenu à l'issue des n épreuves).

En effet, en effectuant une épreuve, dite de Bernoulli, soit nous avons un succès avec une probabilité p ou soit un échec avec une probabilité $1-p$, (puisque ici nous avons deux résultats possibles : échec ou succès ; ils forment donc un système complet d'événement). Si nous répétons l'épreuve n fois, nous aurons un certain nombre de succès et d'échecs.

Supposons que nous avons obtenu k succès, (k étant un entier naturel inférieur ou égal à n). Implicitement, nous avons $n - k$ échecs.

Donc on a : k succès et $n - k$ échecs, $\Rightarrow$

$$(p^k \times (1 - p)^{n-k})$$

Mais dans quel ordre les succès ont été obtenus ???

Nous n'avons aucune précision sur cela. Il faudrait donc dénombrer les permutations des k succès sur les n épreuves.

Comme nous avons à permuter les succès sur k espaces et les échecs sur $n - k$ espaces, alors le nombre de permutations possibles est :

$$\frac{n!}{k! (n - k)!} = C_n^k$$

C'est pourquoi la probabilité d'obtenir k succès sur les n épreuves est donnée par :

$$p^k \times (1 - p)^{n-k} \times \frac{n!}{k! (n - k)!} = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

➤ L'espérance mathématique et la variance de X

A partir de la définition de base de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire quelconque, on démontre et on admet que :

$$E(X) = n \cdot p$$

et

$$V(X) = n \cdot p(1 - p)$$

Retenons :

♣ L'espérance d'une variable aléatoire X , soit $E[X]$, est une moyenne pondérée des différentes valeurs que peut prendre la variable aléatoire X où le poids attribué à chaque valeur est la probabilité que X prenne cette valeur. En clair, c'est la valeur que peut prendre en moyenne la variable aléatoire X . Ainsi, dans les exercices portant sur les jeux, lorsque $E[X] < 0$, **le jeu est défavorable pour le joueur et favorable dans le cas contraire et si $E[X] = 0$, le jeu est équitable.**

♣ La variance d'une variable aléatoire X , soit $\text{Var}(X)$ est toujours positive étant donné qu'elle est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne, i.e $(E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E^2(X))$.

Une variance égale à zéro indique que la variable aléatoire prend **une seule valeur** avec **probabilité 1**. Une **petite variance** signifie que les valeurs prises par la variable aléatoire sont peu volatiles autour de la moyenne alors **qu'une variance élevée** est signe que les valeurs prises par la variable aléatoire seront dispersées autour de la moyenne.

♣ **L'écart-type** a les memes interprétations que la variance, puisque $\sigma(X) = \sqrt{V(x)}$ et donc va dans le meme sens que la variance, selon que celle-ci est grande ou petite...

Séquence d'apprentissage n°13 :

Suites numériques

Introduction

L' étude des suites de nombres réels a plusieurs champs d'application :

- Les suites représentent un modèle courant de description de phénomènes discrets, c'est-à-dire évoluant étape par étape. On s'intéresse en particulier au comportement à long terme, d'où l'importance de la notion de convergence.
- Les suites constituent également un outil d'étude approfondie des nombres réels. Elles fournissent par exemple des algorithmes d'approximation de nombres irrationnels comme $\sqrt{2}$, e ou π . L'idée de suite trouve sa source dans les méthodes d'approximations successives déjà utilisées par les **Babyloniens** 3000 ans avant J.-C. et brillamment mises en œuvre par **Archimède**. L'étude d'une suite comme un objet en lui-même naît avec l'étude des séries au XVIII^e siècle (**Euler, d'Alembert**).



Archimède, ((287 av. J.-C.-212 av. J.-C.), savant grec

SOMMAIRE

I. Généralités sur les suites numériques

II. Suites Arithmétiques – Suites Géométriques

III. Suites Arithmético-Géométriques

I. Généralités sur les suites numériques- Etude d'une suite numérique

❖ Définition

- Une suite numérique est une fonction définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.
- Soit (U_n) une suite numérique définie sur une partie E de $\mathbb{N}$.
 - ☞ L'image d'un élément $n \in E$ par la suite (U_n) est notée U_n .
 - ☞ La suite peut être aussi notée $(U_n)_{n \in E}$.
 - ☞ (U_n) est appelé **terme général ou terme d'indice n de la suite**.
- Soit $(U_n)_{n \in E}$ une suite numérique
 - ☞ (U_n) est une suite définie par sa formule explicite si et seulement si on a :
 - ☞ $\forall n \in E, U_n = f(n)$ où f est une fonction numérique.
 - ☞ (U_n) est une suite définie par récurrence si elle est définie par la donnée de son premier terme et d'une formule de récurrence de la forme $U_{n+1} = g(U_n)$ où g est une fonction numérique.

❖ Sens de variation d'une suite numérique

- Lorsque la **suite est explicite**, on étudie généralement son sens de variation en posant $U_n = f(n)$ et en étudiant le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
- Lorsque la **suite est récurrente**, on étudie généralement son sens de variation en étudiant le signe de $U_{n+1} - U_n$ sur son ensemble de définition. Si on a :
 - ☞ $U_{n+1} - U_n < 0$, alors (U_n) est **décroissante**.
 - ☞ $U_{n+1} - U_n > 0$ alors (U_n) est **croissante**.
 - ☞ $U_{n+1} - U_n = 0$ alors (U_n) est **constante**.

NB : On dit que (U_n) est monotone si elle est soit croissante ou soit décroissante.

❖ Suites majorées, minorées et bornées.

Soit $(U_n)_{n \in E}$ une suite réelle.

- (U_n) est **majorée** si et seulement si il existe un réel M tel que pour tout entier naturel $n, U_n \leq M$.
- (U_n) est **minorée** si et seulement si il existe un réel m tel que pour tout entier naturel $n, U_n \geq m$.
- (U_n) est **bornée** si et seulement si elle est minorée et majorée.
- Une suite (U_n) est bornée sur un ensemble E si et seulement s'il existe un réel $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in E, |U_n| \leq M$.

❖ Convergence d'une suite

➤ Définition

Soit (U_n) une suite numérique.

- La suite (U_n) est **convergente** lorsqu'elle admet une limite finie c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l, \quad (l \in \mathbb{R}).$$

On dit que (U_n) converge vers le réel l .

- La suite (U_n) est **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

➤ Calcul de limite d'une suite (U_n) définie par $U_n = f(n)$

Propriété

Soit (U_n) une suite définie par $U_n = f(n)$ où f est une fonction numérique :

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ($l \in \mathbb{R}$)

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \pm\infty$

➤ **Limite de l'image d'une suite numérique par une fonction**

Propriété

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle K et (U_n) une suite numérique :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = a$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, alors
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(U_n) = b$

NB : a et b peuvent être des nombres réels, $+\infty$ ou $-\infty$.

➤ **Limite d'une suite définie par une formule de récurrence**

Propriété :

Soit g une fonction contenue sur un intervalle K et (U_n) une suite à valeur dans K définie par la formule de récurrence $U_{n+1} = g(U_n)$.

Si (U_n) converge vers un réel l alors l est une solution dans K de l'équation $g(x) = x$.

➤ **Limite d'une suite monotone**

Propriété :

- Une suite décroissante et minorée est convergente.
- Une suite croissante et majorée est convergente.
- Une suite croissante et non majorée est divergente.
- Une suite décroissante et non minorée est divergente.

❖ **Limite et comparaison**

Propriété

Soient (U_n) et (V_n) deux suites numériques.

- S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $U_n \leq V_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l'$ alors $l \leq l'$.

- S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, on a $V_n \leq U_n \leq W_n$ où W_n est une suite numérique et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = l$ ($l \in \mathbb{R}$) alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$.
- S'il existe $l \in \mathbb{R}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, on a $|U_n - l| \leq V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$.
- S'il $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, on a $U_n \geq V_n$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$.
- S'il $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, on a $U_n \leq V_n$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$.

❖ **Limite des suites du type a^n et n^α avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$**

Propriété

- Si $a > 1$ et $\alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$.
- Si $0 < a < 1$ et $\alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = 0$.
- $\alpha < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$
- Si $\alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$

II. Suites Arithmétiques et Géométriques

❖ **Définition**

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{E}}$, une suite numérique.

- La suite (U_n) est **arithmétique** si et seulement s'il existe une constante réelle r telle que :

$$\forall n \in \mathbb{E}, U_{n+1} = U_n + r,$$

r est appelé la **raison** de la suite (U_n) .

- La suite (U_n) est **géométrique** s'il existe une constante réelle q telle que :

$$\forall n \in E, U_{n+1} = qU_n,$$

q est appelé la **raison** de la suite (U_n) .

❖ Expression du terme général

Soit (U_n) une suite numérique de 1^{er} terme U_p .

- Si (U_n) est une suite arithmétique de raison r , alors $\forall n \in E$, on a :

$$U_n = U_p + (n - p) \times r$$

- Si (U_n) est une suite géométrique de raison q , alors $\forall n \in E$, on a :

$$U_n = U_p \times q^{n-p}$$

❖ Somme de termes consécutifs d'une suite numérique

Soit (U_n) une suite numérique.

Posons : $S_p = U_k + U_{k+1} + \dots + U_{k+p-1}$

Dans cette somme, on a p termes consécutifs de (U_n) , (**nombre de terme** = indice du dernier terme – indice du 1^{er} terme + 1).

- Si (U_n) est une **suite arithmétique**, alors on a :

$$S_p = \text{nombre de termes de } S_p \times \left(\frac{\text{1er terme de } S_p + \text{dernier terme de } S_p}{2} \right)$$

Soit
$$S_p = \frac{p(U_p + U_{k+p-1})}{2}$$

- Si (U_n) est une **suite géométrique** de raison q avec $q \neq 1$, alors on a :

$$S_p = \text{1er terme de } S_p \times \frac{1 - q^{\text{nombre de terme}}}{1 - q}$$

Soit
$$S_p = U_k \times \frac{1 - q^p}{1 - q}$$

Retenons :

Soit x, y et z trois nombres.

☞ x, y et z sont dans cet ordre des termes consécutifs **d'une suite arithmétique** si et seulement si on a :

$$z = \frac{x + y}{2}$$

☞ x, y et z sont dans cet ordre des termes consécutifs **d'une suite géométrique** si et seulement si :

$$y^2 = x \times z$$

III. Suites Arithmético-Géométriques.

Déjà en classe Première, nous étudions les suites arithmético-géométriques associées à une autre suite dite « auxiliaire ». Mais ici, nous ferons un dépassement de cette étape en étudiant directement les suites arithmético-géométriques.

(u_n) est une suite arithmético-géométrique lorsque sa formule de récurrence est de la forme :

$$u_{n+1} = au_n + b,$$

où a et b sont des réels et a non nul.

(u_n) est dite suite arithmético-géométrique de **raison géométrique a et de raison arithmétique b** .

☞ Le terme général d'une telle suite est donné par :

$$\boxed{u_n = a^n(u_0 - r) + r} \text{ où } r = \frac{b}{1-a}$$

☞ Si S_n désigne la somme des n premiers termes de cette suite, c'est-à-dire que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k, \text{ alors on a:}$$

$$\boxed{S_n = (u_0 - r) \times \frac{1-a^n}{1-a} + nr} ; r = \frac{b}{1-a}$$

Remarque

- La suite arithmétique est un cas particulier de la suite arithmético-géométrique où la raison géométrique a est égal à 1.
- La suite géométrique est aussi un cas particulier de la suite arithmético-géométrique où la raison arithmétique b est égal à 0.

Séquence d'apprentissage n°14:

Statistiques

Introduction

Les Statistiques sont nées vers le II^e millénaire av. J.-C., où les Chinois étudiaient déjà les chiffres de leurs productions agricoles, tandis que les Égyptiens organisaient des recensements de leur population. La Bible mentionne également dans le Livre des Nombres et dans le Livre des Chroniques des travaux statistiques.

Au début du XVI^e siècle, on commence à tenir en Angleterre un registre des décès et des naissances. En **1662**, l'Anglais **John Graunt** constate une certaine constance dans le rapport du nombre de naissances féminines à celui des naissances masculines. Cette observation est le prélude aux développements du XVIII^e siècle qui voient les statistiques servir de base à des prévisions. Mais c'est seulement au XIX^e siècle qu'on découvre que la théorie des probabilités constitue une aide précieuse à la méthode statistique. Ce rapprochement, déjà perçu par **Laplace**, est l'œuvre d'**Adolphe Quételet**, statisticien belge qui est à l'initiative du premier congrès international de statistiques en 1853. Dès lors, la statistique se développe dans la plupart des sciences, donnant notamment naissance à la mécanique statistique.



Adolphe Quételet, (1796-1874), astronome, mathématicien et statisticien belge

SOMMAIRE

I. Séries présentant un regroupement en classe.

II. Séries Statistiques à deux caractères.

I. Séries présentant un regroupement en classe.

On a vu en classe de seconde que, pour réaliser l'étude statistique d'un caractère quantitatif pouvant prendre toute valeur sur un intervalle I, on regroupe parfois ces valeurs par classes. Ces classes sont des intervalles qui forment une partition de I.

Dans cette leçon, on ne considère que des séries statistiques à modalités regroupées en classe. Une telle série, comportant p classes de bornes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$ ($a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_p$), est notée :
 $([a_{i-1}; a_i[, n_i), 1 \leq i \leq p$, où n_i est l'effectif de la classe $[a_{i-1}; a_i[$.

❖ Effectifs cumulés, Fréquences cumulées.

De façon générale, pour une série statistique $([a_{i-1}; a_i[, n_i), 1 \leq i \leq p$:

- l'effectif cumulé croissant de la classe $[a_{k-1}; a_k[$ est :

$$\sum_{i=1}^k n_i = n_1 + n_2 + \dots + n_k;$$

- l'effectif cumulé décroissant de la classe $[a_{k-1}; a_k[$ est :

$$\sum_{i=k}^p n_i = n_k + n_{k+1} + \dots + n_p.$$

❖ Polygone des effectifs et des fréquences cumulés.

- Le polygone des effectifs cumulés croissants (respectivement décroissants) est la ligne brisée reliant les points consécutifs du graphique des effectifs cumulés croissants (respectivement décroissants).
- Si on suppose que la répartition des individus dans chaque classe est régulière, pour tout point M de coordonnées $(x; n)$ du polygone des effectifs cumulés croissants (respectivement décroissants), n est le nombre

d'individus dont la modalité est inférieure (respectivement supérieure) à x .

❖ Caractéristiques de position**➤ Classe modale**

Soit une série statistique présentant un regroupement par classes.

On appelle **classe modale** de cette série, toute classe d'effectif maximal.

Remarque :

- ☞ Une série statistique peut avoir plusieurs classes modales.
- ☞ Le **centre** d'une classe modale est appelée **mode** de la série statistique.

➤ Médiane

Soit une série statistique présentant un regroupement en classes, d'effectif total N.

On appelle **médiane** de cette série, le nombre M tel que le nombre d'individus de modalité supérieure à M et le nombre d'individus de modalité inférieure à M soient tous deux égaux à $\frac{N}{2}$.

Remarque :

La détermination de la médiane se fait aussi à l'aide des polygones des fréquences cumulés croissantes ou décroissantes. C'est l'abscisse du point de ces polygones qui a pour ordonnée 50%.

➤ Moyenne.

Soit $([a_{i-1}; a_i[, n_i), 1 \leq i \leq p$, une série statistique.

On appelle **moyenne** de cette série, la moyenne $\bar{x}$ de la série statistique $(c_i, n_i)_{1 \leq i \leq p}$ où c_i est le centre de la classe $[a_{i-1}; a_i[$.

Si N est l'effectif total de la série, on a :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i x_i$$

❖ Caractéristiques de la dispersion.

Soit $([a_{i-1}; a_i[, n_i), 1 \leq i \leq p$, une série statistique d'effectif total N et de moyenne $\bar{x}$. Pour tout nombre entier i tel que $1 \leq i \leq p$, on désigne par x_i le centre de la classe $[a_{i-1}; a_i[$.

- **L'écart moyen** est le nombre réel e_m tel

que :
$$e_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i |x_i - \bar{x}|.$$

- **La variance** est le nombre réel V tel que :

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2.$$

- **L'écart type** est le nombre réel σ tel que :
 $\sigma = \sqrt{V}.$

Remarque :

Dans la pratique, le calcul de la variance se fait à l'aide de la formule de **Koenig** :

$$V = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i x_i^2 \right) - \bar{x}^2$$

II. Séries Statistiques à deux caractères.

❖ Point moyen d'un nuage de points

On appelle **point moyen** du nuage de points de la série (x_i, y_j, n_{ij}) , le point $G(\bar{x}; \bar{y})$ où $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont les moyennes respectives des séries (x_i, n_i) et (y_j, n_j) .

❖ Détermination de la covariance

♣ La covariance entre deux variables X et Y qu'on note $\text{Cov}(X; Y)$ est une quantité mathématique qui permet de mesurer le lien ou la dépendance entre ces deux caractères. Si X augmente est-ce que Y diminue ou

augmente? Inversement, si X diminue, est-ce que Y diminue ou augmente? C'est bien sûr la covariance qui nous permettra de répondre à ces questions.

Ici, nous n'allons pas donner une interprétation en détail de la covariance. On se contentera d'analyser nos résultats à partir du coefficient de corrélation linéaire r que nous exposerons plus loin.

♣ La détermination de la covariance peut se faire suivant la forme du tableau statistique que l'on utilise. On distingue deux cas :

- **1^{er} cas :** Tableau simple de la forme :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
y_j	y_1	y_2	...	y_n

N : effectif total

Dans ce cas, la covariance entre X et Y donne :

$$\text{Cov}(X; Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i y_j - \bar{x} \bar{y}$$

- **2^{ème} cas :** Tableau à double entrée de la forme :

$x_i \backslash y_j$	y_1	y_2	...	y_n	Total
x_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1n}	n_1
x_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2n}	n_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_p	n_{p1}	n_{p2}	...	n_{pn}	n_p
Total	n_1	n_2	...	n_p	N

Dans ce cas, la covariance est donnée par :

$$\text{Cov}(X; Y) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p n_{ij} x_i y_j - \bar{x} \bar{y} \right)$$

Remarque : il faut voir que

$$\text{Cov}(X; X) = V(X)$$

❖ Nuage de points

Dans un plan rapporté à un repère orthogonal, l'ensemble des points M_{ij} de coordonnées $(x_i; y_j)$ d'**effectif non nul** de la série statistique à deux variables (x_i, y_j, n_{ij}) est appelé nuage de points.

❖ Ajustements

Suivant la forme du nuage de points $M_{ij}(x_i; y_j)$, on peut essayer de trouver une fonction qui modélise le lien entre les deux caractères X et Y, de telle façon que la courbe d'équation $y = f(x)$ passe le « plus près possible » du nuage de points.

➤ Ajustement affine par la droite des moindres carrés

On démontre et nous admettons que pour un nuage de points donné, il existe deux droites qui réalisent le meilleur ajustement au sens des moindres carrés ordinaires. Ces droites s'appellent **droites de régression**.

- L'une appelée droite de régression de y en x a une équation de la forme : $y = ax + b$.
- L'autre appelée droite de régression de x en y a une équation de la forme : $x = a'y + b'$.

Propriété

- Pour la droite de régression de y en x, admettant pour équation $y = ax + b$, on a :

$$a = \frac{\text{cov}(X; Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{y} - a\bar{x} \text{ avec}$$

$$V(X) = \frac{\sum_{i=1}^n n_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^p n_i} \text{ ou}$$

$$V(X) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^p n_i x_i^2 \right) - (\bar{x})^2 \text{ la variance de la série } (x_i, n_i).$$

- Pour la droite de régression de x en y, admettant pour équation $x = a'y + b'$, on a :

$$a' = \frac{\text{cov}(X; Y)}{V(Y)} \text{ et } b' = \bar{x} - a'\bar{y} \text{ avec}$$

$$V(Y) = \frac{\sum_{j=1}^p n_j (y_j - \bar{y})^2}{\sum_{j=1}^p n_j} \text{ ou}$$

$$V(Y) = \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^p n_j y_j^2 \right) - (\bar{y})^2 \text{ la variance de la série } (y_j, n_j).$$

➤ Ajustement linéaire par la méthode de Mayer

La méthode de Mayer consiste à partager la série double en deux sous séries d'effectifs égaux (à une unité près car le nombre de valeurs peut être impair). On calcule les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 de chaque sous série.

La droite $(G_1 G_2)$ est une droite d'ajustement du nuage passant par le point $G(\bar{x}, \bar{y})$ appelée **droite de Mayer du nuage**.

➤ Qualité d'ajustement linéaire.

La qualité d'ajustement linéaire se mesure par le **coefficient de corrélation linéaire r**. Le coefficient de corrélation noté r est définie

$$\text{par : } r = \frac{\text{Cov}(X; Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

avec σ l'écart-type. Donc r devient :

$$r = \frac{\text{Cov}(X; Y)}{\sqrt{V(X) \times V(Y)}}$$

Propriété

- r a le même signe que la covariance.
- $-1 \leq r \leq 1$

Interprétation du coefficient de corrélation linéaire r .

- Si $|r|=1$, alors on dit que l'ajustement est parfait. Dans ce cas, les résultats sont fiables.
- Si $0,87 \leq r < 1$, alors on dit qu'il y a une forte corrélation entre les variables. Dans ce cas, les résultats sont encore fiables.
- Si $|r| < 0,87$, alors on dit que la liaison entre les deux variables est lâche. Dans ce cas, les résultats ne sont pas fiables.
- Si $|r|$ est voisin de 0, on dit qu'il y a indépendance linéaire statistique.

S A n°3 : **Lieux géométriques dans le plan**

CONTENU

Séquence d'apprentissage n°1 :

Isométries du plan

Séquence d'apprentissage n°2 :

Applications affines du plan

Séquence d'apprentissage n°3 :

Coniques

Séquence d'apprentissage n°4 :

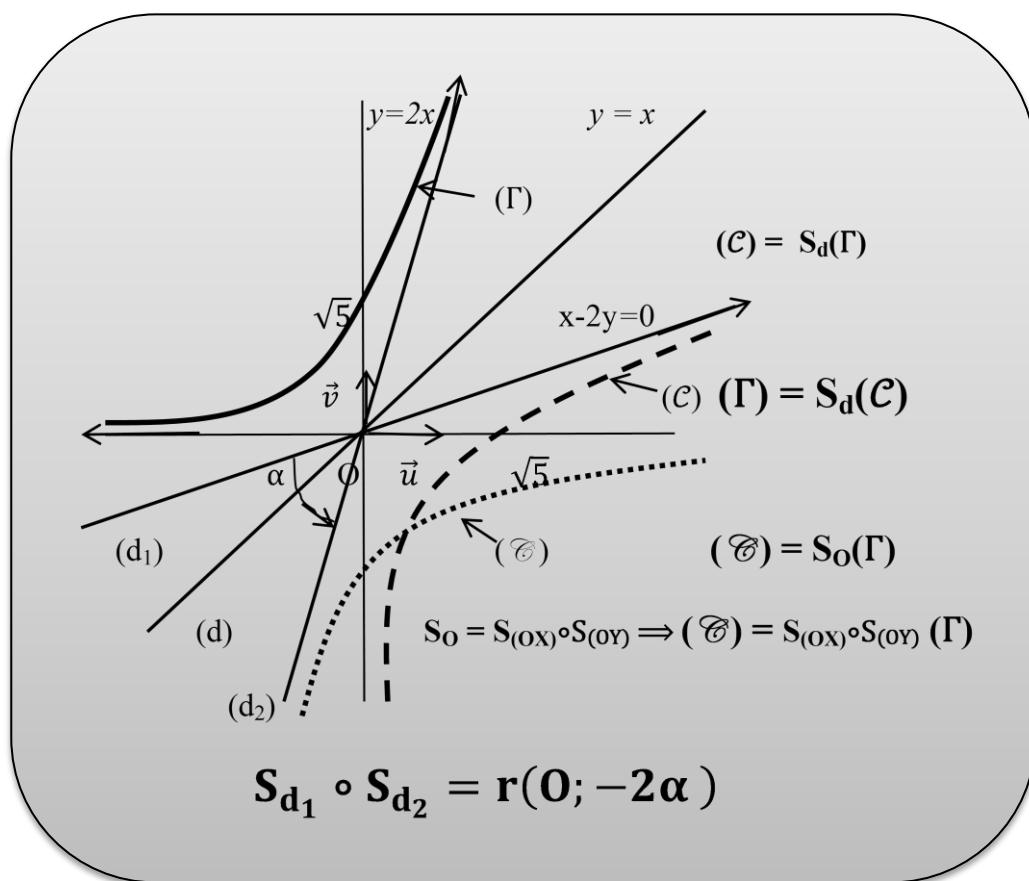
Similitudes planes

Séquences d'apprentissage 1 & 2 :

Isométries du plan-Applications affines

Introduction

En classe Premières C & E, nous avons déjà exploré des isométries du plan et des applications affines. Ici, nous allons approfondir ces notions en étudiant d'autres types de composition et de décomposition d'isométries notamment la symétrie glissée et autres. Cette étude s'étendra à l'étude des fonctions où nous parlerons de l'image d'une courbe par une symétrie glissée, par une rotation, par les symétries orthogonales et centrales, par les translations, par l'affinité du plan et par d'autres transformations planes.



SOMMAIRE

- I. Composition et décomposition d'isométrie.
- II. Classification des isométries.
- III. Applications affines.

I. Composition et décomposition d'isométrie.

1) Définition et rappel de quelques propriétés.

❖ Définition

On appelle **isométrie plane**, toute application du plan dans lui-même qui conserve la distance.

Exemple : les translations, les symétries centrales, les symétries orthogonales, les rotations.

❖ Propriétés

P₁ : Soit f une isométrie.

Pour tous points A, B, C, D d'images respectives A', B', C', D' par f . On a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'}.$$

On dit que les isométries **conservent le produit scalaire**.

P₂ : Soit f une isométrie, $(A, a) ; (B, b) ; (C, c)$ des points pondérés et A', B', C' les images respectives des points A, B, C par f , G un point et G' son image par f .

G est le barycentre des points pondérés $(A, a) ; (B, b) ; (C, c)$ si et seulement si G' est le barycentre des points pondérés $(A', a) ; (B', b) ; (C', c)$. On dit que les isométries **conservent le barycentre**.

P₃ : Toute isométrie plane est une transformation et **sa réciproque est une isométrie plane**.

P₄ : Soit f une isométrie, A et B deux points distincts, d'images respectives A' et B' par f .

- L'image par f de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.

- L'image par f du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.
- L'image par f de la demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$.
- L'image par f du cercle (c) de centre O et de rayon r est le cercle de centre O' et de rayon r avec O' l'image de O par f .

P₅ :

- Les isométries conservent les angles non orientés.
- Les isométries conservent les aires.
- La composée de deux isométries est une isométrie.
- La réciproque d'une isométrie est une isométrie.
- **Un déplacement** est une isométrie qui conserve les angles orientés. Il s'agit des *translations, des rotations, des symétries centrales*.
- **Un antidéplacement** est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé. Il s'agit des *symétries orthogonales, (réflexions planes $\approx$ demi-tours dans le plan) et des symétries glissées*.

P₄ : Soit f et g deux isométries planes.

- Si f et g sont des déplacements, alors $g \circ f$ est un déplacement.
- Si f et g sont des antidéplacements, alors $g \circ f$ est un déplacement.
- Si f est un déplacement et g un antidéplacement, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des antidéplacements.
- Si f est un déplacement, alors f^{-1} est un déplacement.
- Si f est un antidéplacement, alors f^{-1} est un antidéplacement.

❖ Expression analytique de quelques isométries

Nous avons déjà abordé les translations et les symétries orthogonales au niveau des applications de l'espace, séquence 2 de la SA n°1.

Ici, nous allons plutôt parler des symétries centrales et des rotations.

Propriétés

Le plan affine est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soient $M(x; y)$ et $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ des points de ce plan.

- Si S_Ω est **une symétrie centrale** de centre Ω et qui prend M et le transforme en $M'(x'; y')$, alors S_Ω a pour expression analytique :

$$\begin{cases} x' - x_\Omega = -(x - x_\Omega) \\ y' - y_\Omega = -(y - y_\Omega) \end{cases}$$

- Si r est **une rotation de centre Ω et d'angle θ** et qui prend M et le transforme en $M'(x'; y')$, alors r a pour expression analytique :

$$\begin{cases} x' - x_\Omega = \cos(\theta)(x - x_\Omega) - \sin(\theta)(y - y_\Omega) \\ y' - y_\Omega = \sin(\theta)(x - x_\Omega) + \cos(\theta)(y - y_\Omega) \end{cases}$$

Remarques

☞ **La symétrie centrale** est un cas particulier de **la rotation** où l'angle de rotation est π . En conséquence, le seul déplacement laissant globalement invariant un seul point est la rotation.

☞ Ces formules sont fondamentales, car elles vous permettront par exemple de déterminer l'image d'une conique par l'une ou l'autre de ces deux isométries, etc (voir séquence prochaine).

☞ On peut également déterminer ces expressions analytiques à partir de leurs

écritures complexes une fois les similitudes planes étudiées...

2) Composition d'isométries❖ Translation et rotationPropriété 1

Soit (Δ) et (Δ') deux droites parallèles, O un point de (Δ) et O' son projeté orthogonal sur (Δ') . La composée $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ des symétries orthogonales d'axes (Δ) et (Δ') est la **translation** de vecteur $\overrightarrow{2OO'}$.

Propriété 2 :

Soit (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en un point O et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

La composée $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ des symétries orthogonales d'axes (Δ) et (Δ') est la **rotation** de **centre O** et d'angle $2(\vec{u}; \vec{u}')$.

Propriété 3 :

Soit r une rotation d'angle α non nul et t une translation. La composée $t \circ r$ ou $r \circ t$ est une **rotation** d'angle α .

Propriété 4 :

Soit r et r' deux rotations d'angles respectifs α et α' .

- Si $\alpha + \alpha'$ est **non nul**, alors $r' \circ r$ ou $r \circ r'$ est une **rotation** d'angle $\alpha + \alpha'$.
- Si $\alpha + \alpha'$ est **nul**, alors $r' \circ r$ ou $r \circ r'$ est une **translation**.

❖ Symétrie glissée

Soit (Δ) une droite de **vecteur directeur $\vec{u}$** . On appelle **symétrie glissée** d'axe (Δ) et de vecteur $\vec{u}$ la composée commutative de la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et de la translation de vecteur $\vec{u}$.

On a : $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$.

Propriétés

- Une symétrie glissée n'admet **pas de points invariants**.
- Si $\vec{v}$ est **un vecteur normal à (Δ)** alors la composée $t_{\vec{v}} \circ S_{\Delta}$ ou $S_{\Delta} \circ t_{\vec{v}}$ est une **symétrie orthogonale**. L'axe de cette symétrie orthogonale est la droite passant par le milieu d'un point et de son image par la composée. Cette droite (**l'axe**) est **parallèle à (Δ)** .
- Si $\vec{v}$ **n'est pas un vecteur normal à (Δ)** alors $t_{\vec{v}} \circ S_{\Delta}$ ou $S_{\Delta} \circ t_{\vec{v}}$ est une **symétrie glissée**.

NB : Les autres types de composition d'isométries ont été déjà explorés dans la SAN°1 au niveau de la séquence 2: Applications de l'espace.

Remarque :

On rappelle que les éléments caractéristiques d'une symétrie glissée sont : le vecteur et l'axe de la symétrie orthogonale tels que ce vecteur soit un vecteur directeur de l'axe. Donc dans le cas actuel (nous parlons du dernier point avant NB), $\vec{v}$ et Δ peuvent ne pas être directement les éléments caractéristiques de la symétrie glissée car $\vec{v}$ ne dirige pas forcément Δ .

➤ Détermination des éléments caractéristiques d'une symétrie glissée.

1^{er} cas :

$\vec{v}$ n'est pas normal à Δ . Si de plus, on constate que $\vec{v}$ dirige Δ , alors $\vec{v}$ et Δ sont **directement les éléments caractéristiques** de la symétrie glissée.

2^{ème} cas :

$\vec{v}$ n'est pas normal à Δ . Si de plus $\vec{v}$ ne dirige pas Δ , alors la symétrie glissée f est caractérisée par un vecteur $\vec{u}$ et une droite (D) . Prenons par exemple le cas où $f = t_{\vec{v}} \circ S_{\Delta}$. (1)

Le vecteur de translation

Avec les éléments caractéristiques de f , on peut écrire que :

$$f = t_{\vec{u}} \circ S_{(D)} = S_{(D)} \circ t_{\vec{u}}. \quad (2)$$

La composée $f \circ f$ à partir de l'écriture (1) de f donne :

$$f \circ f = (t_{\vec{v}} \circ S_{\Delta}) \circ (t_{\vec{v}} \circ S_{\Delta}).$$

Cette composition nous donne l'expression analytique de $f \circ f$. (a)

Par ailleurs, la composée $f \circ f$ à partir de l'écriture (2) de f donne :

$$f \circ f = (t_{\vec{u}} \circ S_{(D)}) \circ (S_{(D)} \circ t_{\vec{u}}) = t_{2\vec{u}}. \quad (b)$$

Ainsi, on a : (a) = (b). Ceci indique que l'expression analytique de $f \circ f$ représente l'expression analytique de la translation de vecteur $2\vec{u}$.

De cette expression analytique de $t_{2\vec{u}}$, on dégage les coordonnées du vecteur $\vec{u}$. Ou bien on choisit un point A et on trouve son image par $f \circ f$.

Le vecteur $\vec{u}$ dans ce cas est défini par :

$$\vec{u} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A f \circ f(A)}.$$

Axe de la symétrie orthogonale

En faisant la composée :

$$f \circ t_{-\vec{u}} = (t_{\vec{v}} \circ S_{\Delta}) \circ t_{-\vec{u}}$$

$=(\mathbf{S}_{(D)} \circ \mathbf{t}_{\vec{u}}) \circ \mathbf{t}_{-\vec{u}} = \mathbf{S}_{(D)}$, on trouve l'expression analytique de $\mathbf{S}_{(D)}$ à partir de laquelle on détermine (D).

On peut trouver également l'axe (D) autrement. **Un point de (D)** est le point J milieu de $[\mathbf{OO}']$ où $\mathbf{O}'$ est l'image de $\mathbf{O}$ par f . Comme $\vec{u}$ dirige (D), alors on écrit une représentation paramétrique plane de (D) à partir de laquelle on déduit son équation cartésienne.

3) Décomposition d'isométries.

Propriétés

P₁ : Soit $\mathbf{t}_{\vec{u}}$ une **translation** de vecteur non nul. Pour toute droite Δ de vecteur normal $\vec{u}$, il existe une droite Δ' et une seule parallèle à Δ telle que $\mathbf{t}_{\vec{u}} = \mathbf{S}_{\Delta'} \circ \mathbf{S}_{\Delta}$.

P₂ : Soit $\mathbf{r}(\mathbf{O}, \alpha)$ la **rotation** de centre $\mathbf{O}$ et d'angle α . Pour toute droite Δ passant par $\mathbf{O}$, il existe une droite Δ' et une seule sécante en $\mathbf{O}$ à Δ telle que $\mathbf{r}(\mathbf{O}, \alpha) = \mathbf{S}_{\Delta'} \circ \mathbf{S}_{\Delta}$.

P₃ : Soit $\mathbf{S}_{(\Delta/\vec{u})}$ une **symétrie glissée** d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$. Il existe une et une seule translation de vecteur $\vec{u}$ et une droite symétrie orthogonale d'axe (Δ) telle que : $\mathbf{S}_{(\Delta/\vec{u})} = \mathbf{S}_{\Delta} \circ \mathbf{t}_{\vec{u}}$.

NB : La décomposition des symétries orthogonales et des symétries centrales a été déjà explorée au niveau des applications de l'espace dans la SAN°1.

Autre propriété.

Soit f une isométrie du plan et $\mathbf{A}$ un point. Il existe une unique isométrie g et une unique translation t telles que : $\mathbf{g}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ et $f = \mathbf{t} \circ g$.

Retenons

- ☞ Soit f une fonction donnée de variable réelle x et (c) sa courbe représentative. La courbe (Γ) de la fonction définie par $\mathbf{y} = f(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \mathbf{b}$ est l'image de (c) par la translation t de vecteur $\vec{u}(\mathbf{a}; \mathbf{b})$. On a donc $(\Gamma) = \mathbf{t}(\mathbf{c})$.
- ☞ Si f est une bijection et si on désigne par f^{-1} sa bijection réciproque représentée par ($\mathbf{c}'$), la courbe (Γ') de la fonction $\mathbf{y} = f^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \mathbf{b}$ est l'image de ($\mathbf{c}'$) par la translation t de vecteur $\vec{u}(\mathbf{a}; \mathbf{b})$. Ainsi, $(\Gamma') = \mathbf{t}(\mathbf{c}')$. Or ($\mathbf{c}'$) = $\mathbf{S}_{\Delta}(\mathbf{c})$ où Δ est la droite d'équation $y = x$. Donc , $(\Gamma') = \mathbf{t}[\mathbf{S}_{\Delta}(\mathbf{c})] = \mathbf{t} \circ \mathbf{S}_{\Delta}(\mathbf{c})$. Nous venons ainsi de montrer que (Γ') est l'image de (c) par une transformation plane qui peut être une **symétrie orthogonale ou une symétrie glissée**.
- ☞ Soit $\mathbf{y} = f(-\mathbf{x} + \mathbf{a}) + \mathbf{b} = f[-(\mathbf{x} - \mathbf{a})] + \mathbf{b}$. Une analyse attentive de cette fonction permet d'arriver à la conclusion que la fonction que f a été d'abord soumise une translation t de vecteur $\vec{u}(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ qui le transforme en $\mathbf{y}' = f(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \mathbf{b}$. La fonction $\mathbf{y}'$ a par la suite été soumise à la symétrie orthogonale d'axe l'axe des ordonnées qui le transforme définitivement en $\mathbf{y} = f[-(\mathbf{x} - \mathbf{a})] + \mathbf{b}$. La courbe ($\mathbf{c}_1$) de cette fonction est donc : $(\mathbf{c}_1) = \mathbf{S}_d \circ \mathbf{t}(\mathbf{c})$ où d est l'axe des ordonnées. Ainsi, par de simples analyses, on peut identifier la nature des transformations transformant une courbe en une autre.

II. Classification des isométries du plan.

Propriétés

P₁ :

- Toute isométrie du plan est soit une translation, soit une rotation, soit une symétrie orthogonale, soit une symétrie centrale ou soit une symétrie glissée.

Ces différents types d'isométries sont classés en deux catégories : les **déplacements** et les **antidéplacements**.

- Tout **déplacement** est soit une **translation**, soit une **rotation** ou soit une **symétrie centrale**.
- Tout **antidéplacement** est soit une **symétrie orthogonale** soit une **symétrie glissée**.

P₂ :

- Une isométrie du plan qui laisse **invariants trois points non alignés** est l'**application identique**.
- Une isométrie qui laisse invariants deux points A et B distincts et qui n'est pas l'application identique est la **symétrie orthogonale** d'axe, la droite (AB).

P₄ : Soit A, B, A' et B' quatre points du plan tels que : $AB=A'B'$ et $A \neq B$. Il existe un **déplacement** et un seul transformant A en A' et B en B'.

P₅ : Soit A, B, A' et B' quatre points du plan tels que : $AB=A'B'$ et $A \neq B$. Il existe un **antidéplacement** et un seul transformant A en A' et B en B'.

III. Applications affines.

❖ Définition

On appelle **application affine** du plan, toute application du plan dans lui-même qui conserve le barycentre de deux points.

❖ Propriétés

- La composée de deux applications affines est une application affine du plan.
- La réciproque d'une transformation du plan est une transformation du plan.

❖ Application vectorielle associée à une application affine.

➤ Définition

Soit f une application affine du plan et $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

On appelle **application vectorielle** associée à f l'application $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ telle que pour tous points A et B du plan, on a :

$$\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}.$$

➤ Propriétés

P₁ : Soit φ une application vectorielle associée à une application affine f. Pour tous vecteurs de $\mathcal{V}$ et pour tout réel α , on a :

- $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$
- $\varphi(\alpha\vec{u}) = \alpha\varphi(\vec{u})$

(On dit que φ est l'**application linéaire**)

P₂ : Une application affine du plan est déterminée par la donnée de 03 points non alignés et de leurs images.

P₃ : Soit f une application affine du plan. L'ensemble des **points invariants** par f est soit l'**ensemble vide**, soit un **singleton**, soit une **droite**, soit **le plan lui-même**.

P₄ : Soit f une application affine, (AB) une droite, A' et B' les images respectives de A et B par f.

- Si $A'=B'$ alors l'image de (AB) est le singleton $\{A'\}$.
- Si $A' \neq B'$, alors l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.

P₅ : Soit f une application affine du plan, (D) et (D') deux droites parallèles.

Si l'image de la droite (D) par f est une droite (Δ), alors l'image de la droite (D') par f est (Δ') telle que $(\Delta') // (\Delta)$.

P₄ : Soit f une application affine du plan.

- Si f est bijective, alors $f(P)=P$ où P est un plan.
- Si f n'est pas bijective, alors f(P) est soit un ensemble vide, soit une droite.

P₄ : Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, f une application du plan dans lui-même.

f est une **application affine** du plan si et seulement si elle admet une expression analytique de la forme :

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases} \text{ où } a, b, c, a', b' \text{ et } c' \text{ sont des nombres réels.}$$

sont des nombres réels.

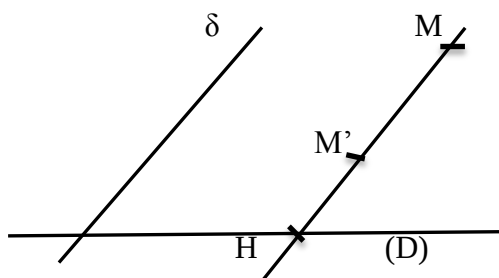
❖ Affinité du plan.

➤ Définition

Soit (D) une droite et δ une direction de droite distincte de celle de (D) et k un nombre réel.

On appelle **affinité d'axe (D)** , de **direction δ** et de **rapport k** l'application f qui associe à tout point M du plan le point M' du plan tel que :

$\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$ où H est le projeté du point M sur la droite (D) suivant la direction δ .



Propriété

Soit f et g deux fonctions numériques à variables réelles. (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et g dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, α un nombre réel non nul et différent de 1.

- Si $g(x) = f(ax)$, alors (C_g) est l'image de (C_f) par l'affinité par rapport à l'axe des **ordonnées**, de direction celle de l'axe des **abscisses** et de rapport $\frac{1}{a}$.
- Si $g(x) = af(x)$, alors (C_g) est l'image de (C_f) par l'affinité par rapport à l'axe des

abscisses, de direction celle de l'axe des **ordonnées**, et de rapport a .

Séquence d'apprentissage n°3:

Coniques

Introduction

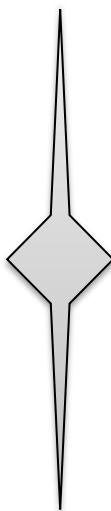
Étudiées par **Apollonius**, mathématicien grec de l'École d'Alexandrie (200 ans av. J.-C.), comme sections d'un cône par un plan, les coniques ressurgissent au XVII^e siècle lorsque **Kepler** découvre que ce sont les trajectoires naturelles des planètes et comètes. Cette découverte, qui heurte les conceptions anciennes faisant de la droite et du cercle les seules figures parfaites dignes de guider la marche des astres, est à l'origine de la théorie de la gravitation de Newton et marque un tournant capital dans l'histoire des sciences...

Les coniques, revêtissant d'une importance capitale dans les chantiers de construction, de plantation, etc, avaient suscité l'intérêt d'autres chercheurs comme **Euclide**, **Archimède**, **Pierre Dandelin** etc et continuent toujours de faire l'objet de recherches avancées chez les mathématiciens du monde contemporain.

Dans cette séquence d'apprentissage, nous nous limiterons à l'étude des différents types de coniques et leurs éléments caractéristiques.



Archimède, (287- 212 av. J.-C.),
Savant grec.



Kepler Johannes (1571-1630),
Astronome et Physicien allemand

SOMMAIRE

- I. Etude générale des coniques**
- II. Etude de la parabole**
- III. Etude de l'ellipse**
- IV. Etude de l'hyperbole**

I. Etude générale des coniques.**❖ Définitions et propriétés.****➤ Définition**

Soit **(D)** une droite, **F** un point n'appartenant pas à **(D)** et **e** un nombre **réel strictement positif**.

On appelle **conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e** l'ensemble (Γ) des points **M** du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$, où **H** désigne le projeté orthogonal de **M** sur **(D)**.

- Si **e=1**, alors (Γ) est une **parabole**.
- Si **0 < e < 1**, (Γ) est une **ellipse**.
- Si **e > 1**, (Γ) est une **hyperbole**.

➤ Propriétés

P₁ : Soit (Γ) une conique de foyer **F** et de directrice **(D)**.

La droite (Δ) passant par **F** et perpendiculaire à **(D)** est un **axe de symétrie** de (Γ) . Elle est appelée **axe focal** de la conique.

P₂ : Soit (Γ) une conique d'excentricité **e**, d'axe focal (Δ) .

- Si **e=1**, (Γ) coupe (Δ) en un point **S**.
- Si **e ≠ 1**, (Γ) coupe (Δ) en deux points distincts **A** et **A'**.

Le point **S** est appelé **sommet** de la parabole.

Les points **A** et **A'** sont les **sommets** de la conique situés sur l'axe focal.

P₃ : Soit (Γ) une conique de foyer **F**, de directrice **(D)** et d'excentricité **e**.

Pour tout point **M** du plan dont le projeté orthogonal sur **(D)** est **H**, on a :

- **M** est intérieur à (Γ) si **MF < e × MH**.
- **M** est extérieur à (Γ) si **MF > e × MH**.

Remarque :

☞ Le foyer **F** d'une conique est intérieur à cette conique.

- ☞ Tout point de la directrice **(D)** d'une conique est extérieur à cette conique.
- ☞ Soit **K** le projeté orthogonal du foyer **F** de la conique sur la directrice. On a : $\frac{MF}{MK} = e$. Les sommets **A** et **A'** de la conique situés sur l'axe focal vérifient : **A = bar{(F,1) ; (K, e)}** et **A' = bar{(F,1) ; (K, -e)}**. Ceci pourra permettre de préciser les sommets de la conique dans le plan lorsqu'on n'a pas de repère. (Voir BAC C 2014)

❖ Equation réduite d'une conique.**➤ Equation réduite d'une parabole.****Propriété**

Soit **(P)** la parabole de foyer **F**, de directrice **(D)** et de sommet **S**.

Dans un repère orthonormé $(S, \vec{i}, \vec{j})$ tel que

$\vec{i} = \frac{1}{SF} \cdot \overrightarrow{SF}$, **(P)** est la courbe d'équation

$y^2 = 2px$ où **p** est la distance de **F** à **(D)**.

(Cette équation est appelée **équation réduite** de la parabole).

Le nombre réel strictement positif **p** est appelé **paramètre** de la parabole.

Remarques

- ☞ Un échange des axes de repères $(S, \vec{i})$ et $(S, \vec{j})$ conduit à une équation de la forme : **$x^2 = 2py$** . L'axe de la parabole est alors la droite de repère $(S, \vec{j})$, le foyer est **$F(0 ; \frac{p}{2})$** et la directrice **$(D) : y = -\frac{p}{2}$** .
- ☞ Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe d'équation **$y^2 = 2ax$** (**a ≠ 0**) est une parabole de sommet **O**, d'axe focal la droite de repère $(O, \vec{i})$ et de paramètre **|a|**. Le foyer de **(P)** est **$F(\frac{a}{2} ; 0)$** et sa directrice **$(D) : x = -\frac{a}{2}$** .

➤ Equation réduite d'une conique à centre (e ≠ 1).

Propriété

Soit (Γ) une conique de foyer F , de directrice (D) et d'excentricité e ($e \neq 1$).

On désigne par A et A' les sommets de (Γ) situés sur son axe focal.

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que O est le milieu de $[AA']$ et $\vec{i} = \frac{1}{OA} \overrightarrow{OA}$, (Γ) est la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$, où $a = OA$ et $c = OF$.

(Cette équation est appelée **équation réduite** de la conique).

Remarques :

- Un échange des axes de repères $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$ conduit à une équation de la forme : $\frac{x^2}{b^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. L'**axe focal** de la conique est alors la droite de repère $(O, \vec{j})$, $F(0, c)$ est un foyer, $(D) : y = \frac{b^2}{c}$, $B(0; b)$ et $B'(0; -b)$ sont les sommets de la conique situés sur l'axe focal.
- Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ ($a > 0, c > 0$ et $a \neq c$) est la conique de foyer $F(c; 0)$, de directrice $(D) : x = \frac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e = \frac{c}{a}$.

Conséquences

Soit (Γ) une conique d'excentricité e ($e \neq 1$) et d'axe focal (Δ) . On désigne par A et A' les sommets de (Γ) situés sur (Δ) .

- La **médiatrice de $[AA']$** est un **axe de symétrie de (Γ)** .
- Le **milieu O de $[AA']$** est un centre de symétrie de (Γ) .

(De telles coniques sont appelées **coniques à centre** ; le centre de symétrie est appelé **centre de la conique**).

Remarques

- F' et (D) , images respectives de F et (D) par la symétrie de centre O , sont également un foyer et une directrice de (Γ) .

(Γ) est parfaitement déterminée par la donnée de F' , (D') et e .

- On a : $FF' = 2c$; FF' est appelée **distance focale** de la conique à centre.
- L'**équation d'une ellipse** en particulier est de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $b^2 = a^2 - c^2$ et $c < a$.
- L'**équation d'une hyperbole** en particulier est de la forme : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $b^2 = c^2 - a^2$ et $c > a$.

II. Etude de la parabole.**❖ Etude analytique****➤ Tracé de la parabole**

La parabole (P) d'équation réduite $y^2 = 2px$ ($p > 0$) est la réunion des courbes représentatives (P_1) et (P_2) des fonctions $f_1 : x \mapsto \sqrt{2px}$ et $f_2 : x \mapsto -\sqrt{2px}$. (P_1) et (P_2) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Etudions $f_1 : x \mapsto \sqrt{2px}$.

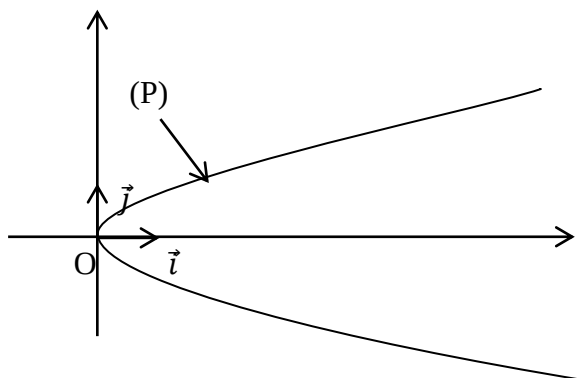
Elle est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ puis dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+ :$

$f_1'(x) = \frac{p}{\sqrt{2px}}$. On déduit le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$f_1'(x)$		+
$f_1(x)$	0	$+\infty$

La courbe (P_1) admet une branche parabolique

de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.



➤ **Éléments caractéristiques de la parabole.**

Il s'agit de son **sommet**, son **axe focal**, sa **directrice**, son **foyer** et de son **paramètre**. Nous en avons déjà parlé dans I. Il est important de bien observer l'équation donnée par rapport à la parabole pour voir s'il n'y a pas un quelconque changement d'axes de repères afin de bien donner les éléments caractéristiques.

➤ **Equation de la tangente en un point de la parabole.**

Propriété

Soit (P) la parabole d'équation : $y^2 = 2ax$ ($a \neq 0$).

La tangente en un point $M_0(x_0; y_0)$ de (P) a pour équation : $yy_0 = a(x + x_0)$.

NB :

Lorsque (P) a pour équation $x^2 = 2ay$ ($a \neq 0$), la tangente a pour équation : $xx_0 = a(y + y_0)$.

➤ **Régionnement du plan par la parabole.**

Soit (P) la parabole d'équation : $y^2 = 2ax$ ($a \neq 0$). Le foyer de (P) est $F(\frac{a}{2}; 0)$ et sa directrice est (D) : $x = -\frac{a}{2}$.

Pour tout point M du plan dont le projeté orthogonal sur (D) est H, on a :

- M est **intérieur** à (P) $\Leftrightarrow MF^2 < MH^2$ ie $y^2 < 2ax$.
- M est **extérieur** à (P) $\Leftrightarrow MF^2 > MH^2$ ie $y^2 > 2ax$.

❖ **Etude géométrique :**

Soit (P) la parabole de foyer F et de directrice (D).

Pour construire un point de (P) et sa tangente, on peut utiliser le procédé suivant :

- Par un point H de (D), tracer la droite (Δ_H) perpendiculaire à (D).
 - Tracer la médiatrice de [FH].
- Ces deux droites se coupent en un point M de (P). La **médiatrice de [FH]** est la **tangente** en M à (P).

Remarque :

La parabole (P) de foyer F et de directrice (D) est l'ensemble des centres des cercles passant par F et tangents à (D).

III. Etude de l'ellipse

❖ **Etude analytique**

➤ **Tracé de l'ellipse.**

Soit (E) l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

($a > 0, b > 0$). (E) est la réunion des courbes représentatives (E_1) et (E_2) des fonctions

$$f_1: x \mapsto \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ et } f_2: x \mapsto -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

(E_1) et (E_2) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

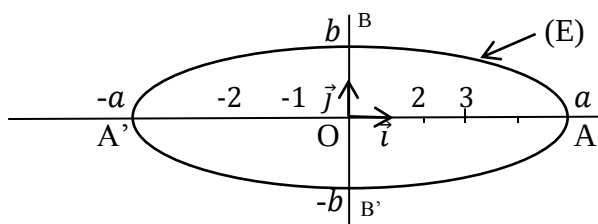
Etudions la fonction $f_1: x \mapsto \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

f_1 est définie et continue sur $[-a; a]$. C'est une fonction paire, donc on peut réduire son étude à $[0; a]$.

$$\forall x \in [0; a], f_1'(x) = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} = -\infty$, donc (E_1) admet une demi-tangente verticale au point $A(a; 0)$. On en déduit le tableau de variation de f_1 et la courbe (E) :

x	0	a
$f_1'(x)$	—	
$f_1(x)$	b	0



➤ **Éléments caractéristiques de l'ellipse.**

L'équation de l'ellipse (E) est de la forme : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Nous distinguons deux cas :

1^{er} cas : $a > b$

Dans ce cas, (E) est l'ellipse de foyers $F(c; 0)$ et $F'(-c; 0)$, de sommets $A(a; 0)$, $A'(-a; 0)$ situés sur l'axe focal, $B(0; b)$, $B'(0; -b)$ situés sur le petit axe, de directrices $(D) : x = \frac{a^2}{c}$ et $(D') : x = -\frac{a^2}{c}$, de demi-distance focale $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ et d'excentricité $e = \frac{c}{a}$.

2^{ème} cas : $a < b$

Dans ce cas, (E) est l'ellipse de foyers $F(0; c)$ et $F'(0; -c)$, de sommets $A(a; 0)$, $A'(-a; 0)$ situés sur le petit axe, $B(0; b)$, $B'(0; -b)$ situés sur l'axe focal, de directrices $(D) : y = \frac{b^2}{c}$ et $(D') : y = -\frac{b^2}{c}$, de demi-

distance focale $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ et d'excentricité $e = \frac{c}{b}$.

➤ **Equation de la tangente en un point de l'ellipse.**

Soit (E) l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. La tangente à (E) au point $M_0(x_0, y_0)$ de (E) a pour équation : $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

➤ **Représentation paramétrique de l'ellipse.**

L'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

Plus généralement, l'ellipse d'équation $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ a pour représentation

$$\text{paramétrique : } \begin{cases} x = a \cos \theta + \alpha \\ y = b \sin \theta + \beta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

➤ **Cercle principal et affinité**

Propriété

Soit (E) l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), de sommets A et A' . (E) est l'image du cercle de diamètre $[AA']$ par l'**affinité orthogonale** d'axe (AA') et de rapport $\frac{b}{a}$.

Remarque

- ☞ La tangente en M' à (E) est l'image de la tangente en M au cercle de diamètre $[AA']$ par l'affinité orthogonale ; donc ces deux tangentes se coupent en un point de (AA') .
- ☞ Si on désigne par B et B' les sommets de (E) non situés sur l'axe focal, (E) est l'image du cercle de diamètre $[BB']$ par l'affinité orthogonale d'axe (BB') et de rapport $\frac{a}{b}$.

➤ Définition bifocale de l'ellipse.

Soit (E) l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), de foyers F et F'. (E) est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MF + MF' = 2a :$$

c'est la **définition bifocale de (E)**.

Dans cette définition, on a : $FF' = 2c$ tel que $c < a$.

NB :

Dans le cas d'un changement d'axe, la définition bifocale devient : $MF + MF' = 2b$.

Remarque

- ☞ Les points M vérifiant $MF + MF' < 2a$ (respectivement $MF + MF' > 2a$) sont intérieurs (respectivement extérieurs) à (E).
- ☞ Cette propriété permet une construction de l'ellipse par la « **méthode du jardinier** » : **un fil de longueur $2a + FF'$ que l'on maintient tendu entre F et F' puis le bout du reste du fil trace l'ellipse.** (Voir BAC C 2013)
- ☞ Lorsque $a = b$, $F = F'$, (E) est le cercle de centre F et de rayon a .

❖ Etude géométrique de l'ellipse.

Soit (E) l'ellipse définie par : $MF + MF' = 2a$ ($0 < FF' < 2a$). Pour construire un point de (E) et sa tangente, on peut utiliser le procédé suivant :

- Tracer le cercle (c) de centre F' et de rayon $2a$;
- Tracer un rayon $[F'K]$ de (c) ;
- Tracer la médiatrice de $[F'K]$. Cette médiatrice coupe $(F'K)$ en un point M de (E) et est tangente en M à (E).

IV. Etude de l'hyperbole❖ Etude analytique➤ Tracé de l'hyperbole

Soit (H) l'hyperbole d'équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$). (H) est la réunion des courbes représentatives (H_1) et (H_2) des fonctions $f_1: x \mapsto \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ et $f_2: x \mapsto -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. (H_1) et (H_2) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

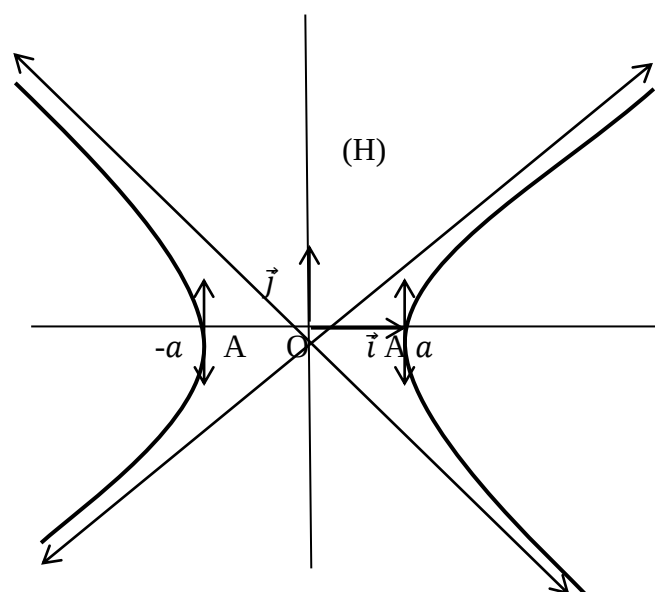
Etudions la fonction $f_1: x \mapsto \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

f_1 est définie et continue sur $[-\infty; -a] \cup [a; +\infty[$. C'est une fonction paire, donc on peut réduire son étude à $[a; +\infty[$.

$$\forall x \in [a; +\infty[\quad f_1'(x) = \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} = +\infty$, donc (H_1) admet une demi-tangente verticale au point A(a; 0). On démontre également que la droite d'équation $y = \frac{b}{a}x$ est asymptote à (H_1) en $+\infty$. On en déduit le tableau de variation de f_1 et la courbe (H).

x	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	-	
$f_1(x)$	0	$+\infty$

Remarque

☞ L'hyperbole d'équation $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est

l'image de l'hyperbole d'équation

$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ par la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice.

☞ La réunion des asymptotes de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a pour équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

☞ Si $a = b$, les asymptotes sont orthogonales et $e = \sqrt{2}$: on dit que (H) est une hyperbole équilatère.

➤ Éléments caractéristiques de l'hyperbole.

L'hyperbole (H) a deux types d'équations. On distingue :

- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Dans ce cas, (H) est l'hyperbole de foyers $F(c; 0)$ et $F'(-c; 0)$, de sommets $A(a; 0)$, $A'(-a; 0)$, de directrices (D) : $x = \frac{a^2}{c}$ et (D') :

$x = -\frac{a^2}{c}$, de demi-distance focale $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, d'asymptotes (Δ) : $y = \frac{b}{a}x$, (Δ') : $y = -\frac{b}{a}x$ et d'excentricité $e = \frac{c}{a}$.

- $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Dans ce cas, (H) est l'hyperbole de foyers $F(0; c)$ et $F'(0; -c)$, de sommets $B(0; b)$, $B'(0; -b)$, de directrices (D) : $y = \frac{b^2}{c}$ et (D') :

$y = -\frac{b^2}{c}$, de demi-distance focale $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, d'asymptotes (Δ) : $y = \frac{b}{a}x$, (Δ') : $y = -\frac{b}{a}x$ et d'excentricité $e = \frac{c}{b}$.

➤ Equation de la tangente en un point de l'hyperbole

Soit (H) l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

La tangente à (H) au point $M_0(x_0, y_0)$ de (H) a pour équation : $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

➤ Définition bifocale de l'hyperbole

Soit (H) l'hyperbole d'équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), de foyers F et F'.

(H) est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$|MF - MF'| = 2a :$$

c'est la **définition bifocale de (H)**.

Dans cette définition, on a : $FF' = 2c$ tel que $c < a$.

NB :

Dans le cas d'un changement d'axe, la définition bifocale devient : $|MF - MF'| = 2b$.

Remarque

Les points M vérifiant $|MF - MF'| > 2a$ (respectivement $|MF - MF'| < 2a$) sont intérieurs (respectivement extérieurs) à (H).

❖ Etude géométrique de l'hyperbole.

Soit (H) l'hyperbole définie par :

$|MF - MF'| = 2a$ ($0 < 2a < FF'$). Pour construire un point de (H) et sa tangente, on peut utiliser le procédé suivant :

- Tracer le cercle (c) de centre F' et de rayon $2a$;
- Tracer un rayon [F'K] de (c) ;
- Tracer la médiatrice de [F'K].

Cette médiatrice coupe (F'K) en un point M de (H) et est tangente en M à (H).

Séquence d'apprentissage n°4:**Similitudes planes****Introduction**

Les similitudes planes sont des transformations planes que nous allons définir à partir des isométries. Nous parlerons ici des similitudes planes directes qui sont des déplacements et des similitudes planes indirectes constituées des antidéplacements et de la composée commutative d'une réflexion plane et d'une homothétie. Dans cette séquence d'apprentissage, nous amènerons l'élève à savoir déterminer les éléments caractéristiques des similitudes planes et à pouvoir donner leur écriture complexe et analytique. Cette étude s'étendra à l'étude des coniques, des fonctions, à la géométrie analytique et même à l'Arithmétique...

$$f: z' = az + b \Rightarrow \begin{cases} z_{\Omega} = \frac{b}{1-a} \\ z_{\vec{u}} = b \\ k = |a| \\ \theta = \arg(a) [2\pi] \end{cases}$$

$$g: z' = a\bar{z} + b \Rightarrow \begin{cases} z_{\Omega} = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2} \\ z_{\vec{u}} = \frac{a\bar{b} + b}{2} \\ S_{\Delta}: z' = a\bar{z} + \frac{b - a\bar{b}}{2} \end{cases}$$

SOMMAIRE**I. Généralités sur les similitudes planes-Similitudes planes directes.****II. Similitudes planes indirectes.**

I. Généralités sur les similitudes planes- Similitudes planes directes.

A. Généralités

❖ Définition

On appelle **similitude**, toute transformation composée d'une homothétie et d'une isométrie.

- Si l'isométrie est un **déplacement**, on dit que la similitude est **directe**.
- Si l'isométrie est un **antidépacement**, on dit que la similitude est **indirecte**.

❖ Ecriture complexe d'une transformation plane.

➤ Translation

- L'écriture complexe $z' = z + b$ est celle d'une translation de vecteur de translation d'affixe b .
- Réciproquement, toute translation de vecteur d'affixe b a pour écriture complexe : $z' = z + b$.

➤ Homothétie

- L'homothétie de centre Ω et de rapport k a pour écriture complexe :
$$z' - z_{\Omega} = k(z - z_{\Omega}).$$
- Réciproquement, toute application du plan dans lui-même d'écriture complexe :
$$z' = az + b \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* - \{1\} \text{ et } b \in \mathbb{C}$$
 est l'homothétie de rapport a et de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$.

➤ Rotation

- Une rotation de centre Ω et d'angle θ a pour écriture complexe :

$$z' - z_{\Omega} = e^{i\theta}(z - z_{\Omega}).$$

- Réciproquement, toute application du plan dans lui-même d'écriture complexe

$z' = az + b$ avec $|a|=1$, $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$ est la rotation d'angle $\arg(a)[2\pi]$ et de centre le point d'affixe $\frac{b}{1-a}$.

➤ Antidépacement

L'écriture complexe d'un antidépacement est de la forme : $z' = a\bar{z} + b$ où a et b sont des nombres complexes et $|a|=1$.

- Si $a\bar{b} + b = 0$, cet antidépacement est une **symétrie orthogonale** d'axe l'ensemble des points invariants.
- Si $a\bar{b} + b \neq 0$, cet antidépacement est une **symétrie glissée** c'est-à-dire la composée commutative d'une translation $t_{\vec{u}}$ et d'une réflexion S d'axe dont un vecteur directeur est $\vec{u}$. Cette transformation n'admet **pas de points invariants**.

B. Similitudes planes directes.

Définition

On appelle similitude plane directe, toute transformation plane dont l'écriture complexe est de la forme $z' = az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Propriétés fondamentales

- Toute similitude plane directe de rapport k ($k > 0$) est :
 - ☞ Soit une **translation**,
 - ☞ Soit une **rotation**,
 - ☞ Soit une **homothétie de rapport k** ,
 - ☞ Soit la **composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport k** .
- Soit f une similitude plane directe d'écriture complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. On distingue deux cas :

1^{er} cas : $a \in \mathbb{R}$.

- ✓ Si $a=1$, alors f est la translation de **vecteur de translation d'affixe b** . Si de plus $b=0$, alors f est l'application identique du plan.
- ✓ Si $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$, alors f est l'**homothétie** de rapport $k=a$ et de **centre** le point d'affixe $\frac{b}{1-a}$. Ce point est l'unique point invariant par f .

2^{ème} cas : $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

- ✓ Si $|a|=1$, alors f est la **rotation d'angle $\theta = \arg(a)[2\pi]$** et de centre d'affixe $\frac{b}{1-a}$.
- ✓ Si $|a| \neq 1$, alors f est la **composée commutative de la rotation** de centre Ω , d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle $\theta = \arg(a)[2\pi]$ et de l'**homothétie** de même centre et de rapport $k=|a|$. Ses **éléments caractéristiques** sont : son centre Ω , le rapport k et l'angle de rotation.

Propriétés

Toute similitude plane directe de rapport k ,

- ✓ Conserve l'**alignement** des points, le **parallélisme** de droites, l'**orthogonalité** de droite, les **angles orientés**, le **barycentre**, le **contact**.
- ✓ Multiplie les **longueurs** par k , les **aires** par k^2 .
- ✓ Transforme les droites en droites, les demi-droites en demi-droites, les segments en segments, un cercle C de rayon R en un cercle C' de rayon kR .

II. Similitudes planes indirectes

Définition

On appelle similitude plane indirecte toute transformation dont l'écriture complexe est de la forme : $z' = a\bar{z} + b$ où a et b sont des nombres complexes et a non nul. Le réel strictement positif $k = |a|$ est le rapport de la similitude.

Propriétés

- Toute similitude plane indirecte de rapport $k(k>0)$ est :
 - ☞ Soit une **réflexion plane**,
 - ☞ Soit une **symétrie glissée**,
 - ☞ Soit la **composée commutative d'une réflexion et d'une homothétie de rapport k** .
- Soit f une similitude plane indirecte d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Deux cas peuvent se présenter :

1^{er} cas : $|a|=1$

Dans ce cas, f est un antidéplacement.

Si de plus on a :

- ✓ $a\bar{b} + b = 0$, alors l'antidéplacement f est une **réflexion plane**. Elle est **caractérisée** par son **axe constitué des points invariants** par f . Il faut alors résoudre de façon analytique l'équation $z = a\bar{z} + b$ pour déduire l'équation de l'axe.
- ✓ $a\bar{b} + b \neq 0$, alors l'antidéplacement f est une **symétrie glissée** caractérisée par le vecteur de translation et l'axe de la symétrie orthogonale. Le **vecteur de translation** a pour affixe :

$$z = \frac{a\bar{b} + b}{2}$$

Et la **symétrie orthogonale** a pour **écriture complexe** :

$$z' = a\bar{z} + \frac{b - a\bar{b}}{2}$$

On déterminera donc l'axe de la symétrie orthogonale à partir de cette écriture complexe.

2^{ème} cas : $|a| \neq 1$

Dans ce cas, f est **la composée commutative d'une homothétie** de rapport $k = |a|$ et **d'une réflexion plane S d'axe Δ** .

f admet dans ce cas **un seul point invariant Ω** qui est **le centre de l'homothétie**. Ce point est le centre de f . L'axe Δ passe par Ω .

Le point Ω a pour affixe :

$$z_{\Omega} = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$$

L'ensemble des points M appartenant à (Δ) vérifient :

$$z' - z_{\Omega} = k(z - z_{\Omega})$$

On déterminera donc (Δ) à partir de cette relation.

NB : Le point Ω , la droite Δ et le rapport $k=|a|$ sont les **éléments caractéristiques de f** . On les appelle respectivement **centre**, **axe** et **rapport**.

Retenons :

Si M' est l'image de M par la symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$, alors **le milieu I de $[MM']$ appartient à Δ** . Un **repère de Δ est donc $(I, \vec{u})$** . On peut également déterminer (Δ) à partir de cela.

P

artie II :

Enoncés des exercices d'application et d'approfondissement des notions du cours de chacune des séquences d'apprentissage inscrites dans les programmes des classes Terminales C, D et E.

SA n°1 : Configurations de l'espace**Séquence 1 : Calcul vectoriel****I.) Barycentres de n points pondérés.****Activité 1.**

Bello, une élève de la Terminale D découvre dans un livre un triangle ABC accompagné des données suivantes : M est le milieu de [AC]. On donne :

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} \text{ et } \overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}.$$

Pour appliquer ses notions reçues en classe, elle décide de s'entraîner avec les questions ci-après relatives au triangle ABC. Tu es invité(e) à te joindre à Bello pour consolider tes acquis.

1.a) Placer les points I et D tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CI}$.

b) Démontrer que les points B, D et M sont alignés.

2) Démontrer que les droites (AJ), (BK) et (CL) sont concourantes en un point à préciser.

3) Déterminer les coordonnées de ce point dans la base $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$. On admettra que $AB = 1$ et $AC = 1$.

Activité 2

Sonia une élève de la Terminale C participe à un jeu qui consiste à répondre à certaines questions posées sur un dé tétraédrique ABCD. Le triangle ABC de ce dé a pour centre de gravité G et les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [BC]. Le point K est le barycentre des points pondérés (C ; 1) et (D ; 3), le point H est le barycentre des points pondérés (A ; 1), (B ; 1),

(C ; 1), (D, 3) et le point P est défini par : $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$. Comme Sonia, joues à ce jeu en répondant aux questions suivantes :

1.a) Traduire les données en termes de barycentre.

b) Montrer que le point H appartient à la droite (IK).

c) Montrer que les droites (IK), (JP) et (DG) sont concourantes en un point à préciser.

2.a) Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$, donner les coordonnées des points G, I, J, K et P.

b) Déterminer les coordonnées du point H.

Activité 3

ABC est un triangle dont les 03 angles sont aigus. On appelle A', B', C' les pieds des hauteurs, H l'orthocentre du triangle. On pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

1.) Démontrer que A' est le barycentre de :

$$(B, b\cos\hat{C}) \text{ et } (C, b\cos\hat{B}).$$

2.) En déduire que A' est le barycentre de

$$(B, \tan\hat{B}) \text{ et } (C, \tan\hat{C}).$$

3.) Démontrer que le barycentre de :

$$(A, \tan\hat{A}) (B, \tan\hat{B}) (C, \tan\hat{C}) \text{ est le point H.}$$

4.) On suppose que le triangle n'est pas isocèle. Les droites (BC) et (B'C') se coupent en A''. On définit de même B'' et C''.

Démontrer que le barycentre de $(B, \tan\hat{B})$ et $(C, -\tan\hat{C})$ est A''.

Démontrer que les points A'', B'' et C'' sont alignés.

II.) Produit Scalaire-Ligne de niveau.**Activité 4**

Soit ABC un triangle isocèle d'angle principal 120° et de centre de gravité G. On donne : $AB = AC = 7$, $BC = 4$

1) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

a) $\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\| = 9$; b) $\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\| \leq 9$.

2) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :

a) $\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\| = 12$;

b) $\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\| \leq 12$.

3) Déterminer la ligne de niveau 38 de l'application f du plan définie par :

$$f(M) = -2AM^2 + BM^2 + CM^2$$

4.a) Calculer AG et BG.

b) Déterminer le lieu géométrique de M quand l'application g de l'espace dans l'espace définie par $g(M) = AM^2 + BM^2 + CM^2$ est égale à 65.

5) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :

a) $\|\overrightarrow{3AM} + \overrightarrow{BM}\| = \|\overrightarrow{2MC} - \overrightarrow{BM}\|$

b) $\|\overrightarrow{3AM} + \overrightarrow{BM}\| \leq \|\overrightarrow{2MC} - \overrightarrow{BM}\|$.

Activité 5

On considère dans le plan orienté un carré EFGH de centre O tel que : $\widehat{mes(\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{EH})} = \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On pose $EF = k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Soient I, J, K et L les milieux respectifs des cotés [EF], [FG], [GH], [EH]. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan (P) tels que : $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{ME} = k^2$

1) Démontrer que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MI^2 + MJ^2 + MK^2 + ML^2 = 2k^2$.

2) Justifier que le point O est l'isobarycentre des points I, J, K et L.

3) Démontrer que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MO^2 = \frac{k^2}{4}$.

4) Caractériser (Γ) .

5.a) Prouver que O est l'isobarycentre des points E, F, G et H.

b) Déterminer l'ensemble (Γ') du plan tel que :

$$ME^2 + MF^2 + MG^2 + MH^2 = k^2 - 3.$$

Activité 6

On considère dans l'espace un carré ABCD de centre O et d'arrête c, $c \in \mathbb{R}^*_+$. Soit a un réel et G_a le barycentre lorsqu'il existe des points pondérés (A, a), (B, 1), (C, 1) et (D, a).

1. a) Détermine l'ensemble R des réels a pour lesquels G_a existe.

b) Détermine l'ensemble des points G_a lorsque a décrit R.

2.) On considère l'application f_a de l'espace qui à tout point M de l'espace associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = a\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + a\overrightarrow{MD}.$$

Etudie suivant les valeurs de a, la nature et les éléments caractéristiques de f_a .

3°) Détermine l'ensemble :

a) (E_1) des points M de l'espace tels que : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = 4c^2$

b) (E_2) des points M de l'espace tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$$

c) (Γ) des points M de l'espace tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AD}\|$$

d) (E_3) des points M de l'espace tels que :

$$(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 2c^2$$

e) Donne la nature $(E_1) \cap (E_3)$.

Activité 7

ABC est un triangle équilatéral tel que $AB = k$.

1) Déterminer l'ensemble (E) des réels x tels que les points A, B, C affectés des coefficients $x, 8, 2$ admettent un barycentre.

2) Déterminer l'ensemble des barycentres obtenus lorsque x décrit (E).

3) Soit $x = -2$.

a) Déterminer puis construire G barycentre des points A, B, C affectés respectivement des coefficients $x, 8, 2$.

b) Déterminer la surface de niveau k^2 de l'application f du plan définie par :
 $f(M) = 3MA^2 - 2MB^2 - MC^2$.

c) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :
 $-2MA^2 + 8MB^2 + 2MC^2 = k^2$.

Activité 8

A, B et C sont trois points non alignés de l'espace et soit m un réel de l'intervalle $J = [-1; 1]$. On note G_m le barycentre du système $\{(A; m^2+1); (B; m); (C; -m)\}$.

1) Représenter les points A, B, C, le milieu I de [BC] et construire G_1 et G_{-1} .

2.a) Démontrer que pour tout réel m de J, on a l'égalité : $\overrightarrow{AG_m} = -\frac{m}{m^2+1} \overrightarrow{BC}$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur J par : $f(x) = -\frac{x}{x^2+1}$.

c) En déduire l'ensemble des points G_m quand m décrit J.

3.a) Déterminer l'ensemble E des points M de l'espace tels que :

$$\|\overrightarrow{2AM} + \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{2AM} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\|.$$

b) Déterminer l'ensemble F des points M de l'espace tels que :

$$\|\overrightarrow{2AM} + \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{2AM} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\|.$$

4) Dans cette question, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé de l'espace et on a :
 $A(0; 0; 2); B(1; 2; 1); C(-1; 2; 5)$. Le point G_m et les ensembles E et F sont définis comme ci-dessus.

a) Calculer les coordonnées de G_{-1} et de G_1 .

b) Démontrer que les ensembles E et F sont sécants suivant un cercle.

c) Déterminer le rayon du cercle d'intersection de E et F.

III.) Géométrie analytique de l'espace.**Activité 9**

L'espace est muni d'un repère

orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(2; -1; 1); B(3; -2; 0)$ et $C(-1; 0; 2)$.

1.a) Justifier que les points A, B et C déterminent un plan (P).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (P).

2) Soit m un nombre réel. On considère le barycentre G_m des points pondérés $(A; 1-3m); (B; 2m); (C; m)$.

a) Justifier l'existence de G_m pour tout m élément de $\mathbb{R}$.

b) Exprimer en fonction de m les coordonnées $(x; y; z)$ de G_m .

c) En déduire que l'ensemble (Δ) des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$ est une droite dont on donnera un repère.

3) Soit (Q) le plan d'équation $x+y+z=0$.

a) Démontrer que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

b) On pose : $(D) = (P) \cap (Q)$. Donner une représentation paramétrique de (D).

c) Étudier la position relative des droites (Δ) et (D).

Activité 10

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; i, j, k)$. On donne les points $A(-1 ; 2 ; 3)$, $B(-1 ; 2 ; -2)$ et $C(-3 ; 0 ; 4)$ et on désigne par I le barycentre des points pondérés $(A ; 2)$ et $(B ; 3)$.

1) Déterminer les coordonnées du point I .

2) Soit (D) l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$(2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) = \vec{0}.$$

Démontrer que (D) est une droite dont-on donnera un repère.

3) Soit (Δ) la droite de représentation

$$\text{paramétrique : } \begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = 2 - 2\alpha \\ z = -2 + \alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

a) Démontrer que (Δ) et (D) sont strictement parallèles.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) déterminé par (Δ) et (D) . Donne une représentation paramétrique du plan (P) .

4) Soit (Q) le plan d'équation cartésienne : $x + y = 0$ et $H(1 ; 2 ; 0)$.

a) Démontrer que (Q) est perpendiculaire à (P) .

b) Calculer les distances $d(H ; (P))$ et $d(H ; (Q))$.

c) En déduire la distance du point H à la droite d'intersection de (P) et de (Q) .

Activité 11

Dans l'espace E rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité graphique 2cm, on considère les points $A(-1 ; 2 ; 1)$; $B(1 ; -6 ; -1)$; $C(2 ; 2 ; 2)$; $D(0 ; 1 ; -1)$.

1) Démontre que les points A, B, C déterminent un plan (P) dont tu préciseras une équation cartésienne.

2) On considère le plan (P') dont un repère cartésien est $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Étudie la position relative de (P) et (P') puis donne un repère cartésien de leur droite d'intersection (Δ) au cas où ceux-ci seraient sécants.

b) Justifie que le point D n'appartient pas à (Δ) .

3) On considère le plan (Q) contenant (Δ) et perpendiculaire à (P) et la droite (D) dont une représentation paramétrique est :

$$(D) : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 6t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

a) Vérifie que (D) et (P) sont perpendiculaires.

b) Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection H .

c) Déduis-en que (D) et (Q) sont strictement parallèles.

d) Démontre que les droites (D) et (Δ) sont non coplanaires.

4.a) Écris une équation cartésienne du plan (Q) .

b) Calculer les distances $d(D ; (P))$ et $d(D ; (Q))$ puis déduis-en $d(D ; (\Delta))$.

5) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que $d(M, (P)) = \sqrt{11}$.

Activité 12

Soit $ABCDE$ une pyramide régulière telle que : $ABCD$ est un carré ; la droite (AE) est perpendiculaire au plan ABC et $AB = AD = 1\text{m}$. La pyramide est séparée en deux compartiments par le plan (P) passant par le milieu I du segment $[ED]$ et les points A, C et la droite (Δ) d'équations cartésiennes :

$$x - 1 = y - \frac{1}{6} = z + \frac{5}{6}.$$

1) Détermine dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ les coordonnées des points $D ; C$ et I .

2) Justifie que le plan (P) a pour équation

$$x - y + z = 0.$$

- 3) Déduis-en les coordonnées du point S intersection de (P) et de (Δ).
- 4) Calcule l'aire de la surface de séparation.
- 5.a) Calcule le volume du compartiment en forme du tétraèdre ACDI.
- b) Déduis-en le volume du second compartiment.

Activité 13

Dans l'espace orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point A (1, 1, 1) et les plans (P) et (Q) d'équations respectives :

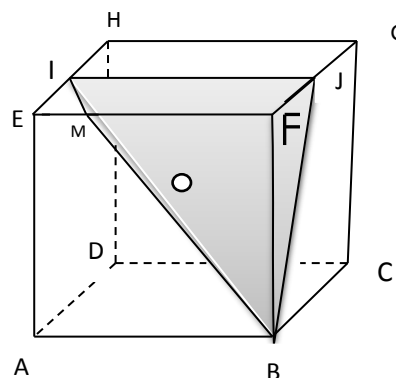
$$x + y + z - 1 = 0 \text{ et } x + y - 2z - 4 = 0.$$

- 1.) a- Déterminer que le plan (P) et (Q) sont perpendiculaires.
 - b- Donner un repère de leur droite d'intersection (Δ).
- 2.) a- le point A appartient à (Δ) ?
 - b- Calculer la distance du point A à la droite (Δ).
- 3.) Soit (D) la droite passant par A et perpendiculaire au plan (P).
 - a.) Déterminer une représentation paramétrique de (D).
 - b.) En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (P).
- 4.) Soit (R) le plan passant par A et perpendiculaire aux plans (P) et (Q).
 - a.) Déterminer une équation cartésienne du plan (R).
 - b.) Déterminer $(P) \cap (Q) \cap (R)$.

Activité 14

Sonia se serre d'une bassine en forme d'un cube pour puiser de l'eau. Cette bassine, du fait de son âge a une partie ébréchée.

Soit ABCDEFGH le cube auquel on assimile la bassine. On désigne par O le centre de ce cube, H le milieu de [AB], J milieu de [FG], K milieu de [CG] et I milieu de [EH]. On pose : $AB = 1$, $\vec{u} = \vec{HO} + \vec{AC}$, $\vec{v} = \frac{3}{\sqrt{2}} \vec{HD} - \vec{HF}$, $\vec{w} = \frac{2}{\|\vec{BD}\|} \vec{KO}$.



La partie ébréchée de la bassine est assimilable à la portion BJIMF dont le volume est égal au volume du tétraèdre BJIF à $\frac{3}{19}\pi$ près.

- 1.) Prouver que la droite (DO) est orthogonale au plan (ABG). En déduire que FO est la hauteur du tétraèdre IBJF.
- 2.) Démontrer que les plans (DFC) et (DOC) sont perpendiculaires.
- 3.) Ecrire I comme barycentre des points B, D, E, H, et G.
- 4.) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, D et H dans la base $(\vec{AB} - \vec{CB}; \vec{AG}; \vec{AI})$.
- 5.) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{DC} - \sqrt{2} \vec{IL}$, $\vec{JL} + \vec{KI} - 3\vec{DF}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ dans cette base.
- 6.) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, D et H dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
- 7.) En te servant de la base orthonormée directe $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, détermine le volume d'eau

maximale que peut contenir la bassine utilisée de Sonia.

- 8.) a) Déterminer dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ une représentation paramétrique du plan (IFC). En déduire une équation cartésienne de ce plan.
- b) Déterminer dans cette base une représentation paramétrique de la droite (IO). En déduire un système d'équations cartésiennes de cette droite.

Activité 15

Soit ABCD un tétraèdre tel que (AB) et (CD) soient orthogonaux.

On note A' le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ACD.

Partie A

- 1.a) Démontrer que (CD) est perpendiculaire au plan (ABA').
- b) Que représente (BA') dans le triangle BCD ? Que peut-on en déduire pour A' ?
- c) En déduire la nature du triangle ACD et du plan (ABA').
- 2.) Démontrer que : $\overrightarrow{CD} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB}) = 0$
- 3.) Soit G le barycentre du système de points pondérés $\{(A, -1); (B, 2); (C, 1); (D, 1)\}$.
- Démontrer que G appartient au plan (ABA') et préciser les coordonnées du point G dans le repère $(A'; \overrightarrow{A'B}; \overrightarrow{A'A})$.
- a) Caractériser l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que :

$$(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = k(2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD})$$

avec k un nombre réel.

- b) Caractériser l'ensemble (F) des points M de l'espace tels que :

$$2\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = 3\|2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\|$$

Partie B

On munit maintenant le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité graphique 1cm. On donne $A(1; 3; -2)$, $B(1; 1; 0)$, $C(4; 0; -2)$ et $D(2; \alpha; 2)$.

4.a) Déterminer le réel α pour que le tétraèdre ABCD vérifie les données de l'exercice.

b) Déterminer les coordonnées de A' milieu de [CD].

5.) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABA').

6.) Déterminer la distance du point C au plan (ABA').

7.a) Calculer la valeur de $\cos \widehat{ABA'}$ et en déduire la valeur de $\sin \widehat{ABA'}$.

b) En déduire l'aire du triangle ABA'.

Activité 16

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH d'arête 1.

On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes [BC] et [CD].

Soit M un point quelconque du segment [CE].

Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1.a) Donner sans justification, les coordonnées des points C, E, I et J.

b) Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $[0; 1]$ tel que les coordonnées du point M soient

$$(1 - t; -t, t).$$

2.a) Justifier que les points C et E appartiennent au plan médiateur du segment [IJ].

b) En déduire que le triangle MIJ est un triangle isocèle en M.

c) Exprimer IM^2 en fonction de t .

3.) On désigne par θ la mesure en radian de l'angle $\widehat{IMJ}$.

a) En admettant que la mesure θ appartient à l'intervalle $[0; \pi]$, démontrer que la mesure θ est maximale lorsque $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximal.

b) En déduire que la mesure est maximale lorsque la longueur IM est minimale.

c) Etudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(t) = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.$$

d) En déduire qu'il existe une unique position M_0 du point M sur le segment $[EC]$ telle que la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ soit maximale.

e) Démontrer que le point M_0 est le projeté orthogonal du point I sur le segment $[EC]$.

Activité 17

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- les points $A(1; 1; 1)$ et $B(3; 2; 0)$;
- le plan $(\mathcal{P})$ passant par le point B et admettant $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal ;
- le plan $(\mathcal{Q})$ d'équation $x - y + 2z + 4 = 0$;
- la sphère $(\mathcal{S})$ de centre le point A et de rayon AB.

1.) Montrer qu'une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ est : $2x + y - z - 8 = 0$.

2.) Déterminer une équation de la sphère $(\mathcal{S})$.

3.a) Calculer la distance du point A au plan $(\mathcal{Q})$.

En déduire que le plan $(\mathcal{Q})$ est tangent à la sphère $(\mathcal{S})$.

b) Le plan $(\mathcal{P})$ est-il tangent à la sphère $(\mathcal{S})$.

4.) On admet que le projeté orthogonal de A sur le plan $(\mathcal{Q})$, noté C a pour coordonnées $(0; 2; -1)$.

a) Prouver que les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont sécants.

b) Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'intersection des plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$.

Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite $(\mathcal{D})$ est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

c) Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite $(\mathcal{D})$.

d) On appelle $(\mathcal{R})$ le plan défini par le point A et la droite $(\mathcal{D})$.

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

« Tout point du plan $(\mathcal{R})$ est équidistant des points B et C »

Justifier la réponse.

Séquence 2 : Applications de l'espace

I.) Applications affines-Projections.

Activité 1

L'espace est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit p l'application de l'espace dans lui-même d'expression analytique :

$$\begin{cases} 3x' = 2x + y - z - 3 \\ 3y' = x + 2y + z + 3 \\ 3z' = -x + y + 2z - 3 \end{cases}$$

1.a) Déterminer l'image A' par p du point $A(1 ; -2 ; 3)$.

b) Déterminer l'ensemble des antécédents de A' par p .

2) Démontrer que l'ensemble des points invariants par p est un plan (P) .

3) Soit M un point de l'espace et M' son image par p .

a) Démontrer que $M' \in (P)$.

b) Démontrer que si $M \notin (P)$, la droite (MM') est orthogonale à (P) .

4) En déduire la nature de (P) puis définir une projection vectorielle associée à p .

Activité 2

Soit le plan (P) de représentation paramétrique :

$$(P) : \begin{cases} x = 1 + 2t - t' \\ y = -1 + 3t' \\ z = 4 - t + t' \end{cases} \text{ et } A(-1; 2; 1).$$

1) Déterminer de deux manières différentes une équation cartésienne de (P) .

2) Déterminer les coordonnées de l'image A' de A par la projection orthogonale p sur (P) .

3) Déterminer une représentation paramétrique de l'ensemble des antécédents de A' par p .

4) Soit (D) la droite de repère $(A; \vec{u})$ avec $\vec{u}(1; -1; 2)$. On donne le point $B(2; 3; -1)$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de (D) .

b) Déterminer les coordonnées de l'image B' de B par la projection orthogonale p sur (D) .

c) Donner une équation cartésienne de l'ensemble des antécédents de B' par p dans le plan puis dans l'espace.

5) Soit (Q) le plan d'équation : $x+y+z=3$.

a) Étudie la position relative de (Q) par rapport à (P) puis donner une représentation paramétrique de (Q) .

b) Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur (Q) .

6) Soit $(P) \cap (Q) = (D_1)$

Donner une représentation paramétrique de (D_1) puis déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur (D_1) .

II.) Translations et Homothéties

Activité 3

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points $A(2; 0; -1)$, $B(1, -1, 0)$, $C(-1, 0, 1)$ et $D(0, 1, -1)$.

1) Donner l'expression analytique de l'homothétie h_o de centre A et de rapport $k=3$.

2) Donner l'expression analytique des homothéties h_1 ($B; \frac{1}{2}$), h_2 ($C; 2$) et h_3 ($D; -4$).

3) Déterminer l'expression analytique de $h_1 \circ h_3$ et préciser ses éléments caractéristiques.

4) Déterminer l'expression analytique de $h_2 \circ h_1$ et donner ses éléments caractéristiques.

5) Soit h l'homothétie de centre $G(0; 1; -1)$ et de rapport $k=-4$ et la translation t de vecteur $\vec{u}(-2; 1; 1)$.

a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $h \circ t$.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $t \circ h$.

Activité 4

Soit (P) et (P') les plans d'équations respectives $2x+3y+z+2=0$ et $2x+3y+z-2=0$. On considère l'application f qui à tout point M de l'espace associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MH} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{ME}$$

où ABCDEFGH est un cube. On donne le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1) Donner l'expression analytique de la projection orthogonale sur (P) puis déterminer les coordonnées de H' , image de $H(1, 1, 0)$ par p.

2.a) Vérifier que (P) et (P') sont parallèles.

b) En déduire qu'il existe une translation dont on déterminera le vecteur qui transforme (P) en (P').

3.a) Donner une représentation paramétrique de l'ensemble des antécédents (Δ) de H' par p.

b) Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur cet ensemble.

4.a) Déterminer l'image H'' de H par cette projection puis montrer que l'équation cartésienne du plan (Q) passant par H, H' et H'' est :

$$\frac{3}{4}x - \frac{25}{14}y + \frac{27}{7}z + \frac{29}{28} = 0.$$

b) Prouve que $(\Delta) \subset (Q)$.

5) Déterminer l'intersection du plan (P), (Q) et du plan (R) d'équation : $x+y-z+1=0$.

6.a) Démontrer que f est une translation dont on donnera le vecteur.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $t \circ h_1$ avec $h_1(H'; |x_{H''}|)$ puis $h_2 \circ t^{-1}$ avec $h_2(H''; Z_H)$.

7) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $h_3^{-1} \circ t \circ h_1 \circ h_2 \circ t^{-1}$ avec $h_3(O; \frac{-8}{7})$.

III.) Symétries orthogonales

Activité 5

Soit (P) le plan d'équation cartésienne $2x-y+z=1$ et g l'application de l'espace dans lui-même d'expression analytique :

$$\begin{cases} 3x' = -x - 2y - 2z + 6 \\ 3y' = -2x - y + 2z - 6 \\ 3z' = -2x + 2y - z + 12 \end{cases}$$

1) Déterminer l'expression analytique de la réflexion S de plan (P) puis définir une projection vectorielle associée à S.

2) Démontrer que g est un demi-tour dont on précisera l'axe puis définir une projection vectorielle associée à g.

3) Démontrer que l'application f définie par :

$$\begin{cases} 3x' = -x + 2y - 2z + 2 \\ 3y' = 2x + 2y + z - 1 \\ 3z' = -2x + y + 2z + 1 \end{cases}$$

est une réflexion dont on précisera le plan.

4) Déterminer l'expression analytique du demi-tour S_{Δ} d'axe (Δ) de système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

Activité 6

On considère dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points $I(3; 0; 0)$, $J(0, 3, 0)$, $K(0, 0, 3)$ et le point G, centre de gravité du triangle IJK.

1) Déterminer les coordonnées de G et démontrer que (OG) est orthogonale au plan (IJK).

2) Déterminer les coordonnées de l'image de O par la réflexion $S_{(IJK)}$.

3) Déterminer les coordonnées des images de O, I, J et K par le demi-tour $S_{(OG)}$.

4) Soit (P) le plan d'équation $2x-y+z=3$ et $H(3; 2; 2)$ un point de l'espace.

a) Déterminer les coordonnées des images respectives O' et H' des points O et H par la réflexion de plan (P).

b) Démontrer que les droites (OH) et (O'H) sont sécantes en un point de (P) dont on précisera les coordonnées.

5.a) Déterminer les images O' et A' des points O et A(2 ; 2 ; -1) par le demi-tour d'axe (D) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

b) Donner un système d'équations cartésiennes de la droite (O'A').

Activité 7

L'entrepreneur Vigan est un grand producteur de maïs. Son frère Elavagnon très matheux l'aide souvent dans la construction du grenier de stockage de sa production agricole et lui fournit de temps à autre quelques informations sur cette production. En 2016, le grenier qu'ils devraient construire a la forme d'un cube ABCDEFGH dans l'espace muni du repère orthonormé (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$) d'unité graphique 4m. Ce grenier est divisé en deux compartiments : le premier est le tétraèdre ABCF qui contient des produits devant empêcher les insectes destructeurs du maïs. Le second compartiment représentant le reste du grenier devrait contenir la quantité de maïs produite cette année-là. Pour faire peur aux rats et souris pouvant détruire le maïs stocké, Elavagnon envisage de placer en chacun des points L, J et K des gongs automatiques de telle sorte que : $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$. Enfin au point O défini par : $O = \text{bar} \{(A, 2), (B, 1), (C, 3)\}$, Elavagnon projette d'y placer un gris-gris qui devrait mettre en déroute tout voleur mettant pied dans ce champs de maïs.

Impressionné par tout cela, Gbadagba qui passe en Terminale scientifique et qui venait de commencer son stage dans cette entreprise décide d'étudier les relations mathématiques qui en découlent.

Tu es invité(e) à te joindre à Gbadagba pour consolider tes acquis en répondant aux questions suivantes :

1.a) Démontrer que la droite (EB) est orthogonale au plan (DGF).

b) Prouver que les droites (AJ), (BK) et (CL) sont concourantes au point O.

2.a) Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires puis donner une représentation paramétrique du plan (AHC). En déduire une équation cartésienne du plan (AHC).

b) Donner un repère du plan (P), image du plan (AHC) par la translation t de vecteur $\overrightarrow{BE}$.

c) Démontrer que l'intersection du plan (AHC) avec les plans (Q) et (R) d'équation cartésienne respective : $-x + y + z = 0$ et $x + y - z = 0$ est réduite au singleton A(0 ; 0 ; 0).

4.a) Donner une équation cartésienne du plan (P'), image de (P) par l'homothétie de centre $\Omega(1 ; 2)$ et de rapport $k = \sqrt{2}$.

b) Déterminer une équation cartésienne (H) image d'espace par la réflexion f de plan (P).

5.) Sachant que la masse volumique est $\rho = 0,63894375 \text{ kg/m}^3$, déterminer en kilogrammes, la quantité de maïs que peut contenir le grenier à construire.

SA n°2 : Organisation des données

Séquence 1 : Système d'équations

I.) Résolution par substitution

Activité 1

Le plan est muni d'un repère (O ;I ;J).

1) Résoudre le système (S) défini par :

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 6 \\ x + y - z = 1 \\ x - 5y - z = 9 \end{cases}$$

2.a) Représenter graphiquement l'ensemble E des points M dont les coordonnées (x ;y) vérifient le système (S) d'inéquations :

$$\begin{cases} x + 2y \geq 6 \\ 5x + 4y \leq 40 \end{cases} \text{ avec } x \geq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq 7.$$

b) Parmi les points de E, déterminer ceux dont les coordonnées :

i) ceux dont les coordonnées rendent maximale l'expression $x+y$.

ii) rendent maximale, en nombre entier $x+y$. Préciser les valeurs de ces maximums.

iii) rendent minimale l'expression $2x+y$. Préciser la valeur de ce minimum.

Activité 2

Barbara se rend au marché et achète des bananes, des mangues et des ananas dont les prix à l'unité sont respectivement 25F, 60F et 80F. Elle achète un total de 12 fruits pour une somme de 640F.

1.a) Détermine le nombre de fruits de chaque variété.

b) Si on désigne par $a, b, et c$ les nombres respectifs de de bananes, mangues et ananas, vérifier que les nombres c, a, b dans cet ordre sont des entiers consécutifs.

2.) Résoudre suivant les valeurs du nombre réel m le système:

$$\begin{cases} (\sqrt{b-3} - 1)x - my = \sqrt{c-1} + c - a \\ x - (\sqrt{b^2 - a^2 - 2a - 1} + 1)y = m \end{cases}$$

II. Résolution par la méthode du pivot de Gauss.

Activité 3

1.a) Résoudre le système (S) suivant :

$$\begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \\ 5x + 3y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

b) Déduis-en les solutions du système (T) :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x-2|}} - \frac{20}{y} - \frac{7\sqrt{3}z}{\cos\frac{\pi}{3}} = 3 \\ \frac{5}{\sqrt{|x-2|}} + \frac{12}{y} + \frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{6}}z = 3 \\ \frac{3}{\sqrt{|x-2|}} + \frac{4}{y} + \frac{2\sqrt{3}}{\cos\frac{2\pi}{3}}z = -1 \end{cases}$$

2) Résous le système (R):

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ -2x + y + z = \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{2\pi}{3}}} \end{cases}$$

3) Prouve que le système (S') suivant admet une infinité de solutions :

$$\begin{cases} (\sqrt{2 - \sqrt{-\cos\pi}})x + 2y = 4 - 5z \\ x + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}y + 2z = 6 \\ x = \frac{1}{2}(10 - 3y - 7z) \end{cases}$$

Activité 4

Sonia vend les fruits comme de la banane, de l'ananas, de la mangue et du raisin dont les prix sont respectivement fixés x, y, z et t .

Pendant 04 jours, elle a décidé de s'amuser à établir des liens entre ses ventes journalières.

- Le premier jour, elle a vendu une banane, 2 ananas, 3 mangues et 4 raisins et obtient 4800F ce jour-là.
- Le 2^{ème} jour, elle se rend compte que la sommation du double du prix de la banane, du triple du prix de l'ananas ajouté au prix

de 4 mangues et un raisin vendu dans la journée donne 6800F.

- Le 3^{ème} jour, elle gagne 7200 F en vendant 3 bananes, 4 ananas, une mangue et 2 raisins.
- Le 4^{ème} jour, elle vend 3 raisins, 2 mangues, un ananas et trouve 5200F diminué du quadruplet du prix d'une banane.

1) Traduire les données en système d'équations linéaires.

2) Retrouver le prix de la banane, de la mangue, de l'ananas et du raisin.

Activité 5

Le professeur Cocou ouvre son coffre-fort avec un code de 4 chiffres x, y, c et d dans l'ordre $cxdy$ avec $x=3a$; $y=2b$ où a, b, c et d sont des entiers naturels composant la fonction $f : x \mapsto ax^3 - bx^2 - cx + d$.

Cette fonction prend la valeur $\frac{31}{6}$ en -1 , et cette valeur représente un maximum de f . De plus, la courbe représentative (c) de f admet une demi-tangente horizontale au point M d'abscisse 2 et passe par le point $A(1 ; \frac{11}{6})$.

Un jour, Monsieur Cocou oublie son code et souhaite le retrouver avec les données paramétriques relatives à ce dernier.

1) Traduire les données sous forme d'équations.

2) Retrouver le code oublié.

3) Soit g la fonction de variable réelle x définie par :

$$g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 4.$$

Etablir un lien entre g et f . Construis la courbe (c) de g puis déduis-en la construction de (C_g) sans étudier g .

Activité 6

a) Résous suivant les valeurs du réel m le système (S) d'inconnu x, y, z et t :

$$(S) : \begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = 1 \\ x + y + mz + t = 1 \\ x + y + z + mt = 1 \end{cases}$$

b) Déduis-en suivant les valeurs de m les solutions du système :

$$(S') : \begin{cases} m \sin x + 5y + \cos z + t\sqrt{2} = 1 \\ \sin x + 5my + \cos z + t\sqrt{2} = 1 \\ \sin x + 5y + m \cos z + t\sqrt{2} = 1 \\ \sin x + 5y + \cos z + mt\sqrt{2} = 1 \end{cases}$$

c) Déduis-en de même suivant les valeurs de m les solutions du système (S'') :

$$\begin{cases} m(x^2 - 1) + \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{|y-2|}} - z + \sum_{k=0}^t k \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ (x^2 - 1) + \frac{m\sqrt[3]{5}}{\sqrt{|y-2|}} - z + \sum_{k=0}^t k \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ (x^2 - 1) + \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{|y-2|}} - mz + \sum_{k=0}^t k \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ (x^2 - 1) + \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{|y-2|}} - z + m \sum_{k=0}^t k \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$$

d) On pose :

$$\alpha_{\zeta}^{\Sigma} = \sqrt{27 - \sqrt{5 + \sqrt{18 - \sqrt{1 + \sqrt{9}}}}}$$

Donner les solutions du système (S''') :

$$\begin{cases} \alpha_{\zeta}^{\Sigma} x + 2y + 3z - t = \sqrt[3]{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\ x + 2\alpha_{\zeta}^{\Sigma} y + 3z - t = \lim_{t \rightarrow \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)} \sum_{k=0}^t k \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ x + 2y + 3\alpha_{\zeta}^{\Sigma} z - t - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 0 \\ x + 2y + 3z - \alpha_{\zeta}^{\Sigma} t = 1 \end{cases}$$

Séquence 2 : Arithmétique**I. Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$** **Activité 1**

On considère les lois de compositions $*$ et $\overline{\alpha}$ définies respectivement dans $\mathbb{R}$ par : $\forall a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$a * b = a + b - 1 \text{ et } \overline{\alpha} y = \sqrt{2}xy - 6x.$$

1.a) Prouver que $(\mathbb{R}; *)$ est un groupe abélien.

b) $(\mathbb{Z}; *)$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{R}; *)$?

2.a) $(\mathbb{R}; \overline{\alpha})$ est-il un groupe abélien ?

b) Si oui, $(\mathbb{Z}; \overline{\alpha})$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{R}; \overline{\alpha})$?

3.a) Vérifier si $(\mathbb{R}; +, *)$ est un anneau.

b) Si oui, cet anneau est-il commutatif ?

c) Si oui cet anneau est-il unitaire ?

4) Montre que $\mathbb{Z}$ est archimédien.

5.a) Démontrer que $\forall \delta \in \mathbb{R}, \delta \times 0 = 0$.

b.) Prouver que pour tout nombre réel δ , on a : $\delta + 0 = \delta$ et que $\delta \times 1 = \delta$.

Activité 2

Démontre par récurrence que pour tout entier naturel non nul on a :

$$1) 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3) \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$4) \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$5) \sum_{k=1}^n k(n-k) = \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

Activité 3

1) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système : $\begin{cases} xy \leq 4x \\ x + y = 8 \end{cases}$

2) Soit δ l'entier naturel qui, divisé par 23 a pour reste 1 et qui divisé par 17 a le même quotient et pour reste 13.

a°) Vérifier que $\delta = \overline{423}^5 - 66$.

b°) Ecris δ en base 9.

c°) On donne : $\begin{cases} a = (\delta + 3)q + r \\ a + q + r = 2978 + \delta \end{cases}$ où r désigne le reste de la division euclidienne de a par $\delta + 3$.

Démontre que $a = 2958$ et $q = 8$.

Activité 4

On donne $N = \overline{432}^\alpha$ où α est un entier supérieur strictement à 4. La valeur minimale ξ que peut prendre N dans le système décimal représente en dizaine de francs le montant du petit déjeuner de Bello, une élève de la Terminale C. On donne.

$$f(x) = \xi x^2 + 2x - \overline{\text{FOA8}}^{16} + \overline{521}^6.$$

1.a) Que représente 4 et 2 dans l'écriture de N en base α ?

b) Dédurre que l'écriture $\overline{432}^4$ n'a mathématiquement pas de sens.

c) Déterminer l'écriture décimale de N dans la base α puis écrire $\overline{432}^5$ dans la base 8 puis 25 sans le ramener dans le système décimal.

d) Déterminer le montant du petit déjeuner de Bello.

2.a) Déterminer les racines de f .

(On donnera une valeur arrondie à deux décimales des racines de f).

b) Si φ et ψ désignent les racines de f , (φ étant inférieur à ψ), calculer le coefficient β défini par :

$$\frac{\varphi - 2\psi}{567^8} + (\min(t; -y; z))^2 + \sqrt{\max(|y|; |z|)}$$

où y, t et z vérifient le système d'équations défini dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} t - 7z = 3 + 5y \\ 3y - 3 = -5t + z \\ 3t + y - 2z = -1 \end{cases}$$

(On donnera une valeur arrondie à deux décimales de β).

c) Résous le système : $\begin{cases} 2k \geq \beta m \\ k + \left(\beta - \frac{55}{100}\right)m = 2 \end{cases}$

dans $\mathbb{Z}$.

3.) Déterminer la base dans laquelle on a :

$$\overline{620} - \overline{231} = \overline{356}.$$

4.) Déterminer le reste de la division euclidienne de $\overline{BAC}^{16}$ par 5.

5.a) Prouve que $\overline{BACD}^{2017} = 1 + \overline{BACC}^{2017}$.

b) Dédure de tout ce qui précède que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n + (\xi + \varphi - 2\psi)^2}{\overline{BACD}^n + \overline{BACC}^n} \right) = 0.$$

II.) Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Activité 5

1) Prouver de deux manières différentes que 108625 est divisible par 11.

2) Déterminer le nombre de multiples de 9 compris entre -700 et 700.

3) Déterminer l'ensemble des diviseurs de 80.

4) Déterminer les entiers naturels x et y tels que $x^2 - y^2 = 12$.

5) Sans effectuer la division euclidienne, prouver que 60372 est divisible par 9.

6.a) Donner suivant les valeurs de l'entier n le reste de la division euclidienne de $n + 2$ par 2.

b) Prouve que $n^2 - 2n + 1$ est divisible par $n - 1$.

c) Démontre que $n^3 - 4n^2 + n + 6$ est divisible par $n - 2$, par $n - 3$ et par $n + 1$.

7.a) Démontre que pour tout entier naturel n , $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.

b) Prouver que $n^2 + 3n + 2$ est divisible par 2 pour tout entier naturel n .

Activité 6

1). On définit dans $\mathbb{Z}$ la relation de congruence par : $x \equiv y[n] \Leftrightarrow x - y = kn, k \in \mathbb{Z}$.

Démontrer que cette relation est une relation équivalente.

(On rappelle qu'une relation est

équivalente lorsqu'elle est réflexive, symétrique et transitive).

2) Soit $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que y divise x .

Démontrer que $\forall (a; b) \in \mathbb{Z}^2$, on a : $a \equiv b[x] \Rightarrow a \equiv b[y]$.

3.a) Démontrer que $2^{64k} \equiv 1[5], \forall k \in \mathbb{N}$.

b) En déduire tous les entiers naturels n tels que $2^{n+1} - 1 \equiv 0[5]$

4) Soit α un entier naturel décimal non nul.

Déterminer α pour que $C_\alpha^2 \equiv 0[10]$.

Activité 7

1) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{N}$:

a) $15 \times 3^n \equiv 3[7]$

b) $n \times 7^{2n} + 4n - 1 \equiv 0[8]$

2.a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 7^{2014} par 9.

b) Déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division euclidienne de 7^n par 10.

c) Déterminer dans le système décimal, suivant les valeurs de n le chiffre des unités de :

$$N = \sum_{k=0}^n 7^k.$$

3.a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 5^n par 3.

b) Dédus-en les entiers naturels n pour lesquels $5^{n-17} - 1$ est divisible par 3.

4) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $\overline{724ab} \equiv 0[9]$.

5) Déterminer a et b pour que $\overline{28a75b}$ soit divisible par 3 et par 11.

6) Déterminer les couples $(x; y)$ pour lesquels l'écriture $\overline{xyxxxxy}^3$ a mathématiquement un sens. On admet que $1 \leq x \leq y$.

Activité 8

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 \equiv -2[6]$.

- 2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$.
 3) Etablir les tableaux de $\div$ et de $\times$ dans $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ et $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$.
 4) Résoudre les équations suivantes :

a) $5x + 3 = 7$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

b) $x^2 + x + 6 = 0$ dans $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})$.

c) $3x^2 + 6x + 5 = 0$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

- 5) Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ x + 5y = 2 \end{cases} \text{ dans } (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2.$$

Activité 9

- 1.a) Déterminer suivant les valeurs de x le reste de la division euclidienne de $x^2 - x + 1$ par 7. En déduire les x pour lesquels $x^2 - x$ soit divisible par 7.

- b) Donne le reste de la division euclidienne de $(987)^2 - 987 + 1$ par 7.

- 2) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{N}, 3^{2x+1} + 2^{x+2} \text{ est divisible par 7.}$$

- 3) Démontrer que :

$$5^{2m} - 3^m \equiv 0[11], \forall m \in \mathbb{N}.$$

- 4.a) Démontrer que $x^5 - x$ est divisible par 5 $\forall x \in \mathbb{N}$.

- b) Déduis –en tous les entiers naturels n pour lesquels $(x^5 - x)^{\frac{n^2+3n+2}{2}} - n^3 + 3$ soit divisible par 5, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

(on pourra remarquer que

$$n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2))$$

Activité 10

Soit N l'entier naturel dont l'écriture dans le système de numérotation de base 13 est :

$$N = \overline{25x3}.$$

Pour quelle valeur de x :

- 1) N est-il divisible par 6 ?
- 2) N est-il divisible par 4 ?
- 3) N est –il divisible par 24 ?

Activité 11

- 1.a°) Pour tout couple de nombres réels (x, y) , montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a la relation :

$$x^n - y^n = (x - y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

- b°) Soit (a, b, p) des entiers éléments de $\mathbb{N}$. Déduire de la question précédente que s'il existe un entier $l \in \mathbb{N}$ tel que $b = a + pl$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $b^n = a^n + pm$.

- 2.a°) Soit (a, b, p) des entiers éléments de $\mathbb{N}$. En utilisant la question 2, montrer que si $a - b$ est divisible par p ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} \text{ est aussi divisible par } p.$$

- b°) En déduire que si $a - b$ est divisible par p^n , alors $a^p - b^p$ est divisible par p^{n+1} .

Activité 12

Soit n un entier naturel.

- 1.a°) Justifier que $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ est égal à $n(n+1)(n+2)(n+3)$.

- b) En déduire que $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ est divisible par 24.

- 2°) Déduire de la question 3 que

$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 120.

- 3.a°) Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout nombre impair est 1.

- b°) Montrer de même que tout nombre pair x vérifie $x^2 \equiv 0[8]$ ou $x^2 \equiv 4[8]$.

- 4°.a) Soient a, b, c trois entiers impairs.

Déterminer le reste de la division euclidienne par 8 de $a^2 + b^2 + c^2$ et de $2(ab + bc + ca)$.

b°) En déduire que ces deux nombres ne sont pas des carrés parfaits puis $ab + bc + ca$ non plus.

III.) PPCM et PGCD de deux entiers relatifs

Activité 13

1.a) Démontrer en utilisant l'Algorithme d'Euclide que 564 et 271 sont premiers entre eux.

b) En déduire deux entiers relatifs a et b tels que : $564a + 271b = 1$.

2) Résoudre (E_0) : $564x + 271y = 0$.

3) a) Trouver un couple de solution $(x_0; y_0)$ à l'équation (E) : $564x + 271y = 1$.

b) En déduire les solutions de l'équation (E).

4) a) Justifier que l'équation $564x + 271y = 3$ admet de solutions dans $\mathbb{Z}$.

b) Au fait, $564x + 271y = 3$ est l'équation d'une droite (D) du plan. Déterminer les points de cette droite à coordonnées entières.

Activité 14

Soit n un entier naturel qui s'écrit dans le système décimal $n = \overline{abcabc}$ avec $a \neq 0$.

1. a). Déterminer n tel que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

* n est divisible par 5,

* l'entier $\overline{bc}$ est le double de a .

b.) Décomposer le nombre ainsi obtenu en produit de facteurs premiers.

2.)

a. Montrer que n est divisible par $\overline{abc}$. En déduire qu'il est divisible par 7, 11 et 13.

b. Montrer que n ne peut pas être un carré parfait (c'est-à-dire le carré d'un entier naturel).

3.) Montrer que 121 et 140 sont premiers entre eux.

4.) On pose $n_1 = 121121$ et $n_2 = 140140$. On appelle (E) l'équation $n_1x + n_2y = 1001$ d'inconnues les entiers relatifs x et y .

a.) Déterminer une solution particulière de (E)

b.) Résoudre (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

Activité 15

1) Démontrer à l'aide du théorème de Bézout que $\text{PGCD}(2m+1; 3m+1) = 1 \forall m \in \mathbb{Z}$.

2.a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $3x - 4y = 6$

b) Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{Z}$:

$$i) \begin{cases} x \equiv 0 \pmod{11} \\ x \equiv -1 \pmod{25} \end{cases} \quad ii) \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{4} \\ x \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

$$iii) \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv -1 \pmod{12} \end{cases} \quad iiiii) : \begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ y \equiv x^2 \pmod{8} \end{cases}$$

3) Démontrer que la fraction $\frac{7m+3}{5m+2}$ est irréductible $\forall m \in \mathbb{Z}$.

4) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs m tels que $m+2$ divise $2m-1$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

Activité 16

1) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes suivants :

$$a) \begin{cases} \text{PGCD}(x; y) = 354 \\ x + y = 5664 \end{cases} ; b) \begin{cases} \text{PGCD}(x; y) = 2 \\ x \times y = 252 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \text{PPCM}(x; y) = 168 \\ x \times y = 1008 \end{cases} ; d) \begin{cases} \text{PPCM}(x; y) = 504 \\ x + y = 135 \end{cases}$$

2)a°) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E') : $2x - 3y = 0$.

b°) Déterminons dans $\mathbb{Z}^2$ une solution de l'équation (E) : $2x - 3y = 3$.

c°) Résoudre l'équation (E).

3) Pour tout couple $(a; b)$ d'entiers naturels, on désigne par μ leur PPCM et par δ leur PGCD.

a°) Déterminer les couples $(a; b)$ d'entiers naturels tels que : $2\mu + 3\delta = 11$.

b°) Dresser la liste des diviseurs de 108.
Déterminer les couples $(a ; b)$ d'entiers naturels tels que $\mu - 3\delta = 108$ et $10 < \delta < 15$.

4.a) En utilisant l'Algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers x et y tels que : $45x - 28y = 1$.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $45x - 28y = 1$.

c) En déduire dans $\mathbb{Z}^2$ les solutions de l'équation (E) : $45x - 28y = 6$.

Activité 17

Dans tout l'exercice, x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$. $\mathcal{F}$ est l'ensemble des couples $(x ; y)$ tels que $\text{PGCD}(x ; y) = y - x$.

1.a) Calculer $\text{PGCD}(363 ; 483)$.

b) Le couple $(363 ; 484)$ appartient-il à $\mathcal{F}$?

2. Soit n un entier naturel non nul ; le couple $(n ; n+1)$ appartient-il à $\mathcal{F}$?

Justifier votre réponse.

3.a) Montrer que $(x ; y)$ appartient à $\mathcal{F}$ si et seulement si il existe un entier naturel k non nul tel que $x = k(y - x)$ et $y = (k + 1)(y - x)$.

b) En déduire que pour tout couple $(x ; y)$ de $\mathcal{F}$ on a :

$$\text{PPCM}(x ; y) = k(k + 1)(y - x).$$

4.a) Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

b) En déduire l'ensemble des couples $(x ; y)$ de $\mathcal{F}$ tels que $\text{PPCM}(x ; y) = 228$.

Activité 18

Soit a et b des entiers naturels non nuls tels que $\text{PGCD}(a+b ; ab) = p$ où p est un nombre premier.

1.a) Démontrer que p divise a^2 .

(On remarquera que $a^2 = a(a+b) - ab$).

b) En déduire que p divise a . On constate de même que p divise b .

Démontre que $\text{PGCD}(a ; b) = p$.

2. On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$.

a) Déterminer a et b pour que :

$$\begin{cases} \text{PGCD}(a ; b) = 5 \\ \text{PPCM}(a ; b) = 170 \end{cases}$$

b) En déduire les solutions du système : $\begin{cases} \text{PGCD}(a + b ; ab) = 5 \\ \text{PPCM}(a ; b) = 170 \end{cases}$

Activité 19

On considère deux entiers naturels, non nuls, x et y premiers entre eux.

On pose $S = x + y$ et $P = xy$.

1. a.) Démontrer que x et S sont premiers entre eux, de même que y et S .

b.) En déduire que S et P sont premiers entre eux.

c.) Démontrer que les nombres S et P sont de parités différentes (l'un pair, l'autre impair).

2.) Déterminer les diviseurs positifs de 84 et les ranger par ordre croissant.

3.) Trouver les nombres premiers entre eux x et y tels que : $S \times P = 84$.

4. Déterminer les deux entiers naturels a et b vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a + b = 84 \\ ab = d^3 \end{cases} \text{ avec } d = \text{PGCD}(a ; b).$$

(On pourra poser $a = dx$ et $b = dy$ avec x et y premiers entre eux.)

Activité 20

(Les trois parties sont indépendantes).

Partie A

On considère l'équation (E) : $7x - 6y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F) :

$$7n - 3 \times 2m = 1.$$

- 3.) On suppose que $m \leq 4$. Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
- 4.) On suppose maintenant que $m \geq 5$.
 - a.) Montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F), alors $7n \equiv 1[32]$.
 - b.) En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.
 - c.) En déduire que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7n \equiv 1 \pmod{5}$.
 - d.) Pour $m \geq 5$, existe-t-il des couples (n, m) d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?
- 5.) Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

Partie C

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 2^n + 3 \times 7^n + 14^n - 1.$$

- 1.a) Calculer u_3 .
- b) Montrer que, pour tout entier naturel n , u_n est pair.
- c) On note $(\mathcal{E})$ l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n) .

Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble $(\mathcal{E})$?

- 2.) On rappelle le petit théorème de Fermat : « Si p est un nombre premier et q un entier naturel premier avec p , alors $q^{p-1} \equiv 1[p]$ ».

Soit p un nombre premier strictement supérieur à 7.

Soient m et n deux entiers naturels tels que $14 = mn$.

- a) Quelles sont les valeurs possibles de m ?
- b) Montrer que $14 \times m^{p-2} \equiv n[p]$.
- c) En déduire que $14u_{p-2} \equiv 0[p]$.
- d) L'entier p appartient-il à l'ensemble $(\mathcal{E})$?

- e) Déterminer $(\mathcal{E})$.

Activité 21

- 1) Résoudre les équations suivantes :

$$a) \begin{cases} 4x + 1y = 2 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases} \text{ dans } (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2.$$

$$b) \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases} \text{ dans } (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^2.$$

- 2) Etant donné un entier relatif n , on considère les entiers relatifs $A = 3n+4$ et $B = 9n-5$.

- a) Déterminer suivant les valeurs de n , le plus grand diviseur commun de A et B .
- b) Déterminer les valeurs de n pour que le plus grand diviseur commun de A et B soit égal à 17 et le plus petit commun multiple de A et B soit égal à 884.

- 3) Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :

- a) PPCM(x ; 6)=96 ; b) PPCM(x ; 72)=216.
- c) PGCD(x ; 630)=105 avec $600 < x < 1100$.

IV.) Nombres premiers

Activité 22

Les deux parties de cette activité sont indépendantes.

Partie A

- 1) Démontrer que 401 est un nombre premier.
- 2.a) Trouver la décomposition de 17640 en produit de facteurs premiers.
- b) En déduire le nombre de diviseurs de 17640.
- 3.a) Décomposer le nombre entier 469 en produit de facteurs premiers.
- b) Trouver tous les couples $(x ; y)$ d'entiers positifs tels que $x^3 - y^3 = 469$.

Partie B

- 1.) On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) d'inconnue n définie par :

$$3n^2 + 6n + 5 \equiv 0[7].$$

- a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') définie par :

$$3n(n + 2) \equiv 2[7].$$

- b) En déduire les solutions de l'équation (E).

- 2.) Un entier naturel A s'écrit $\overline{361}^\alpha$ dans le système de numération de base α et a pour reste 3 dans la division euclidienne par 7.

- a) Démontrer que $3\alpha^2 + 6\alpha - 2 \equiv 0[7]$.

- b) En déduire l'ensemble des valeurs possibles de α puis vérifier que 8 est une valeur possible de α .

- 3.) On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (F) d'inconnue (x, y) définie par :

$$x^2 + 10x = y^2 + 46.$$

- a) Vérifier que l'équation (F) est équivalente à : $(x + 5)^2 - y^2 = 71$.

- b) Démontrer que 71 est un nombre premier.

- c) Déterminer alors l'ensemble des solutions de l'équation (F).

Activité 23

- 1) Décomposer 145 en produit de facteurs premiers.

- 2) En déduire tous les couples d'entiers naturels $(x ; y)$ tels que $x^2 - y^2 = 145$.

- 3.a) Les nombres a et b étant deux entiers naturels premiers vérifiant $a > b$, trouver tous les couples $(x ; y) \in \mathbb{N}^*$, vérifiant $x^2 - y^2 = a^2 b^2$.

- b) Déterminer l'ensemble des couples $(x ; y)$ dans le cas où $a=17$ et $b=2$.

Activité 24

Le nombre n désigne un entier naturel.

- 1) Démontrer que $n^2 + 5n + 4$ et $n^2 + 3n + 2$ sont divisibles par $n+1$.

- 2) Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n+1$.

- 3) En déduire que, quel que soit n , $3n^2 + 15n + 19$ n'est pas divisible par $n^2 + 3n + 2$.

- 4.a) Déterminer l'ensemble des éléments x de $\mathbb{Z}$ qui vérifient : $3x \equiv 23[7]$.

- b) En déduire l'ensemble des couples $(x; y)$ de $\mathbb{Z}^2$ qui vérifient : $3x - 7y = 23$.

- 5.a) Soit k un élément de $\mathbb{Z}$. Montrer que $2k + 1$ et $9k + 4$ sont premiers entre eux.

- b) Démontrer que le pgcd des nombres $2k - 1$ et $9k + 4$ est 1 ou 17.

- c) Pour quelles valeurs de k est-il effectivement 17 ?

Activité 25

- 1) Montrer que, si deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux, $a^2 + b^2$ et $a \times b$ le sont aussi.

- 2) Déterminer toutes les paires d'entiers naturels $(x ; y)$ tels que $\text{PPCM}(x ; y) = 30$ et $x^2 + y^2 = 325$.

3) Soit n un nombre premier.

a) Démontrer que pour tout entier naturel p strictement compris entre 0 et n , on a :

$$C_n^p \equiv 0[n].$$

b) En déduire que pour tous entiers relatifs a et b , on a : $(a+b)^n \equiv a^n + b^n[n]$.

4.a) Démontrer que : $\forall a \in \mathbb{N}, a^n \equiv a[n]$.

b) En déduire que pour tout entier naturel a premier avec n , on a : $a^{n-1} \equiv 1[n]$.

Activité 26

Sonia, pendant les wick-end, vend de la mangue, de la banane et des oranges. Un jour, elle a vendu un nombre a de mangues et un nombre b de bananes, tels que le plus grand commun multiple de a et b divisé par le deuxième entier naturel μ vérifiant $3\mu \equiv 2[7]$ a pour reste $r=5$ et pour quotient $q=10$. Par ailleurs, Sonia réalise que lorsqu'on diminue le carré de la somme de a et b du double du produit de a et b , on trouve $\mu^2 + 5\text{ppcm}(a; b) + 41$. Le bénéfice y en centaines de francs que réalise Sonia en fonction du nombre x de clients possibles est donné par la droite (Δ) d'équation $ax - by = c$ où c est le nombre d'oranges vendues. Ce jour là, Sonia a reçu le plus petit nombre de clients possibles.

1. Justifier que :
$$\begin{cases} \text{ppcm}(a; b) = 105 \\ a^2 + b^2 = 666 \end{cases}.$$

2. Prouver que $\text{pgcd}(a; b)$ est égal à 1 ou 3.

3. Retrouver le nombre de mangues et de bananes vendus ce jour-là.

4. En fait la droite (Δ) est l'intersection du plan (P) d'équation $2x + 9y - 2z - 6 = 0$ et du plan (Q) passant par $O(0, 0)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}(\frac{13}{2}; -15; 1)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

a) Justifier que le nombre d'oranges vendues est égal à 6.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $15x - 21y = 6$.

c) Déterminer les points A_k à coordonnées entières de (Δ) .

5. Déterminer le bénéfice réalisé par Sonia.

Activité 27

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la surface S_1 d'équation $z = x^2 + y^2$ et la surface S_2 d'équation $z = xy + 2x$.

Partie A

On note P le plan d'équation $x = 2$, E_1 l'intersection de la surface S_1 et du plan P et E_2 l'intersection de la surface S_2 et du plan P .

1. a.) Déterminer la nature de l'ensemble E_1 .

b. Déterminer la nature de l'ensemble E_2 .

2. a.) Représenter les ensembles E_1 et E_2 dans un repère $(A; \vec{j}, \vec{k})$ du plan P où A est le point de coordonnées $(2; 0; 0)$.

b.) Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ donner les coordonnées des points d'intersection B et C des ensembles E_1 et E_2 .

Partie B

L'objectif de cette partie est de déterminer les points d'intersection $M(x; y; z)$ des surfaces S_1 et S_2 où y et z sont des entiers relatifs et x un nombre premier.

On considère un tel point $M(x; y; z)$.

1. a.) Montrer que $y(y - x) = x(z - x)$.

b.) En déduire que le nombre premier x divise y .

2. On pose $y = kx$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

a. Montrer que x divise 2, puis que $x = 2$.

b. En déduire les valeurs possibles de k .

3. Déterminer les coordonnées possibles de M et comparer les résultats avec ceux de la Partie A, question 2.b.

Activité 28

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. On nomme (S) la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1.) Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan (xOy).

2.) On nomme A et B les points de coordonnées respectives $(3 ; 1 ; -3)$ et $(-1 ; 1 ; 1)$.

a.) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.

b.) Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).

3.) Déterminer la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy).

4. a. On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z = 68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.

b. M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée.

On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant $a < b$ et $\text{ppcm}(a ; b) = 440$, c'est-à-dire tel que (a, b) soit solution du

$$\text{système (K)} : \begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a ; b) = 440 \end{cases}.$$

Montrer que si (a, b) est solution de (K) alors $\text{pgcd}(a ; b)$ est égal à 1 ou 5. Conclure.

Activité 29

1.a) Calculer $(1+\sqrt{6})^2$, $(1+\sqrt{6})^4$ et $(1+\sqrt{6})^6$.

b) Appliquer l'algorithme d'Euclide à 847 et 342. Que peut-on en déduire ?

2) Soit n un entier naturel non nul. On note a_n et b_n les entiers naturels tels que :

$$(1 + \sqrt{6})^n = a_n + b_n \sqrt{6}.$$

a) Que valent a_1 et b_1 ?

b) D'après les calculs de la question 1.a) donner d'autres valeurs de a_n et b_n .

c) Calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

3.a) Démontrer que si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1} + b_{n+1}$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

4.a) Démontrer que si a_n et b_n sont premiers entre eux alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, a_n et b_n sont premiers entre eux.

Activité 30

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres :

$$a_n = 4 \times 10^n - 1$$

$$b_n = 2 \times 10^n - 1$$

$$c_n = 4 \times 10^n + 1$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , a_n et c_n sont divisibles par 3 et b_n n'est pas divisible par 3.

2. L'entier b_3 est-il premier ?

3.a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul, $a_{2n} = c_n b_n$.

b) En déduire la décomposition de a_6 en produit de facteurs premiers.

4.a) Démontrer que, pour tout entier n non nul on a $\text{PGCD}(b_n, c_n) = \text{PGCD}(b_n, 2)$.

5. Soit l'équation (E) : $b_3 x + c_3 y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y .

a) Justifier que l'équation (E) admet au moins une solution.

b) Résoudre l'équation (E).

Activité 31

Dans cet exercice a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. a.) Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$, alors les nombres a et b sont premiers entre eux.

b.) En déduire que si $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$ alors a et b sont premiers entre eux.

2.) On se propose de déterminer tous les couples d'entiers strictement positifs $(a ; b)$ tels que $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$. Un tel couple sera appelé solution.

a.) Déterminer a lorsque $a = b$.

b.) Vérifier que $(1 ; 1)$, $(2 ; 3)$ et $(5 ; 8)$ sont trois solutions particulières.

c.) Montrer que si $(a ; b)$ est solution et si $a < b$, alors $a^2 - b^2 < 0$.

3. a.) Montrer que si $(x ; y)$ est une solution différente de $(1 ; 1)$ alors $(y - x ; x)$ et $(y ; y + x)$ sont aussi des solutions.

b.) Déduire de 2.b) trois nouvelles solutions.

4.) On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$, $(a_n ; a_{n+1})$ est solution. En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Activité 32 (Nombres de Fermat)

1.) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \geq 1$, on a :

$$2^{2n+k} - 1 = (2^{2n} - 1) \times \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2^{n+i}} + 1)$$

2.) On pose : $F_n = 2^{2^n} + 1$.

Montrer que pour $m \neq n$, F_n et F_m sont premiers entre eux.

3.) En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Activité 33

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009 [10000]$.

Partie A

1.) Déterminer le reste de la division euclidienne de 20092 par 16.

2. En déduire que $20098001 \equiv 2009 [16]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2009^2 - 1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1 \end{cases}$$

3. a.) Démontrer que u_0 est divisible par 5.

b.) Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n(u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + u_n + 1)).$$

c.) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n est divisible par $5n+1$.

4. a.) Vérifier que $u_3 = 2009^{250} - 1$ puis en déduire que $2009^{250} \equiv 1 [625]$.

b.) Démontrer alors que $2009^{8001} \equiv 2009 [625]$.

Partie C

5.) En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que

$2009^{8001} - 2009$ est divisible par 10 000.

2. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009.

Activité 34

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = 2x_n - 1 \end{cases}; \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2x_n + 3 \end{cases}$$

1.) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $x_n = 2^{n+1} + 1$.

2. a.) Calculer le PGCD de x^8 et x^9 , puis celui de x^{2002} et x^{2003} . Que peut-on en déduire pour x^8 et x^9 d'une part, pour x^{2002} et x^{2003} d'autre part ?

b.) x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?

3.a.) Démontrer que pour tout entier naturel n , $2x_n - y_n = 5$.

b. Exprimer y_n en fonction de n .

c.) En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de $2p$ par 5.

d.) On note d_n le PGCD de x_n et y_n pour tout entier naturel n . Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

Séquence 3 : Nombres complexes

I. Forme algébrique d'un nombre complexe et détermination de lieux géométrique.

Activité 1

Déterminer l'ensemble des points M de l'espace d'affixe Z tels que :

1) $|Z+2+i|=|3Z-9+3i|$.

2) $\left| \frac{\bar{Z}-2+i}{Z+5-2i} \right| = 1$.

3) $|Z+\bar{Z}-1|=5$.

4) $|Z-\bar{Z}-1+i|=3$.

5) $|(1-i)Z-2i|=|Z+2+3i|$.

6) $\arg(3i-Z) \equiv 0[2\pi]$.

7) $\arg\left(\frac{1}{Z+2}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

8) $\arg(Z^2-4) \equiv \arg(Z+2)[2\pi]$.

Activité 2

A tout nombre complexe z différent de $2i$, on associe complexe Z :

$$Z = \frac{2iz-5}{z-2i}.$$

Déterminer et représenter les ensembles des points M du plan dont l'affixe Z vérifie la condition indiquée :

- a) Z est un réel strictement positif.
- b) Z est un réel strictement négatif.
- c) Z est un nombre imaginaire.
- d) Z est un nombre imaginaire pur.
- e) $|Z|=1$; f) $|Z|=4$.

II. Forme trigonométrique et Exponentielle d'un nombre complexe.

Activité 3

Partie A

Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

a) $z = -1 + i\sqrt{3}$; b) $z = -\sqrt{6} - i\sqrt{2}$.

c) $z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

d) $z = (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}}$; e) $z = 1 + e^{i\frac{3\pi}{8}}$

f) $z = 1 - e^{i\frac{3\pi}{8}}$

Partie B

On considère les nombres complexes :

$$Z_1=1+i\sqrt{3} ; Z_2=1-i ; Z_3=\frac{Z_1}{Z_2} ;$$

$$Z_4=(i-\sqrt{3})^5 ; Z_5=(-\sqrt{2}-i\sqrt{2})^3 \text{ et}$$

$$Z_6=\frac{Z_4^3}{Z_2^2} ; Z_7=Z_4^3 \times Z_5^5 .$$

1)Ecrire Z_1 et Z_2 sous forme trigonométrique et exponentielle.

2)Donne la forme algébrique et trigonométrique de Z_3 puis en déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{7\pi}{12})$ et $\sin(\frac{7\pi}{12})$.

3)Donne la forme algébrique de Z_4 et de Z_5 .

4)En déduire le calcul de Z_6 et de Z_7 .

5)On donne $z=2i(\sqrt{2} + \sqrt{2})$.

Calcule z^{2016} puis déterminer les entiers naturels n tels que $(1+i)^n$ soit un nombre réel négatif.

Activité 4

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ d'unité d'axe 2cm.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; $b = 2i$; $c = \frac{1}{2}i$.

Etant donné un point M d'affixe z différent de A , on considère le point M' d'affixe Z tel que :

$$Z = \frac{z-2i}{2z-1-i}.$$

On pose : $z = x+iy$ et $Z=X+iY$, avec $x ; y, X$ et Y des réels.

a)Exprimer X et Y en fonction de x et y .

b)Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que Z soit réel.

c)Déterminer l'ensemble (F) des points M tels que Z soit imaginaire pur.

2.a)Vérifier que le point B appartient à (E) et à (F) et que le point C appartient à (F) .

b)Construis (E) et (F) dans le même plan.

3.a)Déterminer le module et un argument de $\frac{b-c}{a-c}$ et interpréter géométriquement les résultats obtenus. En déduire la nature du triangle ABC .

b)Que représente alors le segment $[AB]$ pour l'ensemble (F) ?

Activité 5

On donne les nombres complexes

$$u = -i - \sqrt{3} \text{ et } v = 2 + u.$$

1.a)Donne une interprétation géométrique du module et un d'argument de u .

b)Mettre u sous forme exponentielle.

2) Démontre que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$1+e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\theta} \text{ et } 1-e^{i\theta} = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\theta}.$$

3.a)Donne la forme trigonométrique de v .

b)En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

4) Détermine le plus petit entier naturel n pour que v^{2017n} soit imaginaire pur.

5) Détermine les entiers relatifs n pour que v^n soit un nombre réel non nul.

Activité 6

On considère les nombres complexes ci-après :

$$Z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ et } Z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

1.a)Ecrire le produit Z_1Z_2 sous forme algébrique.

b)Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes Z_1, Z_2 et Z_1Z_2 .

c)En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

2)On pose $Z_3 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}Z_1$.

a)Vérifier que :

$$Z_3 = e^{-i\frac{\pi}{12}}(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}}).$$

b)En déduire le module et un argument de Z_3 .

c) Démontrer que Z_3^{12} est un nombre réel strictement négatif.

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2cm), on considère les points A et B d'affixes respectives Z_1 et Z_2 .

a) Donner une interprétation géométrique du module et d'un argument de Z_1 .

b) Déterminer géométriquement l'ensemble des points M d'affixes z tels que :

$$\left| z - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right| = \left| z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right|.$$

(Extrait du BAC Bénin, Série D, PI 2009)

III. Résolution d'équations à solutions complexes.

Activité 7

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' . On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x', y' sont des nombres réels.

1.) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si, et seulement si :

$$\operatorname{Re}(z'\bar{z}) = 0.$$

2.) Montrer que les points O, M et M' sont alignés si, et seulement si :

$$\operatorname{Im}(z'\bar{z}) = 0.$$

3.) N est le point d'affixe $z^2 - 1$. Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient orthogonaux ?

4.) On suppose z non nul. P est le point d'affixe $\frac{1}{z^2} - 1$.

On recherche l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points O, N et P soient alignés.

a) Montrer que :

$$\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)(\bar{z}^2 - 1) = -\bar{z}^2 \left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2.$$

b.) En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, conclure sur l'ensemble recherché.

Activité 8

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, A, A', B et B' sont les points d'affixes respectives 1, -1, i et $-i$. A tout point M d'affixe z , distincts des points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 , tels que les triangles BMM₁ et AMM₂ soient rectangles isocèles, avec :

$$(\overrightarrow{M_1B}, \overrightarrow{M_1M}) = (\overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{M_2A}) = \frac{\pi}{2}.$$

1.a) Justifier les égalités :

$$z - z_1 = i(i - z_1) \text{ et } 1 - z_2 = i(z - z_2).$$

b.) Vérifier que z_1 et z_2 peuvent s'écrire :

$$z_1 = \frac{1+i}{2}(z+1) \text{ et } z_2 = \frac{1-i}{2}(z+i).$$

2.) On se propose dans cette question de déterminer les points M pour lesquels le triangle OM₁M₂ est équilatéral.

a) Montrer que : OM₁ = OM₂ équivaut à $|z+1| = |z+i|$.

En déduire l'ensemble (Δ) des points M tels que OM₁ = OM₂ et tracer (Δ) sur la figure.

b) Montrer que : OM₁ = M₁M₂ équivaut à : $|z+1|^2 = 2|z|^2$.

c) En déduire l'ensemble (Γ) des points M du plan pour lesquels : OM₁ = M₁M₂.

(On pourra montrer que $|z+1|^2 = 2|z|^2$ équivaut à $|z-1|^2 = 2$).

Tracer ensuite (Γ) .

d) En déduire les deux points M pour lesquels OM₁M₂ est un triangle équilatéral et les placer sur la figure.

Activité 9

On considère le polynôme $P(z)$ suivant :
 $P(z)=z^3+9iz^2+2(6i-11)z-3(4i+12)$.

- 1) Démontrer que l'équation $P(z)=0$ admet une solution réelle z_1 .
- 2) Déterminer un polynôme $Q(z)$ tel que :
 $P(z)=(z-z_1)Q(z)$.
- 3) Démontrer que l'équation $Q(z)=0$ admet une solution imaginaire pure z_2 .
- 4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.
- 5) On définit dans le plan complexe les points $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ où z_3 est la 3^{ème} solution de l'équation $P(z)=0$. Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

Activité 10

On donne : $u = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$.

- 1.a) Mettre u sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.
- b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.
- c) Donne la valeur exacte de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$.
- 2) Mettre u^{1999} sous forme algébrique.
- 3) Déterminer les entiers naturels non nuls n tels que $u^n \in \mathbb{R}$.
- 4) Déterminer les entiers naturels n tels que $u^n \in i\mathbb{R}$.

Activité 11

(Dans l'exercice, on parle d'une maison TATA composée de quatre cases reliées par un mur de base circulaire.)

Alassane a représenté dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(R; \vec{v}, \vec{w})$ les points de contact K, L, M, N des quatre cases avec la base circulaire (Γ) du mur. Les affixes

des points K, L, M sont les solutions de l'équation $P(z)=0$, où $P(z)=z^3+(5-2i)z^2+(4-22i)z+20-60i$ avec $z \in \mathbb{C}$.

1) Démontrer que $P(z)$ admet une racine réelle α que tu détermineras.

2) Déterminer un polynôme $Q(z)$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z)=(z-\alpha)Q(z)$.

3.a) Calcule $(4+6i)^2$.

b) Résous l'équation $z^2-2iz+4-12i=0$ dans $\mathbb{C}$.

c) Résous l'équation $P(z)=0$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$.

4) En réalité, les points de contacts K, L, M, N des quatre cases avec la base circulaire du mur ont respectivement pour affixes :

$$Z_1=2+4i; Z_2=-2-2i; Z_3=-5 \text{ et } Z_4=-1-6i.$$

a) Démontrer que KLMN est un rectangle.

b) Déterminer une équation cartésienne de (Γ) .

c) Représenter (Γ) .

(Extrait du BAC Bénin Série D, APC 2010)

Activité 12

On considère les polynômes P et Q définies par : $P(z)=z^2-2z+5$ et

$Q(z)=z^2-2(1+\sqrt{3})z+5+2\sqrt{3}$ et les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A=1+2i$;

$z_B=1+\sqrt{3}+i$; $z_C=1+\sqrt{3}-i$ et $z_D=1-2i$ dans le plan complexe rapporté à un repère orthogonal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1) Résoudre les équations $P(z)=0$ et $Q(z)=0$.

2.a) Placer les points A, B, C et D dans le repère et préciser la nature du quadrilatère ABCD.

b) Étudie la position relative des droites (AB) et (BD).

c) Prouve que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (c) dont on précisera le centre et le rayon. Tracer (c).

3. On considère l'équation $R(z)$ définie par :

$R(z)=z^2-2(1+2\cos\theta)z+5+4\cos\theta$, où θ désigne un nombre réel quelconque.

a) Résoudre l'équation $R(z)=0$ dans $\mathbb{C}$.

b) Montrer que les images des solutions appartiennent au cercle (c).

Activité 13

On considère le polynôme P défini par :

$$P(z)=z^4-3z^3+\frac{9}{2}z^2-3z+1, z \in \mathbb{C}.$$

1) Démontrer que si z_0 est solution de $P(z)=0$, alors $\bar{z}_0$ et $\frac{1}{z_0}$ sont aussi solutions de $P(z)=0$.

2.a) Calculer $P(1-i)$.

b) En déduire les solutions de l'équation $P(z)=0$.

3) Les points A, B ; C représentent des points du plan d'affixes respectives $z_0, \bar{z}_0$ et $\frac{1}{z_0}$.

a) Placer ces points dans un repère et donner la nature du triangle ABC.

b) Donne une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC.

Activité 14

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. α désigne un nombre réel appartenant à l'intervalle ouvert $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$. On considère l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$(E) : z^2 - 2z + 1 + \tan\alpha = 0.$$

1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) On considère deux nombres complexes $z_1 = 1 + i \tan\alpha$ et $z_2 = 1 - i \tan\alpha$

a) Ecris z_2 en fonction de z_1 .

b) Déterminer $z_1 + z_2$ et exprime $z_1^2 + z_2^2$ et $z_1 z_2$ en fonction de α .

c) Pour quelles valeurs de α a-t-on

$$z_1^2 + z_2^2 = 0 ?$$

d) Calcule le module de z_1 en fonction de $\tan\alpha$ puis en fonction de $\cos\alpha$.

e) Démonstre qu'un argument de z_1 est α .

f) Déduis-en qu'un argument de z_2 est $-\alpha$.

3) On considère les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2 .

a) Détermine un argument α de $\frac{z_1}{z_2}$.

b) Donne une interprétation géométrique de $\arg \frac{z_1}{z_2}$.

c) Quelle est la nature du triangle OAB ?

d) Pour quelle(s) valeur(s) de α OAB est un triangle équilatéral ?

4) On suppose maintenant que $\alpha = \frac{-\pi}{4}$.

Prouver que $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i$.

Activité 15

1) Déterminer les nombres complexes z_1, z_2 et z_3 vérifiant les conditions suivantes :

$$i) \begin{cases} |z_2| = 2|z_1| \\ |z_3| = 2|z_2| \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} \arg(z_2) = \arg(z_1) + \frac{\pi}{2} \\ \arg(z_3) = \arg(z_2) + \frac{\pi}{2} \\ 0 < \arg(z_1) < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$iii) z_1 \times z_2 \times z_3 = 64i.$$

2) Ecris sous forme algébrique $Z = \frac{z_3}{z_2}$ et Z^{2016} .

3) Détermine le plus petit entier naturel non nul n tel que Z^n soit imaginaire pur.

Activité 16

1.a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$Z^6 - (1-i)Z^3 - i = 0.$$

b) Représenter géométriquement les points images des solutions de (E) dans le plan complexe.

2.a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E') : \left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1.$$

b) Placer dans le plan complexe les points images des solutions de (E') et montrer qu'ils sont situés sur un même cercle que l'on déterminera.

Activité 17

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) d'unité graphique : 6 cm.

On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M_0 d'affixe z_0 , définie par : $z_0 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

On définit une suite de points (M_n) de la manière suivante : M_0 a pour affixe 2 et, pour tout entier naturel n , $M_{n+1} = f(M_n)$. On appelle z_n l'affixe de M_n .

1.) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f . Placer les points M_0 , M_1 , M_2 dans le repère (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$).

2.) Montrer que pour tout entier naturel n , on a l'égalité : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{6})}$.

(on pourra faire un raisonnement par récurrence).

3.) Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égal à p .

Montrer que deux points M_n et M_p sont confondus si, et seulement si, $(n - p)$ est multiple de 12.

4. a.) On considère l'équation (E) :

$$12x - 5y = 3 \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

Après avoir vérifié que le couple (4 ; 9) est solution, résous l'équation (E).

b.) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite [Ox).

Activité 18

Partie A

On cherche l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ solutions de l'équation (E) :

$$16x - 3y = 4.$$

1.) Vérifier que le couple (1 ; 4) est une solution particulière de (E).

2.) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$). On considère la transformation f du plan, qui à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{8}}z$. On définit une suite de points (M_n) de la manière suivante : le point M_0 a pour affixe $z_0 = i$ et pour tout entier naturel n , on a :

$$M_{n+1} = f(M_n).$$

On note z_n l'affixe du point M_n .

1.) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f .

2. On note g la transformation $f \circ f \circ f \circ f$.

a.) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g .

b.) En déduire que pour tout entier naturel, $OM_{n+4} = 4OM_n$ et que $(\overrightarrow{OM_n}; \overrightarrow{OM_{n+4}}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où k est un entier relatif.

c.) Représenter les points M_1 ; M_2 ; M_3 ; M_4 , M_5 et M_6 .

3.) Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$z_n = (\sqrt{2})^n e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{3i\pi}{8})}.$$

4.) Soient deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$.

a.) Exprimer en fonction de n et p une mesure de $(\overrightarrow{OM_p}; \overrightarrow{OM_n})$.

b.) Démontrer que les points O , M_p et M_n sont alignés si et seulement si $n-p$ est un multiple de 8.

5.) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que le point M_n appartienne à la demi-droite $[Ox)$.

(On pourra utiliser la partie A).

Séquences 4 & 5 : Limites-Continuité-Dérivabilité-Etude de fonctions

I. Limites-Continuité-Dérivation

Activité 1

Partie A

1.) Déterminer dans chacun des cas, le domaine de définition $\mathcal{D}$ de chacune des fonctions suivantes et calculer leurs limites aux bornes de $\mathcal{D}$.

a) $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$; b) $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x-2}$

c) $f(x) = \frac{|x|+1}{x^2-1}$; d) $f(x) = \frac{x^3+2x^2-x+1}{|x-2|}$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 3x - \frac{|x|}{1-x^2} + x^4 - 1$

Partie B

2) Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes et calculer leur limite en $-\infty$ et ou en $+\infty$.

a) $d(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 1} - 2x$

b) $e(x) = \sqrt{9x^2 - 5x + 1} - 3x$

c) $g(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{4x^2+3}}$; d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x+2|}} - \frac{x}{\sqrt{|x+1|}}$

e) $h(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x^2-x-6}}$; f) $i(x) = \frac{x-\sqrt{x^2-3x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$

g) $j(x) = x\sqrt{1 + \sin^2 x}$

h) $k(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 1}$

3) Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x^2-x-6}} & \text{si } x \neq 3. \\ f(3) = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point d'abscisse 3.

Activité 2

1) Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes et calculer leur limite en 0.

a) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$; b) $g(x) = \frac{1-\cos^2 3x}{x^4}$

c) $h(x) = \frac{\tan 2x}{3x}$; d) $k(x) = \frac{\sin 2x}{x \cos x}$

e) $i(x) = \frac{\tan 2x}{\tan 5x}$; f) $j(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin 2x}$

2) Déterminer le domaine de définition de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{x+\cos x}{3+\cos x}$ et calculer sa limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

3) Déterminer le domaine de définition de f définie par : $f(x) = \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$ et calculer sa limite en $\frac{\pi}{2}$.

4) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{5}(\sin 2x - 1)}{2x - \frac{\pi}{2}}$; b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{31(6x - \pi)}{2\cos x - \sqrt{3}}$

Activité 3

Soit la fonction f_m définie par :

$$f_m(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{|x-1| + m} ; m \in \mathbb{R}.$$

- 1) Donner le domaine de définition D_m de f_m suivant les valeurs de m .
- 2) Calculer suivant les valeurs de m les limites de f_m aux bornes de D_m .
- 3) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_2 sur D_2 .
- 4) Calculer $f_2'(x)$ et donner le signe de f_2' .

Activité 4

Soit g la fonction de variable réelle x définie par :

$$g(x) = \frac{3}{4} \sqrt{|x^2 - 4x - 12|}$$

- 1) Donner le domaine de définition D_g de g et justifier que g est continue sur D_g .
- 2) Etudier la dérivabilité de g en -2 et en 6 puis interpréter les résultats obtenus.
- 3) Calculer $g'(x)$ sur l'ensemble de dérivabilité de g et étudier les branches infinies de (C_g) .

Activité 5

- 1) Vérifier que $f : x \mapsto \frac{1}{1 + \sqrt{1+x}}$ est le prolongement par continuité en 0 de g :

$$x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}.$$

- 2) Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x + \cos x}{x + \sin x}.$$

- a) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction en 0 puis calculer $f'(x)$ après avoir

donné une interprétation graphique des résultats obtenus. On donne $f(0) = 0$.

- b) Précise les branches infinies de (C_f) .

- 3) Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^4 \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- a) Déterminer le domaine de définition de f .
- b) Etudier la dérivabilité de f en 0 .
- c) Calculer la dérivée première de f puis préciser les branches infinies de (C_f) .

- 4) Déterminer l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leur dérivée première:

$$a) f: x \mapsto \frac{x\sqrt{x+1}}{2x-3}$$

$$b) g(x) = \frac{\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^2+3}}{|2x-1|}$$

Activité 6

On considère la fonction f de variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{ax+1}{1-bx} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des réels et } b \text{ strictement inférieur à } 2.$$

- 1.) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f puis calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.
- 2.) Si on admet que f est définie en 1 , prouver que f admet au point d'abscisse 1 une tangente (T) définie par :

$$y = \frac{a+b}{(a-b)^2}x + \left(\frac{a+1}{1-b} - \frac{a+b}{(a-b)^2} \right).$$

- 3.) La tangente (T) est parallèle à la droite d'équation $y = 2$. Par ailleurs, on sait que :

$$\left(1 - \frac{1}{b}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} f''(x) = 1.$$

Déterminer les réels a et b .

4.) On donne la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{(\sqrt{2}-2)x+1}{1-(2-\sqrt{2})x} \text{ pour tout réel } x.$$

Etudier les branches infinies de la courbe (c) de g .

II. Etude de fonctions

Activité 7

On considère la fonction numérique f de variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x^2 - 1}.$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f .

b) Justifier que f est continue sur $\mathcal{D}$.

2) Etudier la dérivabilité de $\mathcal{D}$ puis donner le signe de la dérivée première f' de f .

3.) Calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$ puis dresser le tableau des variations de f .

4.) Etudier les branches infinies de (C) .

5) Dresser la courbe représentative (C) de f .

Activité 8

On considère la fonction numérique f de variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3|x| + 2}{|x| - 1}, & \text{si } x \neq 1 \\ f(x) = -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ d'unité graphique 1 cm. On définit la

fonction g telle que $g(x) + f(x) = 0$ et on note (C') la courbe de g dans le même repère.

1.a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f puis réécrire f sans le symbole de la valeur absolue.

b) Etudier la continuité de f en 1 puis conclure quant à la continuité de f sur $\mathcal{D}$.

2.a) Etudier la dérivabilité de f en 1 et 0 puis donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.

b.) En déduire l'ensemble de dérivabilité $\mathcal{E}$ de f .

3.a) Calculer la dérivée première f' de f pour tout x élément de $\mathcal{E}$ puis donner le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x sur $\mathcal{E}$.

b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition $\mathcal{D}$ puis dresser le tableau des variations de f .

4.a) Etudier les branches infinies de (C) .

c) Tracer la courbe (C) .

5.) Justifier que (C) et (C') sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses puis construire (C') sans étudier g .

Activité 9

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{1+x^2}.$$

Partie A

Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = 1 - x\sqrt{1+x^2}.$$

1.a) Etudie les variations de g .

b) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que $0,78 < \alpha < 0,79$.

c) Déduis-en le signe de $g(x)$.

d) Démontre que $f(\alpha) = \frac{\alpha^4-3}{3\alpha}$ et que $-1,13 < f(\alpha) < -1,10$.

2.a) Démontre que l'équation $g(x)=x$ admet une solution unique β telle que : $0,4 < \beta < 0,5$.

b) Etudie le sens de variation de g' . Que représente le point $I(0 ; 1)$ pour la courbe (C_g) ?

c) Justifie que $\forall x \in [0,4 ; 0,5], |g'(x)| \leq \frac{3}{2}$ puis que $|g(x) - \beta| \leq \frac{3}{2} |x - \beta|$.

Partie B

3.a) Etudie le sens de variation de f (on exprimera $f'(x)$ en fonction de $g(x)$).

b) Dresse le tableau de variation de f .

c) Etudie les branches infinies de (C_f) .

4) Soit h l'application de $\mathbb{R}_-$ dans $f(\mathbb{R}_-)$ définie par : $h(x) = f(x)$.

a) Justifie que h admet une bijection réciproque h^{-1} et précise son ensemble de définition J .

b) Etudie la dérivabilité de h^{-1} sur J . Justifie que le point $A(-\sqrt{3}-2 ; -\sqrt{3})$ est un point de $(C_{h^{-1}})$ puis déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à $(C_{h^{-1}})$ au point A .

5) Tracer les courbes (C_f) et $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère.

6) Soit les fonctions $i(x) = -f(x)$; $k(x) = f(-x)$; $P(x) = |f(x)|$.

Sans étudier ces fonctions, représenter chacune de leur courbe représentative.

Activité 10

Soit g la fonction de variable réelle x définie par :

$$g(x) = \frac{5}{3} \sqrt{|x^2 - 4x - 12|}$$

1) Donner le domaine de définition D_g de g et justifier que g est continue sur D_g .

2) Etudier la dérivabilité de g en -2 et en 6 puis interpréter les résultats obtenus.

3) Calculer $g'(x)$ sur l'ensemble de dérivabilité de g puis achever l'étude des variations de g .

4.) Etudier les branches infinies de (C_g) puis dresser la courbe représentative (C_g) de g .

5.) On pose : $f(x) + g(x) = 0$.

Sans étudier f , dresser, justification à l'appui, sa courbe représentative (C_f) dans le même repère que (C_g) .

Activité 11

Partie A.

Soit $u(x)$ la fonction définie par :

$$u(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2.$$

1) Etudier les variations de u .

2) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que :

$$-\frac{4}{3} < \alpha < -\frac{2}{3}.$$

3) Donner le signe de $u(x)$.

Partie B.

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-x-1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f en 0 .

2) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis donner une interprétation géométrique des résultats.

Préciser l'intervalle de $\mathbb{R}$ sur lesquels f est dérivable.

3.a) Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ (on exprimera $f'(x)$ en fonction de $u(x)$).

b) Déduis-en le signe de $f'(x)$ et précise le sens de variation de f .

4.a) Calcule $f'(x)$ pour $x \geq 0$.

b) Résous l'équation $x + \sqrt{1 + x^2} = 0$ et déduis-en le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

5.a) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Dresse le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

c) Étudie les branches infinies de (C) .

7) Montre que $f(\alpha) = \frac{1}{2}(3\alpha + 1 - \frac{3}{\alpha-1})$ et que $\frac{2}{15} < f(\alpha) < \frac{2}{5}$

8) Trace la courbe représentative (C) de f .

Partie C

Soit g la fonction la restriction de f sur $]0; +\infty[$ vers $I = f(]0; +\infty[)$.

1) Déterminer I .

2.a) Démontre que g admet une application réciproque g^{-1} .

b) Étudier la continuité et la dérivabilité de g^{-1} sur son ensemble de définition.

c) Tracer la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère que (C) .

3) Expliciter $g^{-1}(x)$, $\forall x \in I$.

Activité 12.

Soit f la fonction définie par : $f :]0; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{\cos x}$$

1) Étudie les variations de f .

2) Explique pourquoi f est une bijection de $]0; \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J à préciser.

3) Démontre que f^{-1} la bijection réciproque de f est dérivable en tout point de J .

4) Démontre que $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

5) Construis les courbes représentatives (C) de f et (C^{-1}) de f^{-1} dans le même repère.

Activité 13.

On considère la fonction $g : [0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0; 1]$

$$x \mapsto \sin^2 x$$

1) Démontre que g est une bijection.

2.a) Détermine l'ensemble de dérivabilité E de la bijection réciproque g^{-1} de g .

3) Calcule $(g^{-1})'(\frac{1}{2})$

4) Démontre que $\forall x \in E, (g^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$
 puis retrouve la valeur de $(g^{-1})'(\frac{1}{2})$.

5) Tracer la courbe représentative de g et de g^{-1} dans le même repère.

Activité 14

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x}$.

1) Déterminer le domaine de définition de f .

2) Démontre que f est périodique de période 2π .

3) Démontre que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe (C) de f .

4) Prouve alors qu'on peut étudier f sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ (on remarquera que f est impaire).

5.) Etudie les variations de f et construis sa courbe représentative.

Activité 15

On considère la fonction numérique f de variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f et justifier que son ensemble d'étude peut être réduit à l'intervalle $[0; 2\pi]$.

2) Démontre que $\forall x \in D$, on a : $f'(x) = \frac{2\cos x}{1 + \cos x}$

3) Vérifier que sur $[0; \pi]$, (C_f) présente une branche infinie dont on précisera la nature.

4) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.

5) Tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$ puis préciser les coordonnées des points d'inflexion de (C_f) .

Activité 16

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \cos(3x) \cdot \cos^3 x$$

1) Etudier la périodicité de f .

2) Justifie que f est paire.

3) Prouve que l'ensemble d'étude de f peut être réduit à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (on vérifiera que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe (C) de f) puis précise la

transformation qui permet d'étendre la courbe (C) de f sur son ensemble de définition.

4) Construis la courbe (C) sur $[-\pi; \pi]$. (on prendra 3cm pour l'unité).

5) Soit g la fonction définie par : $g(x) = -f(-x)$.

Sans étudier g , construis sa courbe représentative dans le même repère que (C).

Activité 17

On considère la fonction numérique f de variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x + \sin x}{|x| - 1}, & \text{si } x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \\ f(x) = 0, & \text{si } x = -1 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f .

b) Etudier la continuité de f en -1 et 1 puis conclure quant à la continuité de f sur $\mathcal{D}$.

2.a) Etudier la dérivabilité de f en -1 , 0 et 1 puis déduis-en l'ensemble de dérivabilité E de f . La fonction f a-t-elle un point anguleux en 1 ou en 0 ou en -1 ?

b) Calculer la dérivée première f' de f pour tout x de E puis donner le signe de f' .

c) Vérifier si f admet un point d'inflexion.

3.) Calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$ puis dresser le tableau des variations de f .

4.) Etudier les branches infinies de (C) .

5) Dresser la courbe représentative (C) de f .

Activité 18

On considère la fonction numérique f de variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x+1}, & x \geq \frac{\pi}{2} \\ f(x) = \frac{\sin x + 1}{1 - 2\cos x}, & x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\\ f(x) = \frac{x-1}{x+1}, & x \in]-\infty; 0[\end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f .

b) Etudier la continuité de f en 0 et $\frac{\pi}{2}$ puis conclure quant à la continuité de f sur $\mathcal{D}$.

2.a) Etudier la dérivabilité de f en 0 et $\frac{\pi}{2}$ puis déduis-en l'ensemble de dérivabilité E de f .

3.a) La fonction f a-t-elle un point anguleux en 0 ou $\frac{\pi}{2}$?

b) Calculer la dérivée première f' de f pour tout x de E puis donner le signe de f' .

c) Vérifier si f admet un point d'inflexion.

4.) Calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$ puis dresser le tableau des variations de f .

5.) Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C})$ puis dresser la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f .

Séquence 6 : Primitives

Activité 1

Détermine les primitives F des fonctions f suivantes sur un intervalle que l'on précisera :

1) $f(x) = x^2 - 2x + 1$; 2) $f(x) = 3x - 1 + \frac{17}{x^2}$

3) $f(x) = 5x + \frac{3}{\sqrt{x}}$; 4) $f(x) = (3x^3 + 1)^2$

5) $f(x) = (x+1)^2(x-1)$; 6) $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^4}$

7) $f(x) = 5x^3(x^4 - 7)^4$; 8) $f(x) = \frac{5x-1}{(5x^2 - 2x + 1)^2}$

9) $f(x) = \frac{3}{(1+2x)^5}$; 10) $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{(8x^3 + 2x - 2015)^{-31}}$

11.) $f(x) = x^2(x-1)^2 - \frac{9x}{x^2-7}$

12.) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x} - \frac{(x+3)^3}{x} - \frac{1}{2}x + 4$

Activité 2

Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives de la fonction f sur l'intervalle K .

a) $f(x) = \sqrt{3x+4}$ sur $\mathbb{R}_+$

b) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+6}}$ sur $\mathbb{R}$

c) $f(x) = \frac{2x-4}{\sqrt{(x^2-4x+25)^3}}$ sur D_f

d) $f(x) = x\sqrt{1-x}$ sur $\mathbb{R}$

e) $f(x) = x\sqrt{x+1}$ sur $\mathbb{R}_+$

f) $f(x) = 12x\sqrt{x^2+3}$ sur $\mathbb{R}$

g) $f(x) = (4x^3 + 2x - 1)\sqrt{(x^4 + x^2 - x + 67)^3}$ sur D_f

Activité 3

Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive F de la fonction f sur l'intervalle K qui vérifie la condition indiquée.

a) $f(x) = \cos x \sin^5 x$ sur $\mathbb{R}$ et $F(\frac{\pi}{2}) = 1$.

b) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin 2x}$ sur $K =]0; \pi[$ et $F(\frac{\pi}{2}) = 3$

c) $f(x) = \cos^4 x$ sur $\mathbb{R}$ et $F(\frac{\pi}{2}) = 0$.

d) $f(x) = (1 + \tan^2 x) \tan^5 x$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ et $F(0) = 1$.

e) $f(x) = \cos^3 x \sin^2 x$ sur $\mathbb{R}$ et $F(0) = 1$.

f) $f(x) = \frac{\tan x}{\cos x}$; sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ et $F(\pi) = 9$.

Activité 4

Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{3x^3 - 14x^2 + 20x - 7}{(x-2)^2} ;$$

- 1) Prouver que f admet une infinité de primitives sur un intervalle à préciser.
- 2) Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$.
- 3) En déduire les primitives de f sur $]2; +\infty[$.
- 4) Déduis-en la primitive F de f qui prend la valeur 3 en 0.
- 5) f est une primitive d'une autre fonction g.
- a) Déterminer cette fonction.
- b) g peut-elle être la primitive d'une autre fonction ? Justifier votre réponse.
- c) Que peut-on conclure de tout ce qui précède ?

Activité 5

Par décomposition en fractions partielles, déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$1.^{\circ} f(x) = \frac{x^3}{x+2} ; 2.^{\circ} f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

$$3.^{\circ} f(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} ; 4.^{\circ} f(x) = \frac{5}{x(x-3)^2}$$

$$5.^{\circ} f(x) = \frac{4x^3+2x^2+4x}{x^2+1} + \sin(-x+3)$$

$$6.^{\circ} f(x) = \frac{x^2+4x+1}{x^3+3x^2+4x+2} + \tan(\sqrt{2}x+7)$$

Activité 6

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$1.^{\circ} f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^3-4x} ;$$

$$2.^{\circ} f(x) = \frac{x^3-x^2-2x}{2x^3-6x^2-5x+1} ;$$

$$3.^{\circ} f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)^2} - \sqrt[3]{\sqrt{x+4}}$$

$$4.^{\circ} f(x) = \frac{2}{x^2(x+1)^2} + \cos^5 x$$

$$5.^{\circ} f(x) = \frac{x^3}{x+2} + \tan^2 x - \sqrt{(x+1)^3}$$

$$6.^{\circ} f(x) = \frac{3x^3+5x^2+x-1}{x^2+2x+1} - |x + \sin(\sqrt[3]{5}x+2)|$$

$$7.^{\circ} f(x) = \frac{x^2+1}{x(x^3+1)^2} - \sin^4 x$$

$$8.^{\circ} f(x) = \frac{1}{x^2+1} + \tan x$$

$$9.^{\circ} f(x) = \frac{1}{x^2-1} - \frac{\cos^2(x-2)}{(7)!}$$

$$10.^{\circ} f(x) = \frac{\cos x}{x^2+1} - \frac{\sqrt{x}}{2x} + |x^2 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x+3\right)|$$

Séquence 7 : Fonction logarithme népérien

I. Equations et Inéquations logarithmiques.

Activité 1

1) Ecris plus simplement :

$$a) \ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1).$$

$$b) \ln\left(\frac{\sqrt{5}+2}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-2}{2}\right).$$

2) Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$a) \ln(x^2 - x - 1) = 0.$$

$$b) \ln(x+3) + \ln(x+5) = \ln 45$$

$$c) \ln|2x-5| - \ln|3x+2| = \ln|x+1|$$

$$d) \ln(x+2) \leq \ln(x+3)$$

$$e) \ln(x+4) + \ln(2-x) > \ln(3x+2)$$

3) Etablir pour tout x strictement positif, que :

$$a) \ln(1+x) = \ln(\sqrt{e}x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}$$

$$b) \ln\left(\frac{\sqrt{3}+x}{4x^3}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) - 2\ln x + \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

II. Calcul de limites de la fonction $\ln$

Activité 2

Dans chacun des cas suivants déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f et calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$:

$$1) f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$$

$$2) f(x) = (1-x)^2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$3) f(x) = \ln(x + \sqrt{3x^2 - 4})$$

$$4) f(x) = x(\ln x)^2$$

$$5) f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$6) f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 1}$$

$$7) f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

$$8) f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$9) f(x) = (\sqrt{x} - 2)^2 \ln\left(1 - \frac{e}{x}\right)$$

$$10) f(x) = \frac{\ln(x^2 - 3x + 2)}{\sqrt{x} - 1}$$

III. Etude de la fonction logarithme népérien.

Activité 3

On considère la fonction numérique f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On munit le plan d'un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}.$$

1.a) Etudie le sens de variation de g .

b) Détermine la limite de g en $+\infty$.

c) Dédus-en le signe de $g(x)$ pour tout x strictement positif.

2) Démontre que pour tout $x \in [2; 3]$, on a : $g(x) < \frac{1}{2}$.

Partie B

3.a) Détermine la limite de $x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ en 0^+ .

b) Démontre que f est continue en 0.

4) Etudie la dérivabilité de f en 0 puis donne une interprétation graphique du résultat obtenu.

5) Etudie le sens de variation de f .

6.a) Démontre que la limite en $+\infty$ de $x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ est égale à 2.

b) Dédus-en $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c) Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$ est asymptote à la courbe (C) de f au voisinage de $+\infty$.

7) Trace la droite (Δ) , la courbe (C) et la droite (D) d'équation $y=x$ dans le repère.

8.a) Démontre que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle K à préciser.

b) Trace dans le même repère précédent la courbe (C') de la réciproque.

c) Démontre que le point $A'(1+\ln 4; 2)$ appartient à (C') .

d) Calcule $(f^{-1})'(1+\ln 4)$.

Partie C

Dans cette partie, on désigne par I l'intervalle $[2; 3]$.

9) Soit h la fonction définie par : $h(x) = f(x) - x$.

a) Démontre que pour tout x élément de I , $h'(x) < 0$.

b) Déduis-en le sens de variation de h .

c) Démontre que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique dans I et que l'on note α .

10.a) Démontre que pour tout x de I , $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$.

b) En déduis que pour tout x de I ,

$$|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|.$$

11) Démontre que $(f^{-1})'(\alpha) = \frac{2\alpha(\alpha+2)}{2\alpha^2 - \alpha - 2}$.

Activité 4

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (x-2)^2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) \text{ si } x \neq 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1a) Détermine l'ensemble de définition D de f .

b) Calcule les limites de f aux bornes de D .

c) Justifie que f est continue sur D .

d) Étudie la dérivabilité de f à droite en 2 puis interprète graphiquement le résultat obtenu.

2) On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = 2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) - \frac{1}{x-1}.$$

a) Étudie les variations de g .

b) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0,6 < \alpha < 0,61$.

c) Déduis-en le signe de $g(x)$.

3.a) Justifie que f est dérivable sur D et que $\forall x \in D \setminus \{2\}$, on a : $f'(x) = (x-2)g(x)$.

b) Étudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

c) Démontre que $f(\alpha) = \frac{(2-\alpha)^2}{2(\alpha-1)}$ puis déduis un encadrement de $f(\alpha)$ avec deux nombres décimaux d'ordre 2.

4.a) Donne le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $h \rightarrow \ln(1+h)$.

b) Démontre que la droite d'équation $y = x - \frac{5}{2}$ est asymptote à la courbe (C) de f .

c) Construis (C) . (Prends $\alpha \approx 0,6$)

5) Soit l'application k définie par :

$$[2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto k(x) = f(x).$$

a) Justifie que k est bijective.

b) Étudie la dérivabilité de k^{-1} , réciproque de k .

c) Justifie que le point $A(\ln 2; 3)$ appartient à la courbe représentative (C') de k^{-1} puis donne une équation cartésienne de la tangente à (C') en A .

d) Construis (C') dans le même repère que (C) .

Activité 5

On considère la fonction numérique f de variable réelle x définie par :

$$f(x) = x + 1 + \ln\left(\frac{|x|}{x+2}\right).$$

1) Déterminer le domaine de définition D de f puis calculer les limites de f aux bornes de D .

2)a. Justifie que f est dérivable en tout nombre réel de D et que l'on a :

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x(x+2)}.$$

b) Déduis-en le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.

c) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une est -1 et l'autre α . Vérifie ensuite que $0,5 < \alpha < 0,6$.

d) Détermine une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse -1 .

3) On considère la fonction g définie sur $] -2; 0[$ par :

$$g(x) = 2x + \ln\left(\frac{-x}{x+2}\right) + 2$$

a) Étudie le sens de variation de g .

b) Calcule $g(-1)$ et déduis-en le signe de $g(x)$ pour tout x élément de $] -2; 0[$.

c) Précise la position relative de la courbe (C) et de la tangente (T) sur l'intervalle $] -2; 0[$.

4)a. Étudie les branches infinies de (C).

b) Étudie sur $] 0; +\infty[$, la position relative de la courbe (C) et de la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$.

c) Trace (C), (Δ) et (T) sur le même graphe.

Activité 6

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A.

Soit la fonction numérique g définie sur $] 0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2 + 1}.$$

1.a) Étudie les variations de g .

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$, admet une unique solution α et que $0,5 < \alpha < 0,6$.

2) Détermine le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

3.a) Démontrer que, pour tout x élément de $] 0; +\infty[$, on a : $f'(x) = g(x)$.

b) En déduire le sens de variation de f sur $] 0; +\infty[$.

4) On pose $k(x) = xf(x)$ pour tout x élément de $] 0; +\infty[$.

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x)$.

(on pourra poser $h = \frac{1}{x^2}$).

b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

5.a) Démontrer que f est continue à droite en 0.

b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

6.a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Donner l'allure de la courbe (c) de f (l'unité graphique est 5cm et on prendra $f(\alpha)=0,805$).

(Extrait modifié du BAC D Benin 2009(PI)).

Activité 7

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Soit la fonction f de variable réelle x définie par :

$$f(x) = 2x + 1 + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

On désigne par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1.) Etudier les limites de cette fonction aux bornes de son ensemble de définition.
- 2.) Préciser les asymptotes à la courbe $(\mathcal{C}f)$ de f . En particulier, on établira l'existence d'une asymptote oblique $(\mathcal{D})$.
- 3.) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
- 4.) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}f)$ par rapport à $(\mathcal{D})$.
- 5.) Construire la courbe $(\mathcal{C}f)$ de f .

Partie B

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \ln|x^2 - 2x - 3|.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

- 1.) Déterminer l'ensemble de définition de f .

2.) Ecrire f sans valeur absolue puis calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3.) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

4.) Montrer que la droite $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe $(\mathcal{C})$.

5.) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

Activité 8

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}, & x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique : 2cm) .

1.a) Prouver que pour tout réel $t \geq 0$, on a :

$$1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1.$$

b) En déduire que $\forall x > 0$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x. \quad (1)$$

2.) Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}.$$

a) Calculer $g'(x)$.

b) Prouver que pour tout nombre réel $x \geq 0$, on a : $0 \leq g'(x) \leq \frac{x^2}{4}$.

c) En déduire que pour tout nombre réel $x \geq 0$, on a : $0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{12}$. (2)

3.a) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

b) Etablir que pour $x \geq 0$, on a :

$$g(x) \leq \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}.$$

Grace à (2), établir le sens de variation de f .

4.a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) A l'aide de (2), montrer que pour $x \geq 0$, on a :

$$x - \frac{x^3}{12} - \frac{2x}{2+x} \leq x - \ln(1+x) \leq x - \frac{2x}{2+x}$$

puis que :

$$\frac{1}{2+x} - \frac{x}{12} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{x}{2+x}.$$

c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ et en déduire que $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

d) Soit (T) la tangente à $(\mathcal{C}f)$ en $x_0 = 0$.

En utilisant (1), montrer que $(\mathcal{C}f)$ est au-dessus de (T) pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

5°) Dresser le tableau de variation de f .

Tracer $(\mathcal{C}f)$ et (T) dans le même repère.

6) On pose $h(-x) = -f(x)$.

Sans étudier h , tracer, tout en justifiant la courbe représentative $(\mathcal{C}h)$ de h dans le même repère que $(\mathcal{C}f)$.

Activité 9

On considère la fonction g définie sur

$]0 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(t) = \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}, & t > 0 \\ g(t) = 0, & t = 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C}g)$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 10 cm).

Soit $\mathcal{A}$ l'aire en unité d'aire du domaine du plan limité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C}g)$, et la droite d'équation $x = 1$.

Partie A

On considère la fonction f définie sur

$$]-1 ; +\infty[\text{ par : } f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

1.) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2.) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

3.) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]1 ; +\infty[$ une solution unique α .

Vérifier qu'une valeur approchée de α à 10^{-1} près par défaut est 3,9.

4.) Préciser suivant les valeurs de x le signe de $f(x)$.

Partie B

5.) Etudier la continuité puis la dérivabilité de g en 0.

6.) Montrer que pour tout réel t strictement positif, on a :

$$g'(t) = \frac{1}{2t\sqrt{t}} f(t).$$

7.a) Calculer la limite de g en $+\infty$.

b) Dresser le tableau de variation de g .

c.) Construire la courbe $(\mathcal{C}g)$ de g .

Partie C

8.a) Démontrer que la fonction g_1 définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$g_1(x) = \sqrt{x} \ln(1+x) \text{ est dérivable en 0.}$$

b) Soit φ la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = 2\sqrt{x} \ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt.$$

Montrer que φ est dérivable en tout point de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et que $\varphi'(x) = g(x)$

c) Dédus des questions précédentes que :

$$\mathcal{A} = 2\ln 2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt.$$

9.) On définit sur l'intervalle $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction k définie par : $k(\theta) = \tan^2 \theta$.

$$\text{Soit } h: x \mapsto \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt.$$

a) Calculer $(h \circ k)(\theta)$.

b) Prouver que pour tout $\theta \in I$,

$$(h \circ k)'(\theta) = 4 \tan^2 \theta.$$

c) Ecrivez $\tan^2 \theta$ sous la forme

$(\tan^2 \theta + 1) - 1$ pour déterminer une primitive de $(h \circ k)'$.

Donner l'expression de $(h \circ k)$.

10) Calculer $h(1)$ puis déduis des résultats précédents la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

Activité 10

On considère la fonction f définie sur

$]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x^2 + x}.$$

On désigne par $(\mathcal{C}f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unité graphique 2cm.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$$

1.) Etudier le sens de variation de g .

2.a) Calculer $g(1)$ et $g(2)$ puis montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$.

b) Trouver un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .

3.) Dédure le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B

4.) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$ puis donner une interprétation graphique des résultats obtenus.

5.a) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \times g(x).$$

b) En déduire le sens de variation de f .

c) Montrer que $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ et dresser le tableau de variations de f .

6.) Construire la courbe $(\mathcal{C}f)$ de f .

Partie C

On se propose de trouver un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ de l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

7.) Montrer que pour tout réel $x \geq 1$,

$$\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$$

8. a) Calculer $I = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x} dx$.

b) En faisant une intégration par parties,

calculer : $J = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2} dx$.

9.a) Dédure un encadrement de $K = \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx$

b) Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de K puis déduire une valeur approchée de $\mathcal{A}$ en cm^2 .

Activité 11

On considère la fonction numérique g de variable réelle x définie par :

$$g(x) = \frac{1}{x-1} + \log_2 |2x+1|$$

1) Déterminer le domaine de définition D de g .

2) Calcule les limites de g aux bornes de D .

3) Calcule $g'(x)$ et déduis-en son signe suivant les valeurs de x .

4) Dresse le tableau de variation de g .

5) Étudie les branches infinies de la courbe (c) de g .

6) Construis (c) dans un repère orthonormé $(O ; I J)$ d'unité graphique 2cm.

Activité 12

Soit m un réel. On considère la famille de fonctions f_m définie par :

$$f_m(x) = x + \ln \sqrt{x^2 + mx + 1}.$$

On désigne par $(\mathcal{C}_m)$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal d'unité graphique 1cm.

Partie A

1.) Pour $m = 2$, étudier les variations de f_2 .

2.) Déterminer l'ensemble $(\mathcal{E}_m)$ pour que f_m soit définie sur $\mathbb{R}^+$.

3.) Montrer que les courbes $(\mathcal{C}_m)$ des fonctions f_m passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées.

4.) Pour $m = 0$, on considère la fonction f_0 .

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f_0 sur son ensemble de définition.

b) Étudier les variations de f_0 .

5.a) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_0)$ de f_0 admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

b) Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_0)$.

c) Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_0)$ puis tracer la courbe $(\mathcal{C}_0)$.

Partie B

Soit la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x \ln(1+x^2)}{2}.$$

6.a) Déterminer le domaine de définition de F .

b) Montrer que $F'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} + f_0(x)$.

c) Soit g une primitive de la fonction u définie par : $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

$$g \text{ vérifie : } \begin{cases} g'(x) = u(x) \\ g(0) = 0 \\ g(1) = \frac{11}{4} \end{cases}$$

Déduis une primitive de la fonction f_0 .

(On montrera que : $F'(x) = f_0(x) + 1 - u(x)$).

7.) Calculer en cm^2 l'aire de la portion du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C}_0)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

8. Pour $m \in (\mathcal{E}_m)$, on considère la droite $(\mathcal{D}_m)$ définie par : $y = x + m$.

a) Montrer que pour tout $m \in (\mathcal{E}_m) - \{0\}$,

$(\mathcal{C}_m) \cap (\mathcal{E}_m)$ contient toujours deux points dont on donnera les coordonnées. On les notera M_m et M'_m .

b) Montrer que les points M_m et M'_m sont symétriques par rapport à un point I_m .

c) Que se passe-t-il si on fait tendre m vers 0 ?

Activité 13

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions, notées f_n , qui sont définies pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1 + n \ln(x)}{x^2}.$$

On munit le plan d'un repère orthonormé

(O ; $\vec{i}, \vec{j}$) d'unité graphique 5cm. On note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans ce repère.

Partie A

1.) Calculer $f'_n(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur et

$$n - 2 - 2n \ln(x) .$$

2.) Résoudre l'équation $f'_n(x) = 0$ puis étudier le signe de $f'_n(x)$.

3.) Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

4.) Etablir le tableau de variation de la fonction f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n .

5.) Tracer (C_1) et (C_3) .

6.a) Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier n ?

b) Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe (C_4) à partir de (C_2) et (C_4) .

Partie B

1.) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx .$$

2.) En déduire l'aire, en unité d'aire, du domaine du plan limité par les courbes (C_n) et (C_{n+1}) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

3.) On note A_n , l'aire en unités d'aire, du domaine limité par la courbe (C_n) et les droites d'équations $y = 0$, $x = 1$ et $x = e$.

a.) Calculer A_2 .

b) Déterminer la nature de la suite (A_n) en précisant l'interprétation graphique de sa raison.

Partie C

Dans toute la suite, on prendra $n \geq 3$.

1.a) Vérifier que, pour tout n ,

$$e^{\frac{n-2}{2n}} > 1 \text{ et } f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) > 1 .$$

b) Vérifier que l'équation $f_n(x) = 1$ n'a pas de solution sur l'intervalle $\left]1; e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$.

2.) Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet sur l'intervalle $\left[e^{\frac{n-2}{2n}}; +\infty\right[$ exactement une solution notée α_n .

3.) On se propose de déterminer la limite de la suite (α_n) .

a) Calculer $f_n(\sqrt{n})$ et montrer que, pour $n > e^2$, on a : $f_n(\sqrt{n}) \geq 1$.

b) En déduire que, pour $n \geq 8$, on a $\alpha_n \geq \sqrt{n}$ et donner la limite de la suite (α_n) .

Séquence 8 : Fonction exponentielle népérienne

I. Equations et Inéquations impliquant la fonction exp.

Activité 1

1) Résous les équations suivantes :

a) $e^{x^2-3x+2} = 0$; b) $e^{-2x+3} = 1$

c) $e^{3x} + 3e^{2x} - e^x = 3$

d) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

e) $(e^x - 2)(e^{-x} + 1) = 0$

2) Résous les inéquations suivantes :

a) $3e^x - 7e^{-x} < -20$; b) $e^{x^2-3} > e^{2x}$

c) $e^{x^2-1} \leq 1$; d) $\frac{e^{2x+1}}{e^{2x-1}} - 2 \geq 0$

e) $e^{2x} \cdot e^2 - 3ee^x + 2 \leq 0$

3) Etablir, si ces expressions sont définies, que :

a) $\frac{e^x+1}{e^x-1} = \ln e + \frac{2}{e^x-1}$;

b) $(1+e^x)e^{-x} = \frac{2\ln\sqrt{e}}{e^x} + 3\ln x \circ \sqrt[3]{e}$

c) $\ln(x + e^x) = -\ln\left(\frac{1}{e}\right) \times \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) + \ln e^x$

II. Calcul de limites des fonctions exponentielles népériennes.

Activité 2

Détermine le domaine de définition des fonctions suivantes et calcule leurs limites aux bornes de leur domaine de définitions $\mathcal{D}$.

1) $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$

2) $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$

3) $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

4) $f(x) = \frac{3}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$

5) $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$

6) $f(x) = \frac{\ln(1-e^x)}{e^x}$

7) $f(x) = \frac{e^x}{\ln(x^2+1)}$

8) $f(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)$

9) $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}}$

10) $f(x) = \frac{\sin 2x}{1-e^x}$

III. Etude des fonctions exponentielles népériennes.

Activité 3

On considère la fonction numérique f de variable réelle x définie par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x} ;$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - x + e^x$$

1.) Dresser le tableau des variations de g .

2.) Etudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

3.) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

4.a) Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = e^{-x}g(x)$.

b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5.) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.

6.a) Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.

b) Etudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ et de la droite $(\mathcal{D})$.

7.) Construire la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite $(\mathcal{D})$ dans le même repère.

8.) On définit la fonction h symétrique de f par rapport à la droite $(\mathcal{H})$ d'équation $y = -x$. On désigne par $(\mathcal{E})$ la courbe représentative de la fonction h .

a) Comment obtenir la courbe $(\mathcal{E})$ à partir de la courbe $(\mathcal{C})$?

b) Tracer la courbe $(\mathcal{E})$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

Activité 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}.$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

- 1.a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
- b) Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.
- c) Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

- 2.a) Calculer $f'(x)$ et montrer que

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2.$$

- b) Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.

- 3.a) Que peut-on dire de la tangente $(\mathcal{D}')$ à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $\ln 3$?

- b) En utilisant les variations de f , étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D}')$.

- 4.a) Montrer que la tangente $(\mathcal{D}'')$ à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \frac{1}{4}x + 1$.

- b) Etudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la tangente $(\mathcal{D}'')$ sur l'intervalle $]-\infty; \ln 3]$. On pourra utiliser la dérivée seconde f'' de f définie pour tout réel x par :

$$f''(x) = \frac{12e^x(e^x - 3)}{(e^x + 3)^3}.$$

- 5.) On admet que le point I est le centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C})$. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$, les tangentes $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{D}'')$.

Activité 5

On considère la fonction numérique de variable réelle x définie par :

$$f(x) = mx + p + \varphi(x) \text{ où } (m, p) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm. On sait que le point $J(0; 1)$ est le centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C})$, que l'asymptote $(\mathcal{D})$ passe par les points $K(-1; 0)$ et J et que la tangente (Γ) au point d'abscisse 0 a pour équation $y = (1 - e)x + 1$.

Partie A

- 1.) Déterminer une équation de $(\mathcal{D})$.

- 2.a) Démontrer que $m = p = 1$.

- b) En utilisant le point J , montrer que pour tout réel x , on a : $f(x) + f(-x) = 2$.

- c) En déduire après avoir exprimé $f(x)$ et $f(-x)$ que la fonction φ est impaire.

- d) Déduire de la question b) que la dérivée première f' de f est paire.

- 3.) On suppose maintenant que pour tout réel x , $\varphi(x) = (ax + b)e^{-x^2}$ où a et b sont des réels.

- a) En utilisant la parité de φ , démontrer que $b = 0$.

- b) Calculer $f'(x)$.

- c) En utilisant le coefficient directeur de (Γ) , démontrer que $a = -e$.

- d) Etablir l'expression de $f(x)$.

Partie B

Pour la suite, on suppose que :

$$f(x) = x + 1 - xe^{1-x^2}.$$

4.a) Achever l'étude des variations de f .

b) Tracer le courbe $(\mathcal{C})$.

5.) On définit la fonction g symétrique de f par rapport à la droite $(\mathcal{H})$ d'équation

$$y = x - 1.$$

On désigne par $(\mathcal{E})$ la courbe représentative de la fonction g .

a) Comment obtenir la courbe $(\mathcal{E})$ à partir de la courbe $(\mathcal{C})$?

b) Tracer la courbe $(\mathcal{E})$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

Activité 6

On désire étudier la fonction numérique f de variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x}{e^x - \ln x} \end{cases}$$

Soit u et v deux fonctions définies par :

$$u(x) = e^x - x - 1 \text{ et } v(x) = -x + 1 + \ln x.$$

1.a) Etudie les variations des fonctions u et v .

b) Dédus-en que $\forall x \in]0; +\infty[, e^x \geq x + 1$ et $\ln x \leq x - 1$ puis $e^x - \ln x \geq 2$.

2.a) Démontre que le domaine de définition D de f est $D =]0; +\infty[$.

b) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0 .

3) Détermine la limite de f en $+\infty$ puis interprète graphiquement le résultat.

4) On désigne par g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - \ln x - xe^x + 1$.

a) Etudie le sens de variation de g puis dresse son tableau de variation.

b) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et justifie que $1,23 \leq \alpha \leq 1,24$.

c) Etudie les branches infinies de la courbe représentative de g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

5) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

6.a) Démontre que $f(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha e^{\alpha-1}}$.

b) Détermine un encadrement de $f(\alpha)$ puis déduis-en que $0,308$ est une valeur approchée de $f(\alpha)$ à $0,001$ près.

c) Construis dans le carré de côté 10 la courbe (Γ) de la fonction f .

(Extrait du test APMB série D, Edition 2010).

Activité 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$ et on note (c) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(0; \vec{i}; \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2$ et $\|\vec{j}\| = 5$.

Partie A

Soit g la fonction numérique sur $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Etudie les variations de g .

2) Démontre que l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f est $\mathbb{R}$.

Partie B

3) Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

4.a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - x)^2}$.

b) Dresse le tableau de variation de f .

5.a) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (c) de f en son point d'abscisse 0 .

b) Etudie la position de (c) par rapport à (T) .

(on pourra utiliser le signe de $g(x)$).

6) Trace la courbe (c) et la tangente (T) et la tangente (T) dans le même repère.

(Extrait du test APMB série D, Edition 2011)

Activité 8

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(0 ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = e^{-x} - \frac{1}{2} \ln|2x - 1|.$$

On désigne par (c) la courbe représentative de f .

1.a) Déterminer l'ensemble de définition D de f .

b) Calculer les limites de f aux bornes de D.

2.a) Déterminer la fonction dérivée première f' et la fonction dérivée seconde f'' de f .

b) Étudier le sens de variation de f' .

c) Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout élément de D.

(On remarquera que $f'(0) = 0$).

3.a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Étudier les branches infinies de (c).

4.a) Démontrer que la courbe (c) coupe une seule fois l'axe des abscisses en un point d'abscisse α tel que $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

b) Construis la courbe (c).

5) Exprime uniquement en fonction de α et de $e^{-\alpha}$ l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (c), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$. (α est une abscisse du point d'intersection de la courbe (c) et de l'axe des abscisses).

6) On considère l'application g définie de $\left[0; \frac{1}{2}\right[$ vers $[1; +\infty[$ par $g(x) = f(x)$.

Démontrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} .

On désigne par (c') la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(0 ; \vec{i} ; \vec{j})$.

7.a) Justifier que (c') admet une demi-tangente verticale en son point d'abscisse 1.

b) Préciser les branches infinies de (c').

c) Construire (c').

Extrait du BAC Bénin Série D 2003

Activité 9

Une chaîne suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[-1; 1]$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2a} (e^{ax} + e^{-ax})$$

où a est un paramètre réel strictement positif. On désigne par (C) la courbe représentative de la chaîne dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 6 cm.

On montre en sciences Physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel a soit une solution strictement positive de l'équation

$$(\mathcal{E}) : (x - 1)e^{2x} - 1 - x = 0.$$

Partie A

On définit sur $[0; +\infty[$ la fonction f par :

$$f(x) = (x - 1)e^{2x} - 1 - x$$

1.a) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f .

b) Vérifier que $f'(0) = 2$ et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty.$$

2.) Vérifier que la dérivée seconde f'' de f est définie par :

$$f''(x) = 4xe^{2x} \text{ pour tout réel } x \geq 0.$$

3.) Montrer que, sur l'intervalle $[0; +\infty[$ la fonction f' s'annule pour une unique valeur notée x_0 . A l'aide de l'algorithme par dichotomie, donner un encadrement au centième de x_0 . On pourra calculer $f'(1)$.

4.a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f .
Montrer que $f(x)$ est négatif pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; x_0]$

b) Calculer $f(2)$.

En déduire que sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction f s'annule pour une unique valeur.

Si on note a cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de a arrondie au centième.

Partie B

5.) Réécrire la fonction g avec la valeur de a trouvée en 4.b) puis dresser le tableau de variations de g .

6.) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ de la chaîne.

7.) On définit la fonction h symétrique de g par rapport à la droite $(\mathcal{H})$ d'équation $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

On désigne par $(\mathcal{E})$ la courbe représentative de la fonction h .

a) Comment obtenir la courbe $(\mathcal{E})$ à partir de la courbe $(\mathcal{C})$?

b) Tracer la courbe $(\mathcal{E})$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

Activité 10

Soit la fonction numérique g de variable réelle x définie par : $g_m(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{|x^2-1|} e^{-\frac{m}{x}}$ où m est un nombre réel non nul. On désigne par (c_m) sa courbe représentative.

Partie A

Soit la fonction u définie par : $u(x) = -3x^3 + 2mx^2 - x - 2m$ où m est un nombre réel non nul.

1.a) Calculer la dérivée première u' de u pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Étudie suivant les valeurs de m le signe de u' . (on distinguera trois cas : $\Delta_m < 0$; $\Delta_m = 0$ et $\Delta_m > 0$ où Δ_m est le discriminant de l'équation $u'(x) = 0$).

2) Étudie les variations de u et déduis-en suivant les valeurs de m le signe de u .

Partie B

3) Détermine le domaine de définition D de g_m et calcule les limites de g_m aux bornes de D .

4) Étudie suivant les valeurs de m les variations de g_m .

5) Soit $m = \frac{9}{4}$.

Dresse le tableau de variation de $g_{\frac{9}{4}}$.

6) Étudie les branches infinies de $(c_{\frac{9}{4}})$.

7) Trace la courbe $(c_{\frac{9}{4}})$.

Activité 11

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique 4 cm.

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.

1.) Etudier le sens de variation de g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$.

2.a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0 ; +\infty[$.

On note α cette solution.

b) Prouver que $1,14 < \alpha < 1,15$.

3.) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

1.a) Montrer que, pour tout x appartenant à $[0 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}.$$

b.) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.

2.a) Montrer que pour tout réel positif x ,

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^x}.$$

b) En déduire la limite de f en $+\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3.a) Etablir que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$.

b.) En utilisant l'encadrement établi à la question A.2, donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2} .

4.) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.

5.a) Etablir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a :

$$f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$$

avec $u(x) = e^x - xe^x - 1$.

b) Etudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. En déduire le signe de $u(x)$.

c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (T) .

6.) Tracer $(\mathcal{C})$ et (T) .

Partie C

1.) Déterminer une primitive F de f sur $[0 ; +\infty[$; on pourra utiliser l'expression de $f(x)$ établie dans la question B.2.

2.) On note $\mathfrak{D}$ le domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, la tangente (T) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Calculer, en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathfrak{D}$.

Donner une valeur décimale au mm^2 près de l'aire $\mathcal{A}$.

3.) Pour tout entier naturel n , on pose :

$$v_n = \int_n^{n+1} f(x) dx.$$

a.) Calculer v_0 , v_1 et v_2 .

On donnera des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près de v_0 , v_1 et v_2 .

b) Donner une interprétation géométrique de v_n .

c) Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n).$$

En déduire la monotonie de la suite (v_n) à partir de $n = 1$.

d) Déterminer la limite de la suite (v_n) .

Activité 12

Dans cette activité, n est un entier naturel non nul et on considère la famille de fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{(x+1)^{2n}}{1-e^{x+1}}, x \neq -1 \\ f_n(-1) = 0 \end{cases}$$

Pour les représentations graphiques, le plan est muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 2cm, et on note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n .

Partie A

Pour tout entier naturel n différent de zéro, on considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = (-2n + x + 1)e^{x+1} + 2n.$$

1. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$.

b) Donner le sens de variation de g_n puis dresser son tableau de variation.

2.a) Calculer $g_n(-1)$ et en déduire que : $2n - e^{2n-1} < 0$ pour tout n différent de zéro.

b) Démontrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n appartenant à l'intervalle $]2n - 2; +\infty[$.

c) Démontrer que α_n appartient à l'intervalle $]2n - 2; 2n - 1[$ puis en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

3.a) Déterminer le signe de g_n suivant les valeurs de x .

b) Déterminer les coordonnées du point M_n où la courbe représentative de la fonction g_n admet un extremum et en déduire que le point M_n appartient à une courbe dont on donnera une équation.

Partie B

1.a) Etudier la continuité de f_n en -1 .

b) Etudier la dérivabilité de f_n en -1 . (On distinguera deux cas : $n = 1$ et $n > 1$).

2.a) Calculer les limites de f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Calculer la dérivée de f_n et vérifier que pour tout réel x différent de -1 , on a :

$$f'_n(x) = \left[\frac{(x+1)^{n-1}}{1-e^{x+1}} \right]^2 \times (x+1)g_n(x).$$

c) Donner le sens de variations de f_n puis dresser son tableau de variation pour $n > 1$.

3.a) Démontrer que les courbes (C_2) et (C_3) ont trois points communs A, B et C que l'on déterminera.

b) Etudier les positions relatives des courbes (C_2) et (C_3) puis les construire sur un même graphique.

Partie C

p est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 1.

Soit h_p la fonction définie sur l'intervalle $I_p = [2p - 2; 2p - 1]$ par :

$$h_p(x) = 2p - 1 - \frac{2p}{e^{x+1}}.$$

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2p - 2 \\ u_{n+1} = h_p(u_n) \end{cases} \text{ pour tout entier } n \text{ et on}$$

pose pour tout entier naturel n non nul :

$$v_n = \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n}} f_n(x) dx.$$

1.) Démontrer que pour tout x de I_p , les équations $g_p(x) = 0$ et $h_p(x) = x$ sont équivalentes.

2.a) En utilisant la partie A, 2.a), montrer que pour tout $x \in I_p$, on a :

$$h_p(x) \in I_p \text{ et } |h'_p(x)| \leq \frac{2p}{e^{2p-1}} < 1.$$

3.) On pose : $k_p = \frac{2p}{e^{2p-1}}$.

a) Démontrer que pour tout $n, u_n \in I_p$.

b) Démontrer que pour tout n , on a :

$$|u_{n+1} - \alpha_p| \leq k_p |u_n - \alpha_p|.$$

puis en déduire que $|u_n - \alpha_p| \leq (k_p)^n$ et que la suite (u_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

4.a) Justifier l'existence de (v_n) .

b) Montrer que pour tout $n \geq 1, v_n \leq 0$.

c) Montrer que (v_n) est croissante ; que peut-on en déduire ?

5.a) En utilisant les variations de f_n sur l'intervalle $[-1; 0]$, montrer que :

$$\frac{1}{1-e} \leq f_n(x) \leq 0.$$

b) En déduire que $\frac{1}{1-e} \times \frac{1}{n} \leq v_n \leq 0$.

Séquence 9 : Fonctions exponentielles-Fonctions puissances

I. Résolution d'équation comportant les fonctions exponentielles-Fonctions puissances.

Activité 1

1) Résous les équations suivantes :

a) $5^{2x-1} = 3$; b) $9^x + 3^x - 12 = 0$.

c) $2^{2x+1} + 2^x = 105$; d) $4^x + 3^x = 0$.

2) Résous les inéquations suivantes :

a) $5^{2x-1} \leq 3$; b) $9^x + 3^x - 12 \geq 0$.

c) $7^{x-1} > 1$; d) $2^x + 3^x - 1 < 0$

3) Etablis que pour tout réel strictement positif, on a :

a) $e^{\ln \sqrt{x^2+1}} = x e^{\ln \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

b) $\ln[(x^2 + 2)^x] = 2x \ln x + x^{\frac{1}{2}} \ln(1 + \frac{2}{x^2})^{\sqrt{x}}$

II. Calcul de limites des fonctions exponentielles-Fonctions puissances.

Activité 2

Dans chacun des cas suivants détermine le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f et calcule les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

1) $f(x) = e^{x^2-3x+2}$; 2) $f(x) = 2^{\frac{x-1}{x+1}}$

3) $f(x) = e^{x^2 \ln(\frac{x-1}{x+2})}$

4) $f(x) = \exp_2\left(\frac{x+1}{x}\right) - x + 1$

5) $f(x) = e^{x \ln|1+\frac{1}{x}|}$; 6) $f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

7) $f(x) = e^{x \ln(1+\frac{1}{x^2})}$; 8) $f(x) = |x^2 - 1|^{x^3}$

9) $f(x) = e^{(1-x)^2 \ln(\frac{x+1}{1-x})-x}$

10) $f(x) = e^{(x-e)^2 \ln(x+\sqrt{x^2-1})}$

III. Etude des fonctions exponentielles-Fonctions puissances.

Activité 3

Soit la fonction numérique g de variable réelle x définie par :

$$g(x) = e^{(x-1)^2 \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|}.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Partie A

Soit u la fonction définie par :

$$u(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{1}{x+1}.$$

1.a) Déterminer le domaine de définition D_u de u .

b) Etudier le sens de variation de u et dresser son tableau de variation.

2. Etablir le signe de u , $\forall x \in D_u$.

Partie B

3.) Déterminer le domaine de définition D de g et calcule les limites de g aux bornes de D .

4. a) Prouve que

$$g'(x) = 2(x-1)u(x)g(x), \forall x \in D.$$

b) Acheter l'étude de variation de g .

5.) Etudier les branches infinies de (C) .

6.) Construis la courbe (C) . (On soulignera les demi-tangentes éventuelles de (C) en ses points d'arrêt).

Activité 4

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2^x - x}{\ln x} & \text{si } x \in]1; +\infty[\\ f(1) = 0 \end{cases}.$$

On désigne par (C) sa courbe représentative.

Partie A

Soit la fonction u définie sur $D_u = [1; +\infty[$ par : $u(x) = x \ln x (2^x \ln 2 - 1) - 2^x + x$.

1.a) calculer les limites de u aux bornes de D_u

b) Montrer que u est continue et dérivable sur D_u .

c) Prouver que :

$$u'(x) = \ln x (\ln 2 \cdot 2^x + x 2^x \ln^2 2 - 1).$$

d) Acheter l'étude des variations de u .

2.) Etablir le signe de $u \forall x \in D_u$.

Partie B

3.) Déterminer le domaine d'existence D de f puis calculer les limites de f aux bornes de D .

4.) Etudier la dérivabilité de f en 1 et donne une interprétation géométrique du résultat obtenu. Déduis-en le domaine de dérivabilité E de f .

5.) Calculer $f'(x) \forall x \in E$ puis étudie le signe de f' pour tout $x \in D$.

6.) Dresser le tableau de variation de f .

7.) Etudier les branches infinies de f puis construis (C) .

8.) Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = -f(x) \text{ et } h \text{ la fonction : } x \mapsto |f(x)|.$$

Dis la position des courbes représentatives de (C_g) et (C_h) de g et h par rapport à (C) puis construis (C_g) et (C_h) sans étudier g et h .

Activité 5

Soit la fonction numérique h de variable réelle définie par :

$$\begin{cases} h(x) = \left| 1 - \frac{2}{x} \right|^{\sqrt{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ h(x) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Partie A

Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = (x-2) \ln \left| 1 - \frac{2}{x} \right| + 4.$$

1.a) Détermine le domaine de définition D_g de g et justifie qu'elle est continue et dérivable sur D_g .

b) Calcule $g'(x)$ et $g''(x) \forall x \in D_g$.

2.a) Etudie le sens de variation de g' .

b) Déduis-en le signe de g' .

3.a) Etudie les variations de g .

b) Etablis alors le signe de g .

Partie B

4.a) Prouve que h est définie sur $D =]2; +\infty[$.

b) Calcule les limites de h aux bornes de D .

5.a) Etudie la dérivabilité de h en 0 et donne une interprétation géométrique des résultats obtenus.

b) Dédus-en le domaine de dérivabilité E de h .

6.a) Calcule $h'(x) \forall x \in E$ (on exprimera h' en fonction de g).

b) Etudie le signe de $h'(x) \forall x \in D$.

7) Etablis le tableau de variation de h puis construis (c).

Activité 6

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \exp_2(x^2 - 3x + 2), \text{ si } x \in [0; 2] \\ f(x) = x - 1 - \frac{1}{\ln(x-2)} \text{ si } x \in]2; +\infty[\end{cases}$$

On désigne par (c) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, (on prendra pour unité 2cm).

1) Démontrer que l'ensemble de définition de f est $D = [0; 3[\cup]3; +\infty[$.

2.a) Etudier la continuité de f en $x = 2$.

b) Etudier la dérivabilité de f en $x = 2$.

c) Préciser les demi-tangentes éventuelles à la courbe (c) au point d'abscisse 2.

3.a) Préciser l'ensemble de dérivabilité de f et détermine la fonction dérivée f' de f .

b) Etudier le sens de variation de f .

4.a) Calculer les limites de f aux bornes de D .

b) Dresser le tableau de variation de f .

5.a) Démontrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (c).

b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et prouver que α appartient à l'intervalle $\left] \frac{17}{5}; \frac{7}{2} \right]$.

c) Construire la courbe (c) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

6) On considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_4^x \frac{dt}{\ln(t-2)} .$$

a) Justifie que F est définie et dérivable sur $[4; +\infty[$.

b) Quel est le sens de variation de F sur $[4; +\infty[$?

c) Par la méthode des rectangles, donne un encadrement de $F(5)$ par deux nombres décimaux d'ordre 3. (on subdivisera l'intervalle $[4; 5]$ en cinq intervalles de même longueur).

d) En déduire un encadrement de l'aire en centimètres carrés de la partie du plan délimitée par la courbe (c) et les droites d'équations $y = x - 1$, $x = 4$ et $x = 5$.

7) Soit l'application $g : \left[\frac{3}{2}; 2 \right] \rightarrow \left[2^{-\frac{1}{4}}; 1 \right]$

$$x \mapsto g(x) = f(x).$$

a) Démontrer que g admet une application réciproque g^{-1} .

b) Déterminer l'intervalle K sur lequel g^{-1} est dérivable.

8) On désigne par (Γ) la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

a) Démontrer que le point A(1 ;2) appartient à (Γ) et écrire un système qui définit la demi-tangente à la courbe (Γ) au point A.

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à

$$\left[2^{-\frac{1}{4}}; 1\right].$$

c) Construire (Γ) dans le même repère que (c).

(Extrait du BAC Bénin Série D 2004)

Séquence 10 : Calcul Intégral

I. Calcul d'intégrale

Activité 1

1) Calcule les intégrales suivantes :

a) $A = \int_0^1 (x^3 + 2x - 1) dx$

b) $B = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{|x|}}\right) dx$

c) $C = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 2x + \cos 3x + x^2) dx$

d) $D = \int_0^2 \sqrt{x+1} dx$

e) $E = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$

f) $F = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

g) $G = \int_0^1 \frac{-3x}{(x^2+1)^2} dx$

h) $H = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$

i) $I = \int_1^2 (3 + \ln x - e^{2x+1}) dx$

k) $K = \int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1} dx$

2.a) Démonstre qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall t \in]-1; 1[$, $\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$.

b) Calculer $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt$ pour $] -1; 1[$.

3) Calcule à l'aide d'un changement de variable l'intégrale :

$$F = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \quad (\text{on pourra poser } x = \tan \theta).$$

Activité 2

A l'aide d'intégrations par partie, calcule les intégrales suivantes :

a) $A = \int_0^{\pi} x \cos x dx$;

b) $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$; c) $C = \int_1^e x^2 \ln x dx$

b) $D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin 2t dt$

c) $E = \int_{-1}^0 (x+1)^2 e^{-x} dx$

f) $F = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx$; g) $G = \int_0^1 x \sqrt{x+1} dx$

h) $H = \int_0^2 \frac{3 \ln x}{e^x} dx$; i) $I = \int_2^5 \frac{1 - \ln x}{1 - e^x} dx$

k) $K = \int_2^3 \ln(\sin x) dx$; l) $L = \int_1^5 x e^{x^3} dx$

Activité 3

On se propose de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} ; J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx ; K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$$

1) Soit la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.

a) Calcule la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$ puis calcule la dérivée première f' de f .

b) Calcule la valeur de I .

2.a) Sans calculer explicitement J et K , vérifiez que $J+2I=K$.

b) A l'aide d'une intégration par partie portant sur l'intégrale K , montrez que : $K = \sqrt{3} - J$.

c) En déduire les valeurs de J et K.

Activité 4

Comme convenu dans le rappel du cours, voici l'exemple appliqué :

Exemple appliqué

1. °) Calculer $\int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx$.

2. °) Déterminer la primitive $\int \sqrt{x^2 + 1} dx$.

Les questions de cette activité même sont les suivantes :

Partie A

Calculer les intégrales suivantes en se servant des notions de décomposition en fractions partielles.

1. °) $A = \int_0^2 \frac{3t^3}{t+3} dt$; 2. °) $B = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{5}{t^2-1} dt$

2. °) $C(x) = \int_0^x \left(\frac{t^2}{3t^2+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(-2x+1) \right) dt$

4. °) $D(x) = \int_x^{\sqrt{x}} \frac{1}{(t+1)(t^2+1)} dt$

5. °) $E(x) = \int_x^{2x} \left(\frac{5}{t(t-3)^2} + \ln(|-2t+3|) \right) dt$

Partie B

A l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

1. °) $\int_0^1 x^4 \sqrt{x^2+1} dx$

2. °) $\int_2^4 \frac{x+5}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx$

3. °) $\int_0^{\pi} \sqrt{16-x^2} dx$

4. °) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}} dx$

5. °) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}} dx$

6. °) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

7. °) $\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{1}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} dx$

8. °) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx$

10. °) $\int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}} dx$

11. °) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\cos x + \sin^2 x} dx$

Partie C

A l'aide d'une intégration par parties, déterminer les primitives suivantes :

1. °) $\int (\ln(\sin x) + \frac{1}{\sqrt{\ln 3}} \tan x) dx$

2. °) $\int \ln(2x+3) dx$

3. °) $\int (\ln(x^2+1) + \frac{5}{\sin(x)}) dx$

4. °) $\int \left((x+1)^2 e^{-x} - x \sin x + \frac{2}{\cos(x)} \right) dx$

5. °) $\int \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} + x\sqrt{x+1} \right) dx$

II. Calcul d'aire et de Volume-Valeur approchée d'une intégrale.

Activité 5

1.a) Calcule la dérivée de la fonction :

$$x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 2}).$$

b) Calcule $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} dx$.

2) Donner une valeur approchée de l'intégrale I par :

a) la méthode des rectangles.

b) la méthode des trapèzes.

(nombre de subdivisions $n=4$).

c) Comparer les deux résultats.

3) Vérifier si les valeurs approchées trouvées sont voisines de la valeur de I trouvée en 1-b puis prononce toi sur la méthode efficace de calcul d'une intégrale.

Activité 6

1) Calculer en unité d'aire, l'aire du domaine du plan limité par la courbe (c) de la fonction : $x \mapsto (x-1)(2-e^{-x})$, la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

2) Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x} + 3x - 1$.

a) Déterminer la valeur moyenne de f sur $[1; 3]$.

b) Calcule l'aire $A(\alpha)$ en unité d'aire de la partie du plan délimitée par la courbe représentative (c) de f, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 1$; $x = \alpha$, ($\alpha \in \mathbb{R}^*_+$ et $\alpha > 1$).

c) Déduis-en $A(2)$.

d) Calcule $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$.

3) Soit la fonction $g : x \mapsto \sqrt{1 - e^{-2x}}$.

a) Calcule le volume $V(\alpha)$ de la partie du plan limitée par la courbe représentative (c_g) de g, l'axe des abscisses et les droites

d'équations $x = \ln 2$ et $x = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$. (l'unité de longueur est 3m).

b) Calcule $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} V(\alpha)$.

c) Donne une interprétation géométrique de

$$I_\alpha = \int_\alpha^{\ln 2} g(x) dx \text{ et } H_\alpha = \int_{\ln 2}^\alpha g(x) dx$$

($\alpha < \ln 2$)

d) Calcule u.a. I_α et donne sa limite lorsque α avoisine 0 par valeur supérieure. (u.a désigne l'unité d'aire).

III. Fonction définie par Intégrale.**Activité 7**

Comme convenu dans le rappel du cours, voici l'exemple appliqué :

Exemple appliqué

Calculer les limites suivantes :

$$1.) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}^{e^x} \sqrt{1+t} dt$$

$$2.) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}} \sin(3t+1) dt$$

$$3.) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}^{e^x} \sqrt{1+t} dt$$

$$4.) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}} \sin(3t+1) dt$$

Les questions de cette activité sont les suivantes.

Déterminer les limites suivantes :

$$1.^{\circ}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k}; 2.^{\circ}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{n^2}{n^2 + k}$$

$$3.^{\circ}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{n}{\sqrt{n} + k^2}; 4.^{\circ}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\sqrt[4]{1+t^3}}{t} dt$$

$$\begin{aligned}
5.^{\circ}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{2x}^{x^2} t\sqrt{t+1} dt; & 6.^{\circ}) \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 \frac{1}{1+t^2} dt \\
7.^{\circ}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}} dt; & 8.^{\circ}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{3x} \frac{t}{\tan^2 t} dt \\
9.^{\circ}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\cos t}{6-5\sin t + \sin^2 t} dt \\
10.^{\circ}) \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^{\pi} \frac{t}{\cos^2 t} dt; & 11.^{\circ}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\tan x} \frac{t^3 + 2t}{t^2 + t + 1} dt \\
12.^{\circ}) \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{\frac{\ln|x|}{\sin x}}^{\frac{e^x}{\cos^2 t \sin^2 t}} dt \\
13.^{\circ}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{x^2 + \sqrt{x}}{\ln x}} \sqrt{1+t^2} dt; \\
14.^{\circ}) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{\frac{e^{t^2+1}}{\ln t}} dt
\end{aligned}$$

Activité 8

Soit G la fonction définie par :

$$G(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

- 1) Détermine l'ensemble de définition de la fonction G.
- 2) Montre que G est impaire.
- 3) Etudier le sens de variation de G sur IR.
- 4) Montre que $\ln(x+1) \leq G(x), \forall x \in [0; +\infty[$.
- 5) Dresse le tableau de variation de G.
- 6) Prouve que $G(x) \leq 2(\sqrt{1+x} - 1)$ puis étudie les branches infinies de la courbe (c) de G puis construis (c). Construire la courbe (c') symétrique de (c) par rapport à l'axe des abscisses.

Activité 9

On se propose d'étudier la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{t}{t - \ln t} dt$$

Partie A

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et (c) sa courbe représentative.

On rappelle que $\forall x \in]0; +\infty[, \ln x \leq x - 1$.

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.
- 2) Etudier f et tracer (c). (On construira la demi-tangente en O et la tangente au point d'abscisse 1).

Partie B

1.a) Justifier que F est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.

b) Etudier le sens de variation de F.

2) Déterminer le signe de F.

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

3.a) Démontrer que $\forall t \in [0; 1], f(t) \leq t$.

b) En déduire que :

- $\forall t \in [0; 1], \frac{x^2-1}{2} \leq F(x) \leq 0$.
- $-\frac{1}{2} \leq F(0) \leq 0$.

(On ne demande pas la valeur exacte de F(0).)

4.a) Démontrer que $\forall t \in [1; +\infty[, 1 \leq f(t)$.

b) En déduire que : $\forall x \in [1; +\infty[$,

$x - 1 \leq F(t)$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

5.a) Démontrer que : $\forall t \in [1; +\infty[$,

$$1 + \frac{\ln t}{t} \leq F(t) \leq 1 + \ln t.$$

b) En déduire que : $\forall x \in [1; +\infty[, x + \frac{\ln(x)^2}{2} - 1 \leq F(x) \leq x \ln x$.

c) Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$ et $F(5)$.

(On prendra la moyenne arithmétique des valeurs qui encadrent chacun de ces nombres).

Activité 10

On se propose d'étudier la fonction f définie pour tout nombre réel positif x par :

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

1) On pose pour tout nombre réel positif x , $I = \int_0^x \frac{e^t}{\sqrt{1+t^2}} dt$.

a) Justifier que I appartient à $\mathbb{R}$.

b) Etablir que $x \in \mathbb{R}_+, I \in \mathbb{R}_+$.

c) Démontrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

a) Démontrer que $\forall t \in [0; x]$, on a :

$$\frac{e^x}{\sqrt{1+x^2}} \geq \frac{e^t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

b) En déduire que $\frac{e^x - 1}{\sqrt{1+x^2}} \leq F(x)$.

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

3.) Etudier le sens de variation de F puis dresse son tableau de variation.

4) On désigne par (c) la courbe représentative de F .

a) Etudier la branche infinie de (c) .

b) Ecrire les relations définissant la demi-tangente à la courbe (c) en son point d'abscisse 0.

5) On se propose d'étudier la position de la courbe (c) , par rapport à la première bissectrice dans le demi-plan défini par : $x \geq 0$.

Soit les fonctions u et v définies de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^{2x} - x$;

$$v(x) = e^{2x} - x^2 - 1.$$

a) Etudier les variations de u et justifier que $\forall x \in \mathbb{R}_+, u(x) > 0$.

b) Etudier les variations de v .

c) Calculer $v(0)$ et préciser le signe de $v(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}_+$.

6) En déduire :

a) le signe de $e^t - \sqrt{t^2 + 1}$

b) la position de (c) par rapport à la première bissectrice dans le demi-plan défini par : $x \geq 0$. (On pourra écrire $x = \int_0^x dt$).

7.a) Tracer la courbe (c) et justifier que F est une application bijective.

b) Tracer la courbe (c') de sa bijection réciproque dans le même repère.

Activité 11

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, unité 2cm .

On veut étudier la fonction G définie par :

$$G(x) = \int_0^x \frac{\ln(t^2+1)}{t} dt.$$

Partie A

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et (c) la courbe représentative de f .

1) Etudier les variations de f . (on étudiera la dérivabilité de f en 0).

2) Montrer que pour tout réel $x > -1$, on a :

$$\ln(1+x) \leq x.$$

En déduire la position relative de (c) et sa tangente en 0. Tracer la courbe (c).

Partie B

3) Soit r un réel strictement positif fixé.

Montrer que $G(r)$ et $G(-r)$ sont les aires de domaines isométriques du plan.

En déduire la parité de G puis déterminer les variations de G sur $\mathbb{R}^*$.

4.a) Montrer que $0 \leq G(1) \leq \frac{1}{2}$ en utilisant la position de (c) par rapport à sa tangente en 0.

b) Montrer que pour tout réel $t \geq 1$, on a :

$$\frac{\ln(t^2)}{t} \leq \frac{\ln(t^2 + 1)}{t} \leq \frac{\ln(2t^2)}{t}.$$

c) Soit x un réel, $x \geq 1$.

Calculer $\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$.

En déduire les limites de $G(x)$ et de $\frac{G(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5) Donner l'allure de la courbe représentative (C_G) de G en prenant 0,4 pour la valeur approchée de $G(1)$.

Activité 12

On désire étudier et déterminer la primitive G sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 de la fonction :

$$t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}.$$

Partie A

Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \int_0^x \frac{dt}{2\sqrt{1+t^2}}.$$

1.a) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

b) On rappelle que si f est une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$, alors pour tout réel α de $\mathbb{R}$, on a :

$$\int_{-a}^0 f(t) dt = \int_0^a f(t) dt.$$

Démontrer que G est une fonction impaire.

c) Déterminer le sens de variation de G .

2.a) Démontrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$, on a :

$$\frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

b) Soit x un réel de $[0; +\infty[$. Déduire par intégration sur $[0; x]$ de l'inégalité précédente que l'on a : $\frac{1}{2} \ln(1+x) \leq G(x)$.

c) Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$ puis en déduire la limite de $G(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

d) Dresser le tableau des variations de G .

e) Démontrer que G est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J de $\mathbb{R}$ à préciser.

3.) Soit F la bijection réciproque de G .

a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, on a :

$$F'(x) = 2\sqrt{1 + (F(x))^2}.$$

b) En déduire que F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que F est solution de l'équation différentielle (E) définie par :

$$y'' - 4y = 0.$$

c) Déterminer $G(0)$, $F(0)$ et $F'(0)$.

4.a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).

b) Déterminer l'unique solution φ de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 2$.

c) Déterminer alors $F(x)$.

5.) On admet que pour tout réel y , $(y + \sqrt{y^2 + 1} > 0)$.

a) Démontrer que pour tout réel y , l'équation $F(x) = y$ admet pour unique solution dans $\mathbb{R}$:

$$x = \frac{1}{2} \ln \left(y + \sqrt{1 + y^2} \right).$$

b) n déduire alors $G(x)$.

Partie B

1.) On pose pour tout $t \geq 1$ et pour tout $x \geq 1$:

$$h(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \text{ et } H(x) = \int_1^x h(t) dt$$

a) Que représente la fonction H pour h ?

b) Vérifier que : $h(t) = \frac{1}{t(t+\sqrt{1+t^2})(\sqrt{1+t^2})}$.

c) On admet que pour tout $t \geq 1$, $\sqrt{1+t^2} \geq t$. Démontrer que pour tout $t \geq 1$, on a :

$$0 \leq h(t) \leq \frac{1}{2t^3}.$$

d) Déterminer alors le sens de variation de H puis démontrer que pour tout $x \geq 1$, on a :

$$0 \leq H(x) \leq \frac{1}{4}.$$

En déduire que $H(x)$ admet une limite l finie l lorsque x tends vers $+\infty$. (On ne demande pas de calculer cette limite).

2.a) En utilisant la définition respective de $G(x)$ et $\ln x$ par une intégrale, démontrer que pour tout $x \geq 1$, on a :

$$G(x) - \frac{1}{2} \ln x = \frac{1}{2} [\ln(1 + \sqrt{2}) - H(x)].$$

b) En déduire que $G(x) - \frac{1}{2} \ln x$ admet une limite finie l' quand x tend vers $+\infty$.

c) En utilisant l'expression algébrique de $G(x)$, vérifier que : $l' = \frac{1}{2} \ln 2$.

d) Déterminer alors la limite de la fonction H en $+\infty$.

Séquence 11 : Equations différentielles

I Equations différentielles linéaires à coefficients constants sans second membre.

Activité 1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1°) $y' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(2) = -6$.

2°) $y' - \tan x - \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ avec $y(\frac{\pi}{3}) = \ln 2$.

3°) $y'' = 2x + 1$ avec $y(0) = 3$ et $y'(0) = 1$.

4°) $y'' - 4y' + 3y = 0$.

5°) $6y'' - 12y' + 10y = 0$.

6°) $y'' - 2y' + 1 = 0$.

II. Equations différentielles linéaires à coefficients constants avec second membre.

Activité 2

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 3y' - y = 2x + 5.$$

1) Résous (E') : $y'' + 3y' - y = 0$.

2) Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie par $g(x) = ax + b$ soit solution de (E).

3) Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est solution de (E').

4) Résous alors (E).

5) Déterminer la solution h de (E) telle que $h(0) = 1$ et $h'(0) = -2$.

Activité 3

Soit l'équation (E) : $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}(-x + \frac{1}{2})$
et vérifiant $\varphi(0) = -1$ et $\varphi'(0) = -\frac{3}{2}$.

1) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :
(E') : $y'' + 2y' + 2y = 0$.

2) Déterminer les nombres réels a et b pour que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $p(x) = e^{-x}(ax + b)$ soit une solution de l'équation différentielle (E).

3.a) Démontrer que la fonction q est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $p - q$ est solution de l'équation (E').

b) Déterminer alors la solution générale de l'équation différentielle (E).

4) Déterminer alors la fonction φ .

Activité 4

Soit la fonction $g_m : x \rightarrow (1 + mx)e^{(m-3)x}$,
 $m \in \mathbb{R}$.

1)a) Déterminer m tel que : $g'_m(0) = -1$.

b) Vérifier que $m^3 + 4m + 1 \equiv m^2 - 1 [6]$.

2) On suppose maintenant que $m = \int_0^1 t dt + \ln \sqrt{e}$ et on pose $g_m(x) = h(x)$.

a) Réécris $g_m(x) = h(x)$.

b) Déterminer les nombres réels a et b pour que h soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) :

$$y'' + ay' + by = 0.$$

3) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la dérivée d'ordre n de h est solution de (E).

4) Déterminer parmi les primitives de h celle qui est solution de (E).

Séquence 12 : Probabilités

I. Analyse combinatoire.

1.) Notions sur les ensembles.

Activité 1

Dans la classe de Sonia, élève en classe de Terminale C, on relève les données suivantes :

- Il y a 16 filles parmi lesquelles 12 apprennent « Mina » et 6 apprennent le « Fon ».
- 26 élèves suivent les cours de « Mina », 17 suivent les cours de « Fon » et 7 suivent les deux cours.
- 2 garçons ne suivent aucun des deux cours.

1) Déterminer le nombre de filles de cette classe qui suivent les 2 cours de langues.

2) Déterminer le nombre de filles qui ne suivent aucun cours de ces deux langues.

Activité 2

Soit E l'ensemble tel que :

$$E = \{4 ; 8 ; 9 ; 10 ; 15 ; 16 ; 21\}.$$

On désigne par M_2 et M_3 les ensembles d'éléments de E qui sont respectivement multiples de 2 et de 3.

1).Démontrer que M_2 et M_3 forment une partition de E.

2)En est-il de même si on remplace E par F tel que :

$$F=\{4 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 15 ; 16 ; 18 ; 21\} ?$$

3)Soit G l'ensemble des entiers naturels inférieurs à 50. On désigne par A, B et C les ensembles d'éléments de G qui sont respectivement multiples de 2, de 3 et de 6.

a)Les ensembles A, B et C forment-ils une partition de G ?

b)Vérifier que :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B - \text{Card}C .$$

2&3. Principe de comptage-P-uplets.

Activité 3

Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules noires et une boule verte toutes indiscernables au toucher. On pige successivement avec remise et au hasard trois boules de cette urne.

1) Quel est le nombre de tirages possibles ?

2) Dénombrer le nombre de tirages contenant :

a) deux boules rouges.

b) au moins une boule rouge.

c) au plus deux boules vertes.

d) exactement une boule noire.

e) une boule rouge, une boule noire et une boule verte.

f) une boule rouge, une boule noire et une boule verte dans cet ordre.

g) deux couleurs distinctes.

h) des boules unicolores ou bicolores.

3) Dénombrer le nombre de tirages dépourvus de boules vertes et contenant au plus 2 boules rouges et au moins une boule noire.

Activité 4

(Les questions sont indépendantes) .

1.) Le comité de planification du collège de Sonia doit être formé de 7 élèves pris un à un dans chacune des classes de la 6^{ième} en Terminale. En 6^{ième}, on a 2 candidats, 3 en 5^{ème}, 3 en 4^{ième}, 4 en 3^{ième}, 5 en seconde, 6 en 1^{ère} et 7 en Terminale.

Quel est le nombre N de résultats possibles ?

2) Soit E l'ensemble tel que : $E=\{1; 2; 3; 4; 5\}$. Combien de nombres à trois chiffres peut-on écrire avec les éléments de E ?

3) L' école de Sonia doit commander trois motos aux trois premiers de l'établissement. Pour chacune des motos, on a le choix entre 6 couleurs. De combien de façons peut-on réaliser cette commande ?

4) Habyarimana veut ranger 15 dictionnaires dans une bibliothèque à trois étagères. De combien de façon peut-il effectuer ce rangement ?

5) Déterminer le nombre de façon de ranger 5 paires de chaussettes différentes dans trois tiroirs, chaque tiroir recevant entre 0 et 5 paires de chaussettes.

6) On veut former un code à 3 éléments à partir des ensembles E et F définis par :

$E = \{A ; B ; C\}$ et $F = \{1 ; 2\}$. On doit choisir 2 lettres dans l'ensemble A et 1 chiffre dans l'ensemble B. Quel est le nombre de résultats possibles ?

4. Arrangements.

Activité 5

On considère l'urne de l'activité 3 de p-uplets.

On tire successivement et sans remise 3 boules de cette urne.

Répondez aux mêmes questions que précédemment en supprimant justification à l'appui les questions qui n'ont pas raison d'être posées.

Activité 6

Le professeur Cocouvi verrouille le clavier de son ordinateur avec un code comportant 5 éléments dont 3 chiffres distincts du système décimal et deux lettres distinctes de l'alphabet français. Les chiffres et les lettres ont été sélectionnés un à un. Il lui arrive un jour d'oublier ce code

Partie A

1.) a) Décombrer le nombre codes qu'on peut avoir.

b) Quel est le nombre de codes comportant le chiffre 7 et la lettre B ?

c) Quel est le nombre de code comportant le chiffre 5 et les lettres M et C ?

d) Quel est le nombre de codes à chiffres distincts comportant le chiffre 5 et les lettres M et C ?

e) Quel est le nombre de code comportant les chiffres 0, 2, 9 et les lettres K et W ?

f) Quel est le nombre de code comportant les chiffres 0, 2, 9 et les lettres K et W dans cet ordre ?

Partie B

2.) Après un moment d'examen de conscience, Monsieur Cocouvi arrive à la conclusion que les trois premiers éléments du code sont des

entiers naturels premiers et représentent successivement les trois premiers termes d'une suite arithmétique de raison $r=2$ et que les deux derniers éléments sont les deux dernières lettres du système hexadécimal dans leur ordre de succession alphabétique.

Retrouver le code oublié.

Activité 7

Demain, débutent les examens du Baccalauréat. Après ses révisions de la veille, c'est le moment pour Barbara de ranger les 10 livres dans lesquels elle a étudié sur un rayon de sa bibliothèque. Quatre d'entre eux sont des livres de Mathématiques, trois de chimie, deux de Physique et un de Biologie.

On admet que les livres sont distincts les uns des autres.

Partie A

- 1) Combien de rangements possibles a-t-on ?
- 2) Combien de rangements peut-on avoir :
 - a.) si les livres des mathématiques doivent rester ensemble ?
 - b.) si ce sont les livres de mathématiques seulement qui doivent rester ensemble et donc les autres livres traitant les mêmes sujets ne restent pas regroupés ?
 - c.) si les livres traitant les mêmes sujets restent regroupés à l'exception des livres de Physique ?
- 3) Combien de rangements peut-on avoir si entre les trois livres de chimie, doit avoir le livre de biologie et si les deux livres de Physique ne doivent pas rester ensemble ?

Partie B

Suite à l'examen, 10 personnes dont 6 garçons et 4 filles ont pu décrocher leur BAC dans la classe de Barbara. Les lauréats doivent être

classés selon leur moyenne. On suppose exclu que deux étudiants obtiennent la même moyenne.

- 4) Combien de classements peut-on avoir ?
- 5) Si les garçons sont classés entre eux uniquement et les filles entre elles, combien de classements globaux peut-on avoir ?
- 6) Si Barbara fait partie des 10 et qu'elle est au milieu de deux garçons, combien de classements peut-on avoir ?
- 7) Et si Barbara est au milieu de deux personnes de sexes différents, combien de classements peut-on avoir ?

Partie C

5 prix doivent être décernés à des lauréats choisis parmi les 10. Combien de résultats on peut-on avoir si :

- 8) Le cumul des prix est admis.
- 9) Barbara a reçu deux prix.
- 10) Le cumul n'est pas possible.

Activité 8

Partie A

- 1) De combien de manières peut-on asseoir en rang 3 garçons et 3 filles ?
- 2) Même question si les garçons doivent rester ensemble et les filles aussi.
- 3) Même question si seuls les garçons doivent rester ensemble.
- 4) Même question si deux personnes du même sexe ne doivent jamais voisiner.

Partie B

Reprendre les questions de la partie A en supposant qu'on veut faire asseoir les trois garçons et les trois filles autour d'une table ronde dont les chaises ne sont pas numérotées.

Partie C

Reprendre les mêmes questions si les chaises sont numérotées.

Activité 9

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

La boîte de craie de Monsieur Cocou contient 8 bâtons de craies blanches, 5 de craies rouges, 4 de craies jaunes et 3 de craies vertes.

Monsieur Cocou choisit des craies, une à une de la boîte jusqu'à obtenir 6 bâtons de craies sans remettre la craie choisie.

1.°)

- a) Quel est le nombre de résultats possibles ?
- b) Quel est le nombre de résultats contenant toutes les couleurs de craies ?

2.°) Supposons que le tirage contient 2 craies blanches, 2 rouges, une jaune et une verte

- a) si Monsieur Cocou doit distribuer ces 6 craies à 6 élèves désignés pour aller au tableau, quel est le nombre de résultats possibles ?
- b) si Monsieur Cocou doit redéposer les 6 craies dans 4 boîtes telles qu'une boîte contient les 2 blanches, une autre, les 2 rouges, une autre, la seule jaune et une autre encore la verte, quel est le nombre de résultats possibles ?

3.°) Monsieur Cocou veut aligner les 6 craies de la question 2.

- a) Quel est le nombre de résultats possibles si les deux craies blanches doivent toujours rester ensemble ?
- b) Quel est le nombre de résultats possibles si en plus de la condition 3.a), la craie verte doit

toujours rester au milieu des deux craies rouges ?

Partie B

Cette semaine, c'est la période des journées culturelles dans l'établissement de Barbara. Les 8 personnes de la classe qui ont souscrit pour la fête doivent prendre leur déjeuner ensemble autour d'une table ronde dont les chaises sont numérotées de 1 à 8.

De combien de manières peut-on asseoir ces 8 personnes si :

- 1) Aucune restriction n'est mise.
- 2) Sonia et Barbara veulent être ensemble.
- 3) Les garçons ne doivent avoir que des voisines et inversement, en supposant qu'il y a 4 garçons et 4 filles.
- 4) Les filles qui sont au nombre de 5 doivent rester ensemble.
- 5) Les personnes forment 4 couples des amoureux et si chaque couple doit rester réuni.
- 6) Sonia doit rester accrochée à Cocou, Barbara à Tania et si Eliane ne veut pas rester avec Carmel.

5. Combinaisons.

Activité 10

On considère l'urne de l'activité 3 de p-uplets. On tire 03 boules de cette urne. Répondez aux mêmes questions que précédemment en supprimant justification à l'appui les questions qui n'ont pas raison d'être posées.

Activité 11

Un jeu de 32 cartes est constitué de 4 couleurs, Pique, Cœur, Carreau, et Trèfle contenant chacune l'AS, le Roi, la Dame, le

Valet, le 10, le 9, le 8 et 7. On tire simultanément 5 cartes de ce jeu.

1) Déterminer le nombre de tirages distincts dans les cas suivants :

- a) les 5 cartes sont quelconques.
- b) il y a exactement 2 AS parmi les 5 cartes.
- c) il y a au moins un As parmi les 5 cartes.
- d) les 5 cartes sont de même couleur.

2) Prouver que le nombre de tirages contenant un cœur, 2 Rois et au plus 3 carreaux ou exactement 2 Valets est $N=27986$.

Activité 12

On veut faire asseoir un comité de 4 responsables parmi les 50 élèves de la classe de Barbara.

- a) Quel est le nombre de résultats possibles ?
- b) Quel est le nombre de comité contenant exactement 2 filles sachant qu'il y a 30 filles dans cette classe.
- c) Quel est le nombre de comités contenant au moins une fille ?
- d) Quel est le nombre de comités contenant au plus 2 garçons ?

Activité 13

Le parking de l'école de Sonia contient 20 places de voitures numérotées de 1 à 10(rangée A) et de 11 à 20(rangée B).

- 1) De combien de manières peut-on garer 20 voitures dans ce parking ?
- 2) Déterminer le nombre de façon de garer 10 voitures dans chacun des cas suivants :
 - a) les 10 voitures occupent la même rangée.

- b) 6 voitures exactement occupent la rangée A.
- c) il y a au moins 1 une voiture dans la rangée A.

Activité 14

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Pour répondre à un sondage, on doit classer 5 mathématiciens pris dans une liste de 20. Parmi les 20 mathématiciens, il y a 12 hommes, 8 femmes et 6 étrangers dont 2 femmes.

- 1) Calculer le nombre de classements possibles.
- 2) Calculer le nombre de classements sachant que :
 - a) Deux femmes occupent les 2 premières places, suivies de 3 hommes.
 - b) On a choisi exactement 2 femmes.
 - c) Il y a au moins 2 femmes choisies.
- 3) Calculer le nombre de classements contenant au moins un étranger.
- 4) Calculer le nombre de classements contenant exactement un étranger et deux femmes.

Partie B

La boîte de craie de Monsieur Cocou contient 8 bâtons de craies blanches, 5 de craies rouges, 4 de craies jaunes et 3 de craies vertes.

Monsieur Cocou choisit au hasard, un échantillon de 6 bâtons de craies de la boîte.

1. Quel est le nombre de résultats possibles ?
2. Quel est le nombre de résultats contenant toutes les couleurs de craies ?
3. Si le tirage contient une craie verte et 2 craies blanches et que si Monsieur Cocou désire aligner les 6 craies de manière que

la craie verte reste toujours au milieu des deux craies blanches, quel est le nombre de résultats possibles ?

Activité 15

On veut choisir dans un club comportant 10 membres un président, un secrétaire et un trésorier ; le cumul de charge étant exclu. De combien de manières peut-on attribuer ces charges si :

- 1) Aucune restriction n'est imposée.
- 2) Barbara et Sonia refusent d'officier ensemble.
- 3) Bello et Jeanice officieront ensemble ou pas du tout.
- 4) Cocou doit avoir une charge.
- 5) Martin n'accepte que la charge de président.

Activité 16

Partie A

A la maternelle, un jeu classique est de se mettre en rond puis de tenir une grosse toile de plastique que l'on agite le plus fort que l'on peut. La classe de maternelle de Bello compte 12 enfants dont deux jumeaux.

- 1) Combien y a-t-il de façons possibles de classer ces élèves autour de la toile ?
- 2) Même question si les deux jumeaux doivent être toujours un à côté de l'autre.
- 3) Même question si Bello doit toujours rester au milieu des deux jumeaux.
- 4) Même question si les deux jumeaux doivent toujours rester ensemble et si les deux sœurs, Bello et Jeanice ne peuvent être une à côté de l'autre.

Partie B

Un matin après ce jeu, les 12 enfants se pointent chez la vendeuse de l'école pour acheter à manger. Cette dernière leur annonce

qu'il ne reste plus que 5 plats de repas : soit le riz, du Hamburger, du couscous, du spaghetti ou une poutine. Déchirés, les 12 enfants se résolvent que seulement 5 d'entre eux pourront manger.

- 5) Combien de combinaisons possibles d'enfants /repas a-t-on ?
- 6) Même question si 2 personnes parmi les 12 ne veulent pas du repas « Hamburger ».
- 7) Même question si Bello ne peut manger sans Jeanice.
- 8) Même question si Bello doit manger du couscous et Jeanice du Spaghetti.

II. Calcul de Probabilité.

Activité 17

Une maladie atteint 3% de la classe de Sonia. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

Chez les individus malades, 95% des tests sont positifs . Chez les individus non malades, 99% des tests sont négatifs. On choisit au hasard un élève de cette classe.

Quelle est la probabilité :

- 1)a)qu'il soit malade et qu'il ait un test positif ?
- b)qu'il soit malade et qu'il ait un test négatif ?
- 2) qu'il soit non malade et ait un test positif ou qu'il soit non malade et ait un test négatif.
- 3)qu'il ait un test positif puis qu'il ait un test négatif ?(on donnera le 2^{ème} résultat par deux méthodes différentes).
- 4) qu'il ne soit pas malade sachant que le test est positif.
- 5)qu'il soit malade sachant que le test est négatif.

Activité 18

Dans une population, 55% des familles (Groupe A) ont une moto, 80% ont une télévision et 15% des familles n'ont ni motos, ni voitures.

- 1) On choisit au hasard une famille de cette population. Déterminer la probabilité que :
 - a) Cette famille ait une moto et un téléviseur.
 - b) Cette famille ait un téléviseur sachant qu'elle a une voiture.
- 2) On suppose que 5% des familles du groupe A (Groupe B non compris) abandonnent leurs motos et 10% des 5% des familles du groupe B (groupe A non compris) abandonnent leurs téléviseurs et 10% des familles du groupe C achètent chacune un téléviseur et une moto.

Reprends le calcul des probabilités ci-dessus.

Activité 19

Dans le service de Fiokouagbo, un couturier, on a noté pendant le 1^{er} mois que :

- 25% des employées ont été absents au moins un jour.
- 12% des employés ont été absents au moins deux jours.
- 8% des employés ont été absents au moins trois jours.
- 6% des employés ont été absents au moins quatre jours.
- 5% des employés ont été absents au moins cinq jours.

On choisit au hasard un employé de cet atelier. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- a) « l'employé n'a jamais été absent ».
- b) « l'employé a été absent au moins un jour ».
- c) « l'employé a été absent exactement deux jours ».

d) « l'employé a été absent moins de quatre jours ».

Activité 20

Blagbotho dirige un atelier constitué de trois machines A, B, C utilisées pour la même production. Le taux de panne de chacune d'elles, ramené en journées entières d'indisponibilité est :

- 5 jours d'arrêt sur 200 jours ouvrables pour la machine A.
- 3 jours d'arrêt sur 200 jours ouvrables pour la machine B.
- 10 jours d'arrêt sur 200 jours ouvrables pour la machine C.

Pour un jour ouvrable donné, Blagbotho cherche un probabiliste qui puisse lui dire avec exactitude la chance que :

- a) « la machine A soit en état de marche ».
- b) « la machine A soit en panne ».
- c) « la machine B ou la machine A soient en panne ».
- d) « aucune machine ne soit en panne ».

Joue le rôle du probabiliste en calculant ces probabilités

e) L'atelier de Blagbotho peut-il bien fonctionner à ces taux journaliers de panne des machines ?

Activité 21

Dans le collège de Rafatou, divers jeux sont organisés lors des journées culturelles. Parmi ceux-ci, on a un jeu portant sur un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. A ce dé, on associe trois urnes U_1 , U_2 , U_3 portant chacune k boules indiscernables au toucher où k désigne un entier naturel supérieur ou égale à 3. U_1 renferme 3 boules

vertes, U_2 , 2 boules vertes et U_3 une boule verte et les autres boules de l'urne sont rouges.

Le joueur, doit lancer le dé et s'il obtient le numero 1, il prend une boule dans l'urne U_1 note sa couleur et la remet dans l'urne. S'il obtient un multiple de 3, il prend une boule dans U_2 , note sa couleur et la remet dans U_2 . S'il ne s'agit pas des deux cas précédents, il prend une boule dans U_3 et fait la même chose.

Rafatou participe à ce jeu qu'elle trouve passionnant.

1.a) Prouve que la probabilité qu'elle obtienne une boule verte s'estime à $\frac{5}{3k}$ puis déduis-en la probabilité d'obtenir une boule rouge.

b) Sachant que la boule tirée est rouge, calculer la probabilité que le dé ait ramené un multiple de 3.

c) Calculer la probabilité que le dé ramène le numéro 5 et qu'elle tire une boule verte.

2) Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule verte soit supérieure à $\frac{1}{3}$

3) Détermine k pour que la Probabilité d'obtenir une boule rouge soit égale à 0,99917369.

4) Pour la valeur de k trouvée en 3), calcule la probabilité que le dé ramène un numéro multiple de 3 et que la boule tirée est rouge ou le dé ramène le numéro 2 et la boule tirée est verte.

Activité 22

Partie A

On lance simultanément 6 dés réguliers (i.e la probabilité d'avoir un des six chiffres pour chacun des dés est donc de $1/6$).

1) Quelle est la probabilité d'obtenir une suite de 6 chiffres ? (Rép : 0.015432099)

2) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois le chiffre 3 et 3 fois le chiffre 6 ? (Rép : 0,00042867)

3) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois le même chiffre et 3 fois un chiffre différent du premier ? (Rép : 0,006430)

4) Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois le même chiffre et 2 fois un autre chiffre différent du premier ? (Rép : 0,009645)

Partie B

Pour cette fois-ci, on lance successivement les 6 dés réguliers et on note le chiffre obtenu après immobilisation.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir une suite de 6 chiffres ?

2) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois le chiffre 3 et 3 fois le chiffre 6 ?

3) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois le même chiffre et 3 fois un chiffre différent du premier ?

4) Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois le même chiffre et 2 fois un autre chiffre différent du premier ?

Activité 23

On tire 5 cartes sans remise d'un jeu à partir duquel on a laissé les deux jokers (i.e. le jeu compte donc 54 cartes).

1) Quelle est la probabilité de piger les deux jokers et deux as et une autre carte qui n'est pas un as ? (Rép : 0,000091067)

2) Quelle est la probabilité de piger deux jokers et deux as ou plus ? (Rép : 0,000092332)

3) Quelle est la probabilité d'obtenir toutes les couleurs si on suppose que les jokers ont été mis de côté avant le tirage ? (Rép : 0,216746825)

4) Quelle est la probabilité d'obtenir 5 cartes de la même sorte ($\heartsuit|\diamondsuit|\clubsuit|\spadesuit$), si l'on considère qu'un joker peut faire office de n'importe quelle sorte ? (Rép : 0,00379825)

Activité 24

Le réfrigérateur de deux colocataires, Cédrick et Cocou, compte 16 bières : 6 blanches, 4 rousses, 3 blondes et 3 noires. En vue d'une petite soirée, Cédrick prend les 16 bières du réfrigérateur qu'il place dans son sac pour lui et Cocou. Lors de la soirée, à chaque fois que Cédrick se prend une bière parmi celles qu'il a emportées, il prend le soin d'en amener une à son colocataire aussi (i.e Cédrick est toujours le premier à se choisir une bière, et choisit par la suite celle pour Cocou.). Ils ont bu 4 bières chacun au cours de la soirée.

1) Quelle est la probabilité que Cédrick ait bu les 3 bières noires ? (Rép : 0.007142857)

2) Quelle est la probabilité que les bières non bues soient : 1 blanche, 2 blondes, 3 noires et 2 rousses ? (Rép : 0.008391608)

3) En plus de la condition de la question 2), quelle est la probabilité que Cocou ait bu 3 blanches et une blonde, et que la première bière de Cédrick soit une rousse ? (Rép : 0.000599401)

Activité 25

Une école propose trois cours de langue : un en espagnol, un en français et un en allemand. Ces cours sont ouverts aux 100 élèves de l'école. Il y a 28 élèves en espagnol, 26 en français et 16 en allemand. Il y a 12 élèves qui suivent l'espagnol et le français, 4 qui suivent l'espagnol et l'allemand et 6 qui étudient le français et l'allemand. De plus, 2 élèves suivent les trois cours.

- 1) Si un élève est choisi au hasard, quelle est la probabilité qu'il ou elle ne fasse partie d'aucun de ces cours? (Rép : 0,5)
- 2) Si un élève est choisi au hasard, quelle est la probabilité qu'il ou elle suive exactement un cours de langue? (Rép : 0,32)
- 3) Si 2 élèves sont choisis au hasard, quelle est la probabilité qu'au moins un des deux suive un cours de langue? (Rép : $\frac{149}{198}$)

(NB : Il faut résoudre cet exercice en utilisant les diagrammes)

Activité 26

Dans la ville de Lokossa à 100000 habitants, on y compte trois journaux locaux: I, II et III. Les proportions de lecteurs pour ces journaux sont:

I : 10% I et II : 8% I et II et III : 1%

II : 30% I et III : 2%

III : 5% II et III : 4%.

Ces proportions nous indiquent par exemple que 8 000 personnes lisent à la fois les journaux I et II.

- 1.) Trouver la proportion de personnes ne lisant qu'un journal. (Rép : $\frac{1}{5}$)
- 2.) Quel pourcentage de personnes lisent au moins deux journaux? (Rép : $\frac{12}{100}$)
- 3.) II est un quotidien du soir, tandis que I et III sortent le matin. Combien de personnes lisent-elles au moins un journal du matin plus celui du soir? (Rép : 11 000)
- 4.) Combien de personnes lisent-elles un journal du matin seulement et le journal du soir? (Rép : 10 000)
- 5.) Combien de personnes ne lisent aucun journal? (Rép : 68 000)

NB : utiliser les diagrammes pour résoudre cet exercice.

Activité 27

On dispose d'un dé cubique dont les faces portent les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6. On désigne par $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ leurs probabilités respectives d'apparaître. Ce dé a été pipé de telle sorte que :

- Toutes les faces n'ont pas la même probabilité d'apparaître.
- Les nombres $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ forment dans cet ordre une suite arithmétique.
- Les nombres P_3, P_5, P_6 dans cet ordre forment une suite géométrique.

1) Déterminer les réels $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$.

2) On lance une fois ce dé. Calculer la probabilité de faire apparaître un nombre un nombre paire ; de faire apparaître un multiple de 3.

III. Variable aléatoire réelle-Epreuve de Bernoulli- Loi Binomiale

Activité 28

On joue à un jeu dont voici les règles : on mise x francs CFA pour avoir le droit de jouer une seule fois, puis on lance un dé parfaitement équilibré à 12 faces numérotées de 1 à 12 et on observe le numéro apparu sur la face supérieure du dé.

Si on obtient un numéro pair, on gagne 500F.

Si on obtient 7, 9 ou 11, on gagne 800F.

Si on obtient 1, 3 ou 5, on gagne 300F.

Soit X la variable aléatoire représentant le gain diminué de la mise.

1.) Exprimer en fonction de x les différentes valeurs que peut prendre X.

2.) Déterminer la loi de probabilité de X.

- 3.) Calculer l'espérance mathématique $E(x)$ de X
- 4.) On dit que le jeu est équitable si $E(X)=0$. Déterminer la mise x pour que le jeu soit équitable.
- Déterminer dans ce cas l'écart-type de X

(Extrait du BAC Bénin Série D 2011)

Activité 29

Un sac contient trois jetons verts et cinq jetons rouges. On tire successivement et sans remise 4 jetons du sac. Les tirages sont supposés équiprobables. Soit X la variable aléatoire qui à toute éventualité associe le nombre de jetons verts tirés avant le tirage du premier jeton rouge.

- 1.) Déterminer la loi de probabilité de X .
- 2.) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X .
- 3.) Définir explicitement la fonction F de répartition de X puis représenter cette fonction.
- 4.) Calculer la probabilité de l'événement $\{0,23 \leq X \leq 2,5\}$

(Extrait modifié du test d'entrée à l'école normale de Natitingou 2012).

Activité 30

Une urne contient 5 boules blanches, 2 boules noires, 3 boules rouges. On extrait et au hasard deux boules de l'urne. On considère le jeu suivant :

- Le tirage d'une boule noire rapporte 7 points.
- Le tirage d'une boule rouge rapporte 2 points.
- Le tirage d'une boule blanche fait perdre 2 points.

Soit X la variable aléatoire réelle qui associe à tout tirage de 2 boules, le nombre de points obtenus.

1) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X .

2) Donner la loi de probabilité de X .

3) Dans cette partie, on suppose que l'urne contient n boules blanches ($n \neq 0$), deux boules noires et trois boules rouges. On extrait simultanément avec équiprobabilité deux boules de l'urne.

a) Déterminer la probabilité d'obtenir :

i) 2 boules noires.

ii) aucune boule blanche.

b) Quelle est la probabilité de n'obtenir aucune boule blanche ?

c) Comment choisir n pour que cette probabilité soit égale à $\frac{2}{11}$?

(Extrait du BAC Série D, Bénin 2012).

Activité 31

On lance une pièce de monnaie truquée, dont la probabilité d'avoir pile est de 70%.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 piles et 7 faces en 10 lancers ? (Rép : 0.0090017)

2) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu 3 faces dans les lancers 8 à 10 et d'obtenir exactement 3 piles et 7 faces en 10 lancers ? (Rép : 0.0026255)

3) Quelle est la probabilité conditionnelle d'avoir obtenu 3 faces dans les lancers 8 à 10, sachant qu'on a obtenu 3 piles et 7 faces en 10 lancers ? (Rép : 0.2916667)

- 4) Quelle est la probabilité d'avoir toujours obtenu un résultat différent du lancer précédent en 10 lancers ? (Rép : 0.00081682)
- 5) ... et en 9 lancers ? (Rép : 0.00194481)
- 6) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 4 faces en 40 lancers ? (Rép 0.999402072)

Activité 32

Une urne contient 5 boules rouges, 4 boules blanches, 2 boules vertes et une boule jaune.

Partie A

Un jeu consiste à piger au hasard 5 boules de l'urne. On gagne le jeu lorsque le tirage contient toutes les couleurs. Sonia joue 4 fois à ce jeu de façon identique et indépendante. On désigne par X la variable aléatoire réelle prenant pour valeur le nombre de fois qu'elle a gagné.

- 1.) Quelle est la probabilité de gagner au jeu ?
- 2.a) Identifier la loi de X .
- b) Déterminer la fonction de répartition F de X .
- c) Tracer la courbe représentative ($\mathcal{CF}$) de F .
- 3.a) Calculer $p(1,4 < X \leq 3)$ puis $p(X > 2,5)$.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que l'on pige sans remise une boule dans l'urne. On désigne par Y la variable aléatoire réelle prenant pour valeur le nombre d'essais nécessaires pour obtenir la première boule verte.

- 4.) Quelle sont les valeurs possibles de Y ?
- 5.a) Prouver que si k essais sont nécessaires pour obtenir la première boule verte, alors, $p(Y = k) = p(1 - p)^{k-1}$ où p est la probabilité d'obtenir une boule verte.

b) En déduire la fonction de répartition F_Y de Y évaluée à 3,5.

c) Quelle est la probabilité qu'on fasse au moins 2 essais ? ...qu'on fasse au plus 4 essais ?

d) Calculer $p(\frac{3}{2} \leq Y \leq 1,8)$.

(NB : les études supérieures connaîtront la loi de Y sous le nom de "loi Géométrique" dont le paramètre est la probabilité p d'obtenir le 1^{er} succès : ici c'est la probabilité d'obtenir la première boule verte...)

Partie C

Pour cette fois-ci, on s'intéresse plutôt à la 2^{ème} boule verte. En pigeant sans remise dans l'urne une boule, on désigne par Z la variable aléatoire réelle prenant pour valeur le nombre d'essais nécessaires pour obtenir la 2^{ème} boule verte.

- 6.a) Quelles sont les valeurs possibles de Z ?
- b) Prouver que si k essais sont nécessaires, alors $p(Z = k) = \binom{k-1}{2-1} p^2 (1-p)^{k-2}$ où p est la probabilité d'obtenir une boule verte.
- c) En déduire la probabilité que 5 essais soient nécessaires pour obtenir la 2^{ème} boule verte.
- d) Déterminer la probabilité qu'il faille au moins 4 essais pour obtenir la 2^{ème} boule verte.
- 7.) Calculer $p(2 \leq Z < 4,12)$

NB : les études supérieures systématiseront la loi de Z sous le nom de "loi Binomiale Négative" dont les paramètres sont (r et p) où r désigne le $r^{\text{ième}}$ succès et p la probabilité d'obtenir un succès : ici p c'est la probabilité d'obtenir une boule verte et $r = 2$. La loi géométrique serait un cas particulier de la loi Binomiale Négative (où $r=1$)...

Activité 33**Partie A**

On admet qu'un trait physique (telle la couleur des yeux ou le fait d'être gaucher) chez un homme est déterminé par une paire de gènes. On désignera par d le gène de la paire qui est dominant, et par r celui qui est récessif. Une personne portant dd sera ainsi à dominance pure, une autre portant rd sera à caractère récessif, alors que rd entrainera une dominance hybride. Les dominances pure et hybride ne se distinguent pas extérieurement. Un enfant recevra un gène de chacun de ses parents.

Si, par un trait particulier, Dèvi et Maboulou un couple de gens mariés sont hybrides et s'ils ont 4 enfants, quelle est la probabilité que 3 de ceux-ci manifestent extérieurement le trait dominant?

Rép. : $\frac{27}{64}$ (Penser à une loi Binomiale)...

Partie B

Dèvi aime bien jouer le jeu d'argent appelé «roue de la fortune» très populaire lors de bien des carnivals et dans les casinos; un joueur parie et mise sur un numéro compris entre 1 et 6 inclusivement. On jette ensuite trois dés. Si le nombre choisi par le joueur apparaît i fois ($i = 1, 2, 3$), celui-ci gagne i unités. Dans le cas où ce nombre n'apparaît pas, le joueur perd une unité.

(En fait, on joue en lançant une roue qui s'immobilise en laissant apparaître un jeu de trois nombres compris entre 1 et 6, mais tout revient du point de vue mathématique à jeter trois dés).

Ce jeu est-il honnête vis-à-vis du joueur?

Rép. (Non, car l'espérance du gain du joueur qui est en moyenne combien il va gagner donne $-\frac{17}{216} < 0$). (à calculer)

Partie C

Ayant brûlé avec ce jeu le peu d'argent qu'il a ce jour-là, Dèvi alla voler un mouton qu'il devrait selon ses plans, brocanter pour subvenir aux besoins de sa famille. Mais malheureusement pour lui, il fut arrêté.

Au tribunal, sa condamnation doit être votée par 8 des 12 membres du jury au moins pour devenir exécutoire.

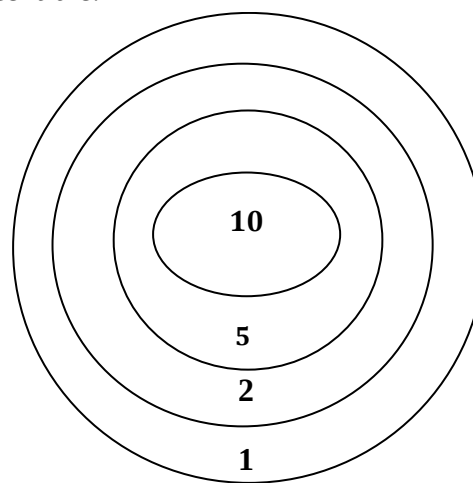
a) En admettant que les juges se déterminent indépendamment les uns des autres et que la probabilité de décision correcte est θ pour chacun d'entre eux, quelle est la probabilité que la décision du jury entier soit correcte?

b) On suppose maintenant que la probabilité que Dèvi soit jugé coupable est de 0,9.

Quelle est la probabilité qu'il n'aille pas en prison ?

Activité 34

Un joueur lance des fléchettes sur une cible circulaire formée de régions concentriques numérotées 10, 5, 2, et 1 à partir de la région centrale.



On admet que :

i) lors d'un lancer, le joueur atteint la cible avec une probabilité de 0,6.

ii) Sachant que lorsqu'il atteint la cible, quelle est la probabilité qu'il lance la fléchette dans la zone numérotée « i » est $\frac{c}{i}$ où c est un nombre indépendant de i ?

Lors d'un lancer, le joueur marque 0 point s'il manque la cible et marque i points s'il lance sa fléchette dans la zone numérotée i de la cible.

Si A est un événement, on notera $p(A)$ la probabilité de A.

On appelle X la variable aléatoire : « nombre de points marqués lors d'un lancer ».

Les résultats seront donnés dans cette question sous forme de fractions irréductibles.

1) Calculer la probabilité $p(X=0)$.

2) Pour $i \in \{1; 2; 5; 10\}$, exprimer en fonction de c et de i la probabilité $p(X=i)$.

3) En déduire que $c = \frac{5}{9}$ et donner les valeurs numériques de $p(X=i)$ pour $i \in \{1; 2; 5; 10\}$.

4) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

(Extrait du test APMB 2005, série D).

Activité 35

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 . La première U_1 contient quatre boules blanches numérotées de 1 à 4, la seconde U_2 contient trois boules rouges numérotées de 1 à 3. Une expérience consiste à extraire une boule de chaque urne, au hasard et on note b et r les numéros respectivement portés par la boule blanche et la boule rouge.

Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage le numéro b porté par la boule blanche

et soit Y la variable aléatoire associant à chaque tirage le plus petit des deux numéros b et r portés par les deux boules.

1) Déterminer la loi conjointe du couple (X ; Y).

2) Déterminer les lois de probabilité des variables X et Y.

3) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4) On dit qu'on a réussi l'expérience, lors que la boule blanche tirée porte le numéro 2 et la boule rouge tirée porte également le numéro 2.

a) Calculer la probabilité de réussir cette expérience.

b) On répète 4 fois cette expérience dans les conditions identiques.

i) Déterminer la probabilité de réussir au moins une fois.

ii) exactement deux fois.

iii) de la 2^{ème} à la 4^{ème} répétition.

c) Quelle est l'espérance mathématique et la variance de cette épreuve ?

Activité 36

On lance simultanément deux dés numérotés de 1 à 6. On désigne par Y la variable aléatoire réelle prenant pour valeur $\frac{\sqrt{x_1}}{\ln x_1 + e^{x_2}}$ où x_1 est le résultat maximum obtenu entre les deux dés et x_2 le minimum.

1.a) Déterminer les couples $(x_1; x_2)$ possibles.

b.) En déduire la loi de probabilité de Y.

c) Quelle est la probabilité d'obtenir le couple (5 ; 1) ou (2 ; 2) ?

2.a) Si X est une variable aléatoire réelle, prouver que $E(aX + b) = aE(X) + b$; a et b étant des réels.

b) En déduire $E(-2e^{\sqrt{5}Y} + \ln 3)$.

3.a) Prouver que $\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X)$ où X est une variable aléatoire réelle et a et b des réels.

b.) En déduire $\text{Var}(\ln 5Y - \sqrt{2})$.

Séquence 13 : Suites numériques

I. Généralités sur les suites numériques

Activité 1

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle

$$I = \left[0; \frac{1}{2}\right] \text{ par } f(x) = \frac{3x+1}{2x+4}.$$

1.a) Etudier le sens de variation de f sur I .

b) Démontre que $\forall x \in I, f(x) \in I$.

2) (U_n) est la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{3U_n + 1}{2U_n + 4} \end{cases}$$

a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$.

b) Etudier le sens de variation de (U_n) .

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite l .

(Extrait du BAC Bénin 2005 Série D (PI))

Activité 2

Soit la suite numérique v_n définie par :

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \text{ pour tout entier naturel non nul.}$$

1.a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel strictement positif x , on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}.$$

b) En déduire que :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

et que

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

2.a) Etudier le sens de variations de (v_n) .

b) Calculer la limite de (v_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

(Extrait du BAC Bénin Série D PI 2011)

Activité 3

Soit la fonction numérique f_n de la variable réelle x définie par :

$$f_n(x) = \frac{2x+3}{x+2} e^{\frac{x}{n}} \text{ où } n \text{ est un entier naturel non nul. } (c_n) \text{ désigne la courbe représentative de } f_n \text{ dans le plan muni d'un repère orthonormé } (O; \vec{u}, \vec{v}) \text{ (unité graphique 1cm).}$$

Partie A

1) Soit D l'ensemble de définition de f_n .

a) Déterminer D .

b) Etudier les limites de f_n aux bornes de D .

c) Etudier les branches infinies de (c_n) .

2) Etudier le sens de variations de f_n .

3) Dresser le tableau de variation de f_n .

4.a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C_1) avec les axes de coordonnées.

b) Construis (C_1) .

5) On pose $I =]-2; +\infty[$ et $J = f_n(I)$

a) Déterminer J .

b) Soit l'application $g_n : I \rightarrow J$

$$x \mapsto f_n(x)$$

Démontrer que g_n est une bijection.

c) Construire la courbe représentative (Γ) de la bijection réciproque g_1^{-1} de g_1 dans le même repère que (C_1) .

Partie B

Pour tout entier naturel non nul, on pose :

$$U_n = \int_0^2 f_n(x) dx.$$

6) Donner une interprétation géométrique de U_n .

7) Étudier le sens de variation de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

8.a) Démontrer que pour tout $x \in [0; 2]$, on a :

$$\frac{2x+3}{x+2} \leq f_n(x) \leq \frac{2x+3}{x+2} e^{\frac{2}{n}}.$$

b) On pose $I = \int_0^2 \frac{2x+3}{x+2} dx$.

Vérifier que pour tout x élément de $[0; 2]$, on

$$a : \frac{2x+3}{x+2} = 2 - \frac{1}{x+2}.$$

En déduire I .

9.a) Démontrer que $I \leq U_n \leq e^{\frac{2}{n}} \cdot I$.

b) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

(Extrait du BAC Bénin Série D PI 2007)

Activité 4

Partie A

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $y' - y = 2 - 2x$

1.) a et b étant des nombres réels, déterminer a et b pour que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par : $p(x) = ax + b$ soit solution de (E).

2) Soit φ une fonction de variable réelle.

a) Démontrer que φ est une solution de (E) si et seulement si, $\varphi - p$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' - y = 0$.

b) Résoudre (E').

c) Déterminer la solution φ de (E) telle que $\varphi(0) = 1$.

Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + e^x$ et $g(x) = f(x) - x$.

3.a) Étudier les variations de f .

b) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

c) On désigne par (C) la courbe représentative de f et par (C') celle de f^{-1} dans le repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

- Étudier les branches infinies de (C) .
- Construire (C) et (C') (On pourra calculer $f(-\frac{1}{2})$ et $f(0)$).

4) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique x_0 vérifiant :

$$-1 < x_0 < 0.$$

Dans tout ce qui suit, on pose $h = f^{-1}$.

5.a) Justifie que $h(x_0) = x_0$.

b) Démonstre que pour tout x appartenant à $] -\infty; x_0]$, $h(x)$ appartient à $] -\infty; x_0]$.

6.a) Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à $] -\infty; x_0]$, on a : $0 < h'(x) < \frac{1}{2}$.

b) Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à $]-\infty; x_0]$, on a :

$$|h(x) - x_0| \leq \frac{1}{2} |x - x_0|.$$

Partie C

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$$

7) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in]-\infty; x_0]$.

8.a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|U_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2} |U_n - x_0|.$$

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|U_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - x_0|.$$

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

(Extrait du BAC Bénin Série D PI 2000).

Activité 5

Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$V_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t) dt.$$

1) Justifier que V_n existe.

2.a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul et pour tout $x \in [0; 1]$, on a :

$$0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln 2 \text{ et}$$

$$(x-1) \ln(1+x) \leq 0.$$

b) Justifier que (V_n) est une suite décroissante.

c) En déduire que (V_n) est une suite convergente.

3.a) Dédurre de la question 2.a que pour tout entier naturel n non nul, on a : $0 \leq V_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$.

b) Calculer la limite de la suite (V_n) .

Activité 6

On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+n+t} dt.$$

1.a) Déterminer le sens de variation de cette suite.

b) Montrer (I_n) est une suite positive.

c) Montrer que pour tout $t \in [0; 1]$, on a : $\frac{e^{-t^2}}{1+n+t} \leq \frac{1}{1+n}$ et en déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{1+n}$.

Que peut-on en conclure quant à la convergence de I_n ?

2) On considère f et g deux fonctions définies sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = e^{-x} + x - 1 \text{ et}$$

$$g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}.$$

a) Étudier le sens de variation et le signe de f .

b) En déduire le sens de variation de g sur $[0; 1]$.

c) Établir, pour tout x appartenant à $[0; 1]$ l'encadrement : $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$.

d) En déduire un encadrement de e^{-t^2} pour tout t appartenant à $[0; 1]$.

e) Établir l'encadrement

$$\frac{2}{3(n+2)} \leq I_n \leq \frac{23}{30(n+1)}$$

puis préciser la limite de la suite (I_n) .

(Extrait d'un Test APMB série D)

Activité 7

On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
 $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t} \, dt$ et $I_n = \int_0^1 \sqrt{1+t} \, dt, \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. a) Comparer t^n et t^{n+1} , lorsque $0 \leq t \leq 1$ et $n > 0$.

b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

3. Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

4.a) Démontrer que pour tout élément de $[0; 1]$, on a : $0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,$ on a :

$$\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}.$$

c) Déterminer la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Activité 8

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx.$$

1.a) Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $]1; e[$ et pour tout entier naturel n , on a :

$$(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0.$$

b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

2.a) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties

c) Calculer I_1, I_3 et I_4 . Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e et les valeurs approchées à 10^{-3} près par défaut.

3.a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
 $I_n \geq 0$.

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
 $(n+1)I_n \leq e$.

c) En déduire la limite de I_n .

d) Détermine la valeur de

$nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n .

Activité 9

On considère la suite I définie par :

$$I_0 = \int_0^1 e^x dx$$

et pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n dx.$$

1.a) Calcule :

$$\int_0^1 (1-x)^n dx.$$

b.) A l'aide de l'encadrement : $1 \leq e^x \leq e$ valable sur l'intervalle $[0; 1]$, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq I_n \leq \frac{e}{(n+1)!}.$$

c) Montrer que la suite I est convergente et déterminer sa limite.

2.a) Calculer I_0 puis I_1 à l'aide d'une intégration par parties.

b) Etablir, en intégrant par parties, que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$I_{n-1} - I_n = \frac{1}{n!}.$$

3.) On pose, pour tout entier $n \geq 1$:

$$J_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

a) En utilisant les relations (1), exprimer J_n à l'aide de I_0 et I_n .

b) En déduire la limite J de la suite (J_n) .

c) Justifier l'encadrement :

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq J - J_n \leq \frac{e}{(n+1)!}.$$

Activité 10

Prouver les résultats suivants :

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \right) = 1$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \ln \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} \right) = 1$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(k-1)!} = +\infty$$

$$4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + 5n + 4}{n^2 - 3n + 7} \right)^n = e^8$$

$$5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{n}}} \right) = 1 + \sqrt{2}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right] = 2$$

$$7) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$8) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} \right) = 1$$

$$9) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - 2 + 3 - 4 \dots + (-2n)}{\sqrt{n^2 + 1}} \right) = -1$$

$$10) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) = 1$$

Activité 11

(Sodji est un riche éleveur de lapin qui dispose d'un vaste domaine plan, ayant la forme d'un quadrilatère, sur lequel il a envisagé cultiver sur une portion des céréales pour amoindrir le coût d'alimentation des lapins)

Le plan du domaine de Sodji, réalisé à une échelle de $\frac{1}{10000}$ par le géomètre, est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 1cm. Le champ de céréales est délimité par la courbe représentative (c) d'une fonction f , l'axe des abscisses et les droites

d'équations : $x = 0$ et $x = 2\sqrt{2}$. La fonction f est la solution qui prend la valeur 1 en 0 de l'équation différentielle :

$$(E_1): y' + y = 2e^{-x}(x+1).$$

1.a) Détermine les nombres réels a et b pour que la fonction φ définie par :

$\varphi(x) = e^{-x}(ax^2 + bx)$, soit solution de l'équation (E_1) .

b) Démontre que toute fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E_1) si et seulement si $g - \varphi$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E_2): y' + y = 0.$$

c) Résous l'équation (E_2) puis déduis la résolution de l'équation (E_1) .

2.) Démontre pour tout x élément de $\mathbb{R}$,
 $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.

3.) Calcule les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

4.a) Etudier le sens de variation de f .

b) dresse le tableau de variation de f .

5.a) Etudie les branches infinies de la courbe représentation de f .

b) Construis-la et hachure la partie représentant le champ de céréales de Sodji.

6.a) Démontre que tout réel x ,

$$f(x) = e^{-x}(2x+2) - f'(x).$$

b) A l'aide d'une intégration par parties, calcule le nombre L suivant :

$$\int_0^{2\sqrt{2}} e^{-x}(2x+2)dx.$$

c) Déduis-en, en hectares, l'aire du champ de céréales.

7.a) Démontre que l'équation :

$f(x) = x$ admet dans l'intervalle $[1; +\infty[$ une solution unique α et que l'on a :

$$1 < \alpha < \frac{3}{2}.$$

b) Démontre que pour tout $x \in [1; \frac{3}{2}]$,

$$f(x) \in [1; \frac{3}{2}] \text{ et } |f'(x)| \leq \frac{5}{4e}.$$

c) Déduis-en que pour tout x élément de $[1; \frac{3}{2}]$, on a :

$$|f(x) - \alpha| \leq \frac{5}{4e} |x - \alpha|.$$

(Extrait du test A.P.M.B Série D, 2012)

Activité 12

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}$ et on considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k.$$

1.°) Etudier le sens de variation de u_n .

2. °) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx$.

3. °) Déduisez – en $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Que conclure quant à la convergence de u_n .

4. °) On pose :

$$v_n = \left(\prod_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k}{n}} \right)^{\sin(2\pi\sqrt{n^2+1})}$$

Prouver que v_n converge vers $\left(\frac{4}{e}\right)^{\frac{\pi}{2}}$

NB : Le symbole $\prod$ désigne le produit des termes par opposition à $\sum$ qui symbolise les sommes.

II. Suites Arithmétiques-Suites Géométriques.

Activité 13

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} f_n(t) = \frac{\sin nt}{\sin t} \text{ si } t \neq 0 \\ f_n(0) = n \end{cases}$$

1.) Vérifier que f_n est continue en 0.

2.) Etudier la continuité de f_n puis justifier l'existence de : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt$.

3.) Pour tout entier naturel n , on définit la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}} : I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt$.

a) Démontrer, pour tout entier n , que :

$$I_{n+2} - I_n = \frac{2}{n+1} \sin(n+1) \times \frac{\pi}{2}.$$

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul : $I_{2n+1} - I_{2n-1} = 0$.

c) Calculer $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(t) dt$ puis en déduire la valeur de I_{2n+1} .

4.) On rappelle que pour tout entier naturel k , on a : $\frac{\pi}{2} \sin(n+1) = (-1)^{k+1}$.

a.) Prouver à partir de 3.a) que :

$$I_{2n} - I_{2n-2} = \frac{2}{2n-1} \times (-1)^{n+1}.$$

b) Démontrer alors que :

$$I_{2n} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}.$$

5.) On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_{2n+1} - I_{2n}) = 0$.

En déduire la limite de la suite $(I_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Activité 14

Yaovi dirige une ONG appelée « BABA ». Il place un capital $C_0=3000F$ à un taux annuel de 6%. Les intérêts étant simples, c'est-à-dire que le capital d'une année est égal à celui de l'année précédente augmenté de 6% du capital initial (les intérêts ne sont pas capitalisés chaque année comme ce serait le cas pour des intérêts composés). On note C_n le capital exprimé en franc CFA de Yaovi au bout de n années.

1) Montre que pour tout entier n , $C_{n+1} = C_n + 180$.

Que peut-on en déduire ?

2) Pour tout entier naturel n , exprimer C_n en fonction de n .

3) De quel capital Yaovi dispose-t-il au bout de 10 ans ?

4) Au bout de combien d'année le capital aura-t-il doublé ?

5) Au bout de combien d'année le capital dépasse-t-il 1000F ?

Activité 15

Les deux parties de cette activité sont indépendantes.

Partie A

Dans le but de rechercher une nappe d'eau chaude susceptible de chauffer un groupe d'immeuble, on se propose d'effectuer un forage. Une somme de 76800 F a été débloquée. L'entreprise de forage a soumis le devis suivant :

- Le premier mètre coûte 100 F
- Le deuxième mètre coûte 140 F,

et ainsi de suite en augmentant toujours 40 F par mètre. Quelle profondeur pourra-t-on atteindre ?

Partie B

La production de cahiers par l'entreprise "MARINA" baisse de 4% chaque année. Au cours de l'année 2000, la production a été de 2500 unités.

On note $P_0 = 2500$ et P_n la production prévue au cours de l'année 2000+n.

1) Montrer que (P_n) est une suite géométrique dont-on précisera la raison.

2) Expliciter P_n et déduis-en P_5 .

3) Si la production de cahiers descend au-dessous de 1500 unités, "MARINA" sera en faillite.

Quand cela risque-t-il d'être arrivé si la baisse annuelle de 4% persiste ?

Activité 16

Des élections opposent n candidats au premier tour. Chacun d'eux réunit exactement deux fois plus de voix que son suivant immédiat. Pour tout entier naturel k tel que $k \in [1; n]$, on désigne par v_k le nombre de voix obtenues par le candidat placé au $k^{\text{ième}}$ rang.

1) Démontrer que (v_k) est une suite géométrique et exprimer v_k en fonction de k et v_1 .

2.a) Calculer, en fonction de n et v_1 le nombre total de voix réunies par les n candidats.

b) On suppose que, pour être élu au premier tour, un candidat doit obtenir plus de la moitié des suffrages exprimés. Un second tour est-il nécessaire ?

3) Déterminer le nombre de candidats à cette élection sachant qu'il y a 945 votants et que le candidat élu obtient 480 voix.

Activité 17

Soit la suite géométrique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, de raison strictement positive et de premier terme $U_1 = \frac{1}{2}$ et telle que $81U_{10} = 16U_6$.

1) Déterminer la raison de cette suite puis expliciter U_n .

2) Calculer $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ puis calcule la limite de S_n .

3) Calculer $P_n = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ et donne la limite de P_n .

4) Calcule $w_n = \frac{e^{S_n}}{P_n}$ et déduis-en sa limite.

5) On désigne par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison positive telle que :

$$u_0 + u_1 = -\frac{13}{2} \text{ et } u_0 \times u_1 = \frac{25}{4}.$$

a) Déterminer le premier terme u_0 et la raison q de cette suite.

b) Calculer la somme des 10 premiers termes de cette suite.

Activité 18

On considère la suite numérique

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n + 4} \end{cases}$$

1.a) Calcule U_1 et U_2 .

b) Démontre que pour tout entier naturel non nul n , $U_n \in [0; 1]$.

c) Justifie que (U_n) est constante.

2) On considère (V_n) définie par son terme général : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Démontre que la suite (V_n) est une suite géométrique convergente..

b) Calcule U_n en fonction de n .

c) Déduis-en que (U_n) est convergente et calcule sa limite.

Activité 19

Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$U_n = \int_{n-1}^n e^{\frac{-x}{4}} dx$$

1) Calcule U_n en fonction de n .

2.a) Démontre que la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique dont tu donneras la raison et le premier terme.

b) Détermine la limite de la suite (U_n) .

3) Détermine par deux méthodes différentes la somme S_n des n premiers termes de U_n puis calcule la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4) On pose : $V_n = \ln(U_n)$ pour tout entier naturel non nul.

a) Démontre que $(V_n)_{n \geq 1}$ est une suite arithmétique.

b) Soit W_n la somme des n premiers termes de $(V_n)_{n \geq 1}$ et P_n le produit des n premiers termes de U_n .

- Calcule W_n en fonction de n .
- Déduis-en P_n en fonction de n .

III. Suites Arithmético-Géométriques.

Activité 20

Cette activité va nous amener à étudier les suites arithmético-géométriques comme on le faisait en 1^{ère} puis ensuite on va les étudier sans suite « auxiliaire ».

Partie A

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4 \end{cases} \text{ et on pose } v_n = u_n - 8.$$

1.) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 .

2.a) Montrer que v_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

b) Exprimer v_n en fonction de n et déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

3.a) Exprimer u_n en fonction de n .

b) La suite u_n est-elle convergente ?

4.a) Calculer les $n - 1$ premiers termes de u_n .

b) En déduire les $n - 1$ premiers termes de u_n .

Partie B

5.a) Sans utiliser de la suite v_n , étudier la convergence de la suite u_n .

b.) En déduire u_{15} .

6.a) Déterminer, sans utiliser la suite v_n les $n - 1$ puis les n premiers termes de u_n .

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n+2} u_k$.

Séquence 14 : Statistiques

I. Séries présentant un regroupement en classe.

Activité 1

Dans la banque « FIOKOU », on a relevé des montants en milliers de francs des 49 premiers versements effectués au guichet. On a obtenu les résultats suivants :

50 ; 300 ; 100 ; 800 ; 200 ; 30 ; 75 ; 250 ; 600 ;
260 ; 150 ; 45 ; 490 ; 400 ; 200 ; 375 ; 360 ;
620 ; 130 ; 1450 ; 880 ; 25 ; 560 ; 350 ; 450 ;
400 ; 280 ; 190 ; 1180 ; 220 ; 520 ; 120 ; 900 ;
110 ; 350 ; 600 ; 850 ; 290 ; 1400 ; 125 ; 900 ;
1000 ; 130 ; 1100 ; 430 ; 950 ; 45 ; 310 ; 590.

1) Regrouper ces montants par classe d'amplitude 300, la première étant $[0; 300[$, puis dresser le tableau des fréquences et des fréquences cumulées croissantes de la série ainsi obtenue.

2) Déterminer la classe modale de cette série.

3) Calculer les moyennes respectives :

a) de la série avant le regroupement en classe.

b) de la série obtenue par regroupement en classe.

Activité 2

On considère une série dont les effectifs cumulés décroissants sont donnés dans le tableau suivant :

Classe	$[-2 ; 4[$	$[4 ; 6[$	$[6 ; 8[$	$[8 ; 10[$
Eff cumulé décroissant	14	16	08	12

1) Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants.

2) Construire les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.

3) Déterminer graphiquement le nombre d'individus dont la modalité est :

a) inférieure à 1.

b) supérieure à -0,4

4) Déterminer graphiquement l'intervalle dans lequel on trouve :

a) les 9 individus de la modalité la plus grande.

b) les 20 individus de la modalité la plus petite.

Activité 3

Dans la classe de Barbara, on relève les tailles de 36 élèves qui sont réparties comme suit :

Taille	Effectif	Taille	Effectif
$[145 ; 155[$	3	$[165 ; 170[$	8
$[155 ; 160[$	5	$[170 ; 175[$	8
$[160 ; 165[$	6	$[175 ; 185[$	6

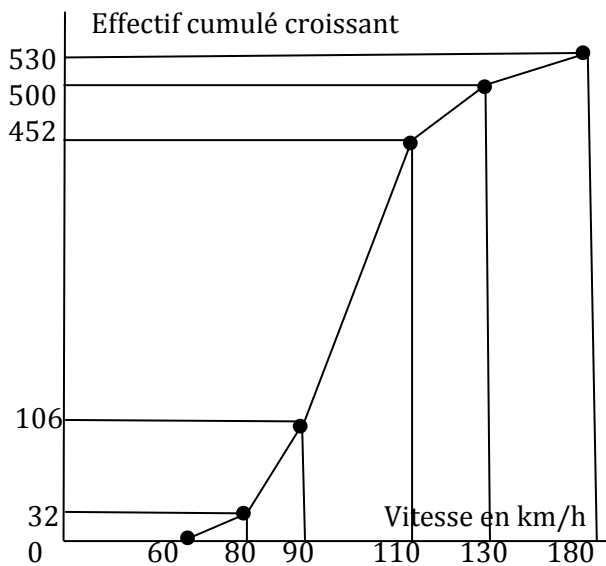
1) Représenter cette série par l'histogramme des effectifs.

2) Déterminer la (ou les) classes modales de cette série et calculer sa moyenne.

- 3) Construire le polygone des effectifs cumulés croissants.
- 4) Déterminer la médiane de cette série.

Activité 4

Ces temps-ci, le contrôle sur les voies par les policiers devient rude. La semaine dernière, un contrôle de vitesse a été effectué sur une autoroute où la vitesse est limitée à 130km/h. La série statistique obtenue est représentée ci-dessous par son polygone des effectifs cumulés croissants.



1) Etablir le tableau des effectifs de cette série statistique.

2.a) Quel est le pourcentage de véhicules en infraction ?

b) On a décidé de ne verbaliser que les conducteurs roulant à une vitesse strictement supérieure à 140km/h .

Combien d'amendes va-t-on en donner.

3) Déterminer la classe modale et la moyenne de cette série.

II. Séries Statistiques à deux caractères.

Activité 5

Le tableau ci-dessous nous donne la charge maximale y_i , en tonnes, qu'une grue peut lever pour une longueur x_i en mètre de la flèche.

x_i	16,5	18	19,8	22	25	27	29	35	39	41,7
y_i	10	9	8	7	5,5	5	4,5	4	3,5	3,2

(Les réponses numériques à cette question seront données à 10^{-2} près)

1.a) Représenter le nuage de points $M(x_i; y_i)$ à l'aide d'un repère orthogonal d'unité 1cm pour une tonne en ordonnées puis calculer le coefficient de corrélation linéaire.

b) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.

Construis cette droite sur le graphique précédent.

c) Utiliser cette équation pour déterminer la charge maximale que peut lever une grue avec une flèche de 26 mètres.

2) On pose $z_i = \frac{1}{y_i}$.

Recopier et compléter le tableau suivant (les z_i seront arrondis à 10^{-3} près).

x_i										
z_i										

a) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés.

(Les résultats numériques seront arrondis à 10^{-4} près).

b) En se fondant sur les résultats obtenus à la question 2.b), calculer la valeur de z correspondant à $x = 26$.

c) En déduire la charge maximale que peut lever une grue avec une flèche de 26 mètres.

d) Ce résultat vous paraît-il satisfaisant que celui de 1 ? Pourquoi ?

Activité 6

Dans l'Hôpital Gbadagba, on a relevé pour chacune des 10 naissances d'une journée l'âge x de la mère et le poids y du nouveau-né. On obtient le tableau ci-dessous.

X	22	18	18	26	20
Y	3	2,4	2,6	3,2	3

X	20	16	22	20	18
Y	2,8	2,4	3	2,8	2,6

1) Présenter ces données dans un tableau à double entrée.

2) Déterminer les séries marginales associées aux caractères x et y .

3) Représenter le nuage de points associé à cette série à deux caractères et déterminer le point moyen du nuage.

4) Déterminer la covariance de cette série et son coefficient de corrélation linéaire.

5) Un ajustement linéaire convient-il ?

Déterminer une équation de la droite de régression de y en x .

6) Estimer le poids du nouveau-né d'une mère de 24 ans qui vient d'accoucher à « Gbadagba » en supposant que cette tendance se maintient.

Activité 7

Une entreprise fabrique des postes téléviseurs dont on peut faire varier les caractéristiques en vue d'atteindre le prix de vente voulu. On cherche à fixer le prix unitaire d'un téléviseur pour réaliser un bénéfice maximum.

Les résultats de ventes sont indiqués dans le tableau ci-après donnant le nombre y de téléviseurs vendus lorsque le prix de l'unité est x .

x_i	0,5	0,5	1	1	2	2,5
y_i	5,5	5	4	4	2,5	3

x_i est en centaine de milliers de francs et y_i en dizaine de téléviseurs.

1.a) Définir les séries marginales (x_i, n_i) et (y_j, n_j) .

b) Calculer les moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$.

2.a) Dresser le tableau à double entrée correspondant à la série double (x_i, y_j, n_{ij}) .

b) Déterminer la covariance du couple de caractères $(x; y)$.

3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire en x et en y .

4) Etablir l'équation de la droite de régression donnant y en fonction de x .

5) Les frais de fabrication de chaque téléviseur s'élèvent à 0,1 centaine de milliers de francs.

a) Démontrer que le bénéfice total b réalisé est donné par : $b(x) = -1,26x^2 + 5,701x - 0,5575$ lorsque le prix de vente d'un téléviseur est x .

b) A quel prix l'entreprise doit-elle vendre un téléviseur pour réaliser un bénéfice maximal ? Calculer ce bénéfice en francs. Combien de téléviseurs l'entreprise devra-t-

elle vendre pour atteindre le bénéfice maximal ?

(Extrait du BAC Bénin ,Série D, PI 2005)

Activité 8

Dans le village Zoungbo , on s'est intéressé à la quantité d'eau utilisée par les agriculteurs en saison sèche pour arroser leurs plantes. Une étude statistique permet de généraliser cela dans le tableau ci-après.

Nombre de jours x_i écoulés	1	3	5	8	10
Volume y_i utilisé en cm^3	2,25	4,3	8	17,5	27

1) Représenter la série (x_i, y_i) en prenant 1cm pour 1jour sur l'axe des abscisses et 0,5cm pour 1cm^3 sur l'axe des ordonnées dans un repère orthogonal.

2.a) Donner l'équation de la droite de régression de y en x par la méthode de **Mayer**.

b) Donner l'équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.

c) Représenter la droite sur le graphique.

3) Le nuage de points permet d'envisager un ajustement par la parabole (c) qui passe par des points A(1 ;2,25) et B(10 ;27), et qui a pour équation $y=ax^2 + b$ où a et b sont deux nombres réels.

a) Donner l'équation de la parabole (c)

b) Représenter la parabole (c) sur le graphique.

Activité 9

Dans l'établissement de Barbara, les élèves de la série D ont étudié la croissance d'une

souche de bactéries Acétobacter au cours d'une séance d'expériences.

Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau ci-après.

Temps x_i (en heures)	4	5	6	7	8	9
Nombres N_i de bactéries par unité de volume(en milliers)	13,6	21,3	70,9	121,5	383	590

Les points $(x_i ; N_i)$ ne sont pas alignés, et on décide alors de poser $y_i = \ln(N_i)$.

1) Recopie et complète le tableau ci-dessous puis donner les valeurs arrondies au centième près.

x_i	4	5	6	7	8	9
y_i	2,61			4,80		

2) Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$.

3) Déterminer puis placer les coordonnées du point moyen G.

4) Calcule le coefficient de corrélation linéaire et interprètes-le.

5) Donner une équation de droite d'ajustement de x en y par la méthode des moindres carrés.

Activité 10

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de personnes âgées de plus de 85ans en France métropolitaine, de 1950 à 2000. On note x_i l'année. L'indice i varie de 1 à 11. Par commodité, on pose $X_i = x_i - 1950$.

y_i désigne en milliers, le nombre de personnes âgées de 85ans ou plus au 1^{er} Janvier de l'année X_i .

X_i	1950	1955	1960	1965	1970	1975
x_i	0	5	10	15	20	25
y_i	201	231	290	361	423	498

X_i	1980	1985	1990	1995	2000
x_i	30	35	40	45	50
y_i	567	684	874	1079	1267

1.a) Dessiner le nuage de points

$M_i(x_i; y_i)$ associé à cette série statistique, dans un repère orthogonal dont vous préciserez les unités.

b) La forme du nuage suggère-t-elle un ajustement affine ?

2) On pose : $z = \ln y$.

a) Compléter la dernière ligne du tableau. Arrondir les résultats au millièème.

b) En utilisant la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrées une équation de la droite d'ajustement de z en x . Les coefficients seront arrondis au millièème.

c) En déduire une modélisation de y en fonction de x sous la forme $y = \varphi e^{\alpha x}$ (le réel φ sera arrondi à l'unité et le réel α au millièème)

3) On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 70]$ par :
 $g(x) = 200e^{0,037x}$ modélise de façon satisfaisante l'évolution de cette population.

Résoudre l'inéquation $g(X) \geq 3000$ et interpréter le résultat.

SA n°3 : Lieux géométriques dans le plan

Séquences 1 & 2 : Isométries du plan- Applications affines

I. Compositions et décompositions d'isométries.

Activité 1

ABC est un triangle équilatéral de centre O et de sens direct.

1) Démontrer que $S_{OA} \circ S_{OB} = S_{OB} \circ S_{OC}$.

2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $S_{OA} \circ S_{OB} \circ S_{OC}$.

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $S_{AB} \circ S_{AC}$ et de $S_{BC} \circ S_{OA}$.

4) Déterminer la nature et l'élément caractéristique de la transformation f définie par : $f = r(A, \frac{\pi}{3}) \circ r(B, \frac{\pi}{3}) \circ r(C, \frac{\pi}{3})$.

Activité 2

ABCD est un rectangle direct.

1) Déterminer (Δ) telle que :

a) $S_{\Delta} \circ S_{AD} = t_{\overline{AB}}$; b) $S_{\Delta} \circ S_{BC} = t_{\overline{AB}}$

c) $S_{AD} \circ S_D = t_{\overline{AB}}$

2) On suppose que $AB = 2AD$ et O le milieu de $[CD]$.

Déterminer la nature et les caractéristiques des transformations suivantes :

a) $S_{OA} \circ S_{OB}$; b) $S_{OA} \circ S_{OD}$

c) $S_{OA} \circ S_{OB} \circ S_{OC} \circ S_{OD}$

3) On suppose maintenant que ABCD est un carré de sens direct et centre I.

Déterminer les applications suivantes :

a) $f = r(A, \frac{\pi}{4}) \circ r(B, \frac{\pi}{4})$; b) $f = r(A, \frac{\pi}{2}) \circ r(B, \frac{\pi}{2})$

c) $f = r(A, \frac{\pi}{2}) \circ r(B, \frac{-\pi}{2})$; d) $f = t_{\overline{AB}} \circ r(B, \frac{\pi}{4})$

e) $f = t_{\overline{AB}} \circ r(I, \frac{\pi}{2}) \circ t_{\overline{CD}}$; f) $f = t_{\overline{AB}} \circ r(B, \frac{\pi}{2}) \circ t_{\overline{BA}}$

4) Démontrer que

$f = r(A, \frac{\pi}{2}) \circ r(B, \frac{\pi}{2}) \circ r(C, \frac{\pi}{2}) \circ r(D, \frac{\pi}{2})$ est une identité.

Activité 3

ABC est un triangle équilatéral de sens direct de centre O.

1.) Déterminer la droite (Δ) telle que :

a) $r(A, \frac{\pi}{3}) = S_{\Delta} \circ S_{OA}$.

b) $r(O, \frac{2\pi}{3}) = S_{\Delta} \circ S_{OA}$

2) Déterminer les applications suivantes :

a) $f = r(B, \frac{\pi}{3}) \circ r(A, -\frac{\pi}{3})$;

b) $f = r(O, \frac{2\pi}{3}) \circ r(C, \frac{\pi}{3})$; c) $f = r(A, \frac{\pi}{3}) \circ t_{\overline{AB}}$

d) $f = r(C, \frac{\pi}{3}) \circ r(B, \frac{\pi}{3}) \circ r(A, \frac{\pi}{3})$.

3) Soit (c) le cercle circonscrit au triangle ABC. La médiatrice de [BC] coupe (c) en A et D. On note H le point d'intersection des droites (BD) et (AC).

a) Démontrer que H est le symétrique de A par rapport à C.

b) On donne : $f = S_{BD} \circ S_C \circ S_{AB}$.

Déterminer $f(A)$ puis donner la nature et les éléments caractéristiques de f (On pourra d'abord déterminer $S_{BD} \circ S_{DC}$, $S_{CA} \circ S_{AB}$ et $S_{DC} \circ S_{CA}$).

b) En déduire la nature de la transformation $S_{BD} \circ S_C$.**Activité 4**

ABCD est un carré de centre O. Soit Δ et Δ' les médiatrices respectives de [AB] et [BC].

1) Déterminer les images des points A, B, C et D par la transformation $f = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$.

2) Quelle est la nature de cette transformation ?

3) Soit les rotations $r_1(B, \frac{\pi}{2})$, $r_2(A, \frac{\pi}{2})$, $r_3(O, \frac{-\pi}{2})$.a) Déterminer l'image de C par $r_2 \circ r_1$. En déduire la nature et l'élément caractéristique de $r_2 \circ r_1$.b) Déterminer l'image de C par $r_3 \circ r_1$. En déduire la nature et l'élément caractéristique de $r_3 \circ r_1$.c) Déterminer la nature et l'élément caractéristique de $r_3 \circ r_2$.4) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $r_2 \circ r_1 \circ r_3$.**Activité 5****(Mise en évidence de la symétrie glissée)**

On considère dans le plan affine muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ les points $A(2; 2)$; $B(6; 6)$; $C(2; 10)$; $D(-2; 10)$; $K(5; 2)$ et $H(2; 6)$. Soit I et J les milieux respectifs de [AB] et [DC] .

1. Démontrer de deux manières différentes que ABCD est un carré.

2. Donner la nature et les éléments caractéristiques de :

a) $S_{AB} \circ t_{\overline{IJ}}$

b) $t_{\overline{IJ}} \circ S_{AB}$

3. Caractériser $S_{AB} \circ t_{\overline{CD}}$ 4. Caractériser $t_{\overline{AB}} \circ S_{AC}$ puis $S_{AC} \circ t_{\overline{AB}}$

5. Prouve que $f = t_{\overline{AK}} \circ r(C; \frac{\pi}{2}) \circ S_H \circ S_{BD}$ est la composée d'un demi-tour et d'une translation dont on donnera les éléments caractéristiques .

Activité 6

On considère la fonction numérique f de variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2 - 2\ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par (c) la courbe représentative de la fonction f .

1.a) Etudier les variations de la fonction u définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 - 2\ln x$.

b) Préciser le signe de $u(x)$ pour tout nombre réel x strictement positif.

2.a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point $x_0 = 0$.

b) Donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.

c) Achéver l'étude des variations de f .

d) Construire la courbe (c) .

3. On désigne par (Γ) l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, vérifient :

$$\begin{cases} y > 2 \\ x = \frac{1}{(y-2)^2 - \ln(y-2)^2} + 1 \end{cases}$$

a) Démontrer qu'il existe une droite Δ et un vecteur $\vec{u}$ non nul tels que $(\Gamma) = (t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta})(c)$ où t est la translation de vecteur $\vec{u}$ et S_{Δ} la symétrie orthogonale d'axe Δ .

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$.

c) Construire (Γ) .

4) Soit g la fonction définie pour tout réel strictement positif x par :

$g(x) = -f(-x + 2) + 5$. On désigne par (c') sa courbe représentative.

Trouver une transformation qui permet de passer de la courbe (c) à la courbe (c') .

Activité 7

On considère la fonction numérique f de variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{|x| - 1}, & \text{si } x \neq 1 \\ f(x) = -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f et par (C') la courbe de la fonction g telle que $g(x) + f(x) = 0$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1cm.

On désire aussi déterminer l'image de (C) par la transformation r du plan dans lui-même qui, à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ et qui est définie par :

$$\begin{cases} x' = 3 - y \\ y' = x + 1 \end{cases}$$

Pour déterminer la nature exacte de la transformation plane r , on considère dans le plan les points $A(0; 1)$ et $B(2; -3)$ d'images respectives A' et B' par r puis les angles orientés $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{O'A'}; \overrightarrow{O'B'})$ où O' désigne l'image de O par la transformation plane r .

1.a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f puis réécrire f sans le symbole de la valeur absolue.

b) Etudier la continuité de f en 1 puis conclure quant à la continuité de f sur $\mathcal{D}$.

2.a) Etudier la dérivabilité de f en 1 et 0 puis donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.

b.) En déduire l'ensemble de dérivabilité $\mathcal{E}$ de f .

3.a) Calculer la dérivée première f' de f pour tout x élément de $\mathcal{E}$ puis donner le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x sur $\mathcal{E}$.

b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition $\mathfrak{D}$ puis dresser le tableau des variations de f .

4.a) Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C})$.

b) Démontrer que la fonction $x \mapsto x - 2$ est le prolongement par continuité de la fonction $x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ en 1. En déduire que $(\mathcal{C})$ est confondue avec une de ses asymptotes puis tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

c.) Justifier que $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses puis construire $(\mathcal{C}')$ sans étudier g .

5.) On pose : $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'}$.

a) Déterminer les coordonnées de A' et B' puis vérifier que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\|$.

b) Justifier que $\|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OB}\| = \sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) \cdot \frac{(\|\vec{u}\|^2 - \|\overrightarrow{OA}\|^2 - \|\overrightarrow{OB}\|^2)}{\cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})}$ puis déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

c) En déduire $\cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ et $\cos(\overrightarrow{O'A'}; \overrightarrow{O'B'})$ puis montrer que $\text{mes}(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \text{mes}(\overrightarrow{O'A'}; \overrightarrow{O'B'})$.

6. a) Prouver que r est une isométrie positive (déplacement).

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par r .

c) En déduire que r est une rotation de centre $\Omega(1; 2)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

7.) On pose : $(\tau) = r\{(\mathcal{C})\}$.

a) Déterminer (τ) .

b) Déterminer l'image (τ') de (τ) par la symétrie orthogonale d'axe $2x - y = 1$.

c) Déterminer l'image (τ'') de (τ) par la translation t de vecteur $\vec{w}(1; 2)$.

II Classification des isométries

Activité 8

On considère un pavé droit ABCDEFGH et un triangle équilatéral IJK de centre O et de sens direct. Les points M, N, S et T appartiennent respectivement à [AB], [DC], [EF] et [HG] tels que AMNDESTH soit un cube. t désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{OK}$, r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, S la symétrie d'axe (OI).

1) Reconnaitre, justification à l'appui parmi les transformations suivantes celles qui sont des déplacements et des antidéplacements :

a) $r \circ S \circ r^{-1}$; b) $S \circ r \circ S$; c) $t \circ S \circ t^{-1}$

d) $S \circ t \circ S$

Prouve ensuite ces résultats à partir de l'écriture simplifiée de ces transformations.

2) Démontrer à partir de la nature de ces transformations que :

a) $S_{MH} \circ S_{EN}$ et $S_{EMN} \circ S_{DS}$ sont des déplacements.

b) $S_{MN} \circ S_{DT} \circ S_{AS}$ et $S_{EMN} \circ S_{AST} \circ S_{AEM} \circ S_{EHN}$ sont des antidéplacements.

3) On désigne par P, Q et R les milieux respectifs de [IJ], [JK], [KI].

Déterminer les isométries telles que :

a) (I, O, R) a pour image (K, O, R).

b) (I, O, R) a pour image (J, O, P).

c) (I, O, R) a pour image (J, O, Q).

4) Soit (E) l'ensemble des isométries laissant globalement invariant le rectangle ABCD. Δ et

Δ' les médiatrices respectives des segments $[AB]$ et $[BC]$, L le centre de ce rectangle.

a) Vérifier que les transformations Id , S_L , S_{Δ} et $S_{\Delta'}$ appartiennent à l'ensemble (E) .

On admet désormais que $(E) = \{\text{Id}, S_L, S_{\Delta}, S_{\Delta'}\}$.

b) Dresser le tableau des composées des éléments de (E) .

c) Dédire de ce tableau que (E) est un groupe de transformations.

Activité 9

ABC est un triangle de centre O et de sens direct.

1) Démontrer que les seules symétries orthogonales laissant globalement invariant le triangle ABC sont : S_{OA} , S_{OB} et S_{OC} .

2) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Démontrer que les seules rotations laissant globalement invariant le triangle ABC sont : Id , r et r^{-1} .

3) On considère l'ensemble (E) d'isométrie :

$$(E) = \{\text{Id}, r, r^{-1}, S_{OA}, S_{OB}, S_{OC}\}.$$

Dresser le tableau des composées de (E) et en déduire que (E) est un groupe de transformation du plan.

Activité 10

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application f du plan dans lui-même qui au point $M(x; y)$ fait correspondre le point $M'(x'; y)$:

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + m \\ y' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

1) Démontrer que f est une isométrie négative (antidépacement).

2) Pour quelle valeur de m l'application f est-elle une symétrie orthogonale par rapport à une droite affine ?

3) On suppose que $m=0$. Trouver une droite affine (D) et un vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v}$ dirige la droite (D) et que : $f = S_D \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ S_D$ où S_D est la symétrie orthogonale par rapport à la droite (D) et où t est la translation de vecteur $\vec{v}$.

Activité 11

Soit $ABCD$ un carré de sens direct ; I, J, K et L milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1. On pose $f = S_{(IK)} \circ r_{(A, \frac{\pi}{2})}$.

a) Déterminer $f(A)$, $f(B)$ et en déduire que f est un antidépacement sans point fixe, d'axe (IJ) .

b) Déterminer $f(I)$ et en déduire la forme réduite de f .

2) On pose $g = r_{(A, \frac{\pi}{2})} \circ S_{(IK)}$

Déterminer $g(A)$ et $g(B)$ puis en déduire que g est un antidépacement sans point fixe dont on précisera l'axe et le vecteur.

3) On rappelle que si u et v sont deux transformations du plan, on a :

$$(u \circ v)^{-1} = v^{-1} \circ u^{-1}$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

$$a) f_1 = r_{(A, -\frac{\pi}{2})} \circ S_{(IK)}; \quad b) f_2 = S_{(IK)} \circ r_{(A, -\frac{\pi}{2})}$$

c) $g \circ f$

4.a) Déterminer $f \circ g(B)$.

b) Déterminer $f \circ g(E)$ sachant que $\{E\} = (BC) \cap (IL)$.

c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $f \circ g$.

Activité 12

ABC est un triangle inscrit dans un cercle (c) , de centre O , H est son orthocentre, I est le milieu du segment $[BC]$.

1. On considère le point M du plan tel que :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

a) Démontrer que : $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{OI}$; en déduire que le point M appartient à la hauteur issue de A.

b) Démontrer que les points M et H sont confondus.

2) Soit P le symétrique du point H par rapport à la droite (BC).

a) Déterminer l'image du point H par rapport à la droite (BC).

a) Déterminer l'image du point P par la transformation définie par : $f = t_{\overline{HA}} \circ S_{(BC)}$.

b) Déterminer la droite (Δ) telle que :

$$t_{\overline{HA}} = S_{\Delta} \circ S_{(BC)}$$

c) En déduire que le point P est sur le cercle (c). Énoncer le théorème ainsi démontré.

Activité 13

On considère un triangle ABC de sens direct. ABED et ACGF sont les carrés construits extérieurement à ABC sur les côtés [AB] et [AC]. On désigne par H le projeté orthogonal de A sur (BC), K le milieu de DF, I le centre du carré ABED et J celui de ACGF.

1) On considère les quarts de tours directs r et r' , de centres respectifs I et J.

Démontrer que $r \circ r^{-1} = r'^{-1} \circ r^{-1} = S_K$

2) Déterminer l'image de la droite (AH) par S_K . En déduire que les points K, A et H sont alignés.

3) Soit A' l'image du point A par S_K .

a) Démontrer que $r(C) = A'$. En déduire que $(EC) \perp (A'C')$.

4) Déduire des questions précédentes que les droites (EC), (BG) et (AH) sont concourantes.

III. Applications affines

Activité 14

1) Déterminer l'expression analytique de l'affinité ϕ par rapport à la droite (D) : $x - y + 1 = 0$, de direction celle de la droite (Δ) : $2x - y + 2 = 0$ et de rapport 2.

2) Détermine les images par ϕ des droites suivantes :

a) (Δ_1) : $x = 0$; b) (Δ_2) : $y = 3$ et

c) (Δ_3) : $2x - y + 1 = 0$.

3) Déterminer l'image par ϕ du cercle (c) de centre I(-1 ; 2) et de rayon $r = \sqrt{3}$.

4) Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout M associe M' telle que :

$$\begin{cases} x' = -x - 2y + 2 \\ y' = -x + 1 \end{cases}$$

Démontrer que f est une affinité par rapport à une droite (D) de direction δ et de rapport k .

Activité 15

Soit ϕ l'application vectorielle associée à une application affine f telle que :

$$\phi(\vec{u}) = \vec{u} ; \phi(\vec{v}) = -\frac{1}{2}\vec{v} \text{ et } f(A) = A \text{ avec}$$

$$\vec{u}(\vec{i} + 2\vec{j}) \text{ et } \vec{v}(\vec{i} + \vec{j}) \text{ et } A(0 ; 1).$$

1) Déterminer l'expression analytique de f .

2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

3) Soit $f(M) = M'$

a) Démontrer que $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe que l'on précisera.

b) En déduire les éléments caractéristiques de f .

4) Soit g l'application du plan complexe dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que : $z' = i\bar{z} + 2 - i$.

g est-elle une application affine ?

5) Calculer OM et O'M' avec $O' = g(O)$. En déduire que g est une isométrie.

6) Démontrer que g est un antidéplacement et donner ses éléments caractéristiques.

Activité 16

Le plan P est muni d'un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ et f est une application affine de P dans P qui, au point $M(x, y)$ associe le point M' tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(7x + y + 3) \\ y' = \frac{1}{3}(20x + 8y + 15) \end{cases}$$

1.) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M de P invariants par f .

2.) Soit M un point du plan P n'appartenant pas à (Δ) .

a) Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.

b) Vérifier que la droite (MM') n'est pas parallèle à (Δ) et que le point d'intersection H des droites (Δ) et (MM') a pour coordonnées :

$$\left(\frac{5x - y - 3}{9}; \frac{-20x + 4y - 15}{9} \right).$$

c) Ecrire $\overrightarrow{HM'}$ en fonction de $\overrightarrow{HM}$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

3.) On considère la suite de points $M_n(x_n; y_n)$ telle que : $M_0(1; 8)$ et $M_{n+1} = f(M_n)$

a) Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et de y_n .

b) Montrer par récurrence que tous les points $M_n(x_n; y_n)$ sont sur la droite $(\mathcal{D})$ dont une équation cartésienne est $5x - y + 3 = 0$.

En déduire que $x_{n+1} = 4x_n + 2$

c) Montrer que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels.

4.) Montrer que :

a) x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.

b) Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.

5.) Montrer que $x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$

En déduire que pour tout entier naturel n , $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3.

Activité 17

On considère un losange $ABCD$ et une application affine du plan (P) définie par : $f(A)=A$, $f(B)=D$ et $f(C)=D$.

1.a) Déterminer les images par f du point D , de la droite (AD) et du plan (P) .

b) Démontrer que $f \circ f$ est une application constante.

2) Soit g la symétrie orthogonale d'axe (AC) .

a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'application $g \circ f$.

b) En déduire la construction de l'image par f d'un point quelconque M de (P) .

Activité 18

A, B, C sont trois points non alignés et D le point tel que C soit le milieu de $[BD]$. Soit f l'application affine du plan définie par : $f(A)=A$, $f(B)=B$, $f(C)=B$. $\vec{n}$ est un vecteur de l'ensemble vectoriel $\mathcal{V}$ et g l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{AM'} = 2\vec{n}(\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}) - \overrightarrow{AM}.$$

$\mathcal{V}$ est muni d'une base orthonormée $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$

telle que $\vec{e}_1 = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$.

1) Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

2) En déduire qu'il existe un point G de la droite (BC) , invariant par f et exprimer $\overrightarrow{GB}$ en fonction de $\overrightarrow{GC}$.

3) Démontrer que f est une affinité dont on précisera les éléments caractéristiques.

4) Donner l'expression analytique de g en fonction de $\|\vec{n}\|$ dans le repère $(A; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$. En déduire que g est une application affine.

5) Démontrer que g est bijective si et seulement si $\|\vec{n}\| \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

6) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f dans chacun des cas suivants :

a) $\|\vec{n}\| = 0$; b) $\|\vec{n}\| = 1$.

Activité 19

Soit h l'application affine telle que $h \circ h = \text{Id}_p$ (identité du plan) et g l'application affine du plan d'expression analytique :

$$\begin{cases} 5y = 2x - x' + 2 \\ x = 2y + y' \end{cases}.$$

Pour tout point M du plan, on désigne par G , H et K les points tels que : $g(M)=G$; $g(G)=H$ et $g(H)=K$.

1) Démontrer que h est bijective.

2) Soit A un point du plan et N le milieu de $[Af(A)]$. Démontrer que N est invariant par h .

3) Soit (E) l'ensemble des points invariants par h .

a) Justifier que (E) n'est pas vide.

b) Démontrer que si (E) est un singleton, alors h est une symétrie centrale.

4. a) Démontrer que l'image par g d'une droite (Δ) est une droite (Δ') non parallèle à (Δ) .

b) En déduire que pour tout point M du plan, les points M , G et H , lorsqu'ils sont distincts forment un triangle.

5) Préciser la nature des applications $g \circ g$ et $g \circ g \circ g$.

6) Démontrer que l'isobarycentre R des points M , G , H et K est indépendant du point M et en déduire que R est le seul point invariant par g .

Séquence 3 : Coniques

(Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Les questions des activités proposées ne sont pas forcément liées. L'objectif est essentiellement d'amener l'élève à savoir faire ce qu'il faut.)

I. Etude générale des coniques

Activité 1

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

1) On considère les points $A(1; 0)$ et $A'(-1; 0)$

a) Définir analytiquement l'ensemble (Γ) des points M du plan qui vérifient :

$$d(M; A) + d(M; A') = 4.$$

b) Montrer que (Γ) est une conique.

2) Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de la parabole (P) de foyer F , de directrice (D) et de sommet S dans un repère convenablement choisi.

$$\text{a) } d(F; (D)) = 2016 ; \text{ b) } d(F; (D)) = \frac{17}{4}$$

$$\text{c) } d(S; (D)) = \sqrt{2}$$

3) Soit Γ la conique de foyer F , de directrice (D) et d'excentricité e .

Construire les sommets A et A' de F puis déterminer son équation réduite dans un repère convenablement choisi.

a) $d(F ; (D))=3$ et $e=2^{-1}$

b) $d(F ; (D))=3$ et $e=2$.

Partie B

1) Déterminer une équation de la parabole de foyer F et de directrice (D) dans chacun des cas suivants :

a) $F(-1 ; 2)$ et $(D) : x = 1$.

b) $F(1 ; 1)$ et $(D) : y = -4$.

2) Déterminer, dans chacun des cas suivants une équation de la conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e.

a) $F(1 ; -2)$; $(D) : y = 1$ et $e = \frac{1}{2}$

b) $F(2 ; 1)$; $(D) : x + 1 = 0$ et $e = 2$

c) $F(1 ; \ln 1)$; $(D) : x - 5 = 0$ et $e = \frac{1}{3}$

6) Déterminer le foyer et la directrice de la parabole (P) dans chacun des cas suivants dans le repère $(S ; \vec{i}, \vec{j})$ puis dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ où S désigne le sommet de la parabole.

a) $2y^2 = 8x + \sqrt{2}$; b) $x^2 + 4x = -4y$

c) $\frac{x^2}{2} + 2 = x + y$

Activité 2

1) Dans chacun des cas suivants, préciser la nature et les éléments caractéristiques (centre, axe focal, sommets, foyers, directrices et excentricité) de la conique (Γ) d'équation :

a) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$; b) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$

c) $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$; d) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$

2) Dans chacun des cas suivants, démontrer que (E) est une équation d'une conique à centre dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques dans le repère $(S ; \vec{i}, \vec{j})$ puis dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ où S est le centre de la conique.

a) (E) : $x^2 + 2y^2 = 2x + 3$

b) (E) : $y^2 + 6x + 4 = 4y - 3x^2$

c) (E) : $-2x^2 + y^2 + 4y = -12$

d) (E) : $-x^2 + y^2 + 6x + 2y - 16 = 0$

3) Déterminer suivant les valeurs du nombre réel m, la nature de l'ensemble (Γ_m) d'équations :

a) $y^2 + 4y - (m - 2)x + m - 1 = 0$

b) $(m + 2)x^2 + m^2y^2 + 2(m + 2)x = (m + 2)(m^2 - 1)$

II. Etude de la parabole

Activité 3

1.a) Tracer la parabole d'équation $\frac{y^2}{10} - x = 0$ puis préciser le régionnement de l'ensemble des points M du plan tels que :

$$10x - y^2 < 0.$$

b) Déterminer une équation de la tangente aux points de (P) d'abscisse 1.

2.a) Tracer la parabole d'équation $(\frac{y}{2\sqrt{2}})^2 = x$ puis déterminer le point K de (P) où la tangente est parallèle à la droite d'équation : $y = -\frac{2}{3}x + 1$.

b) Déterminer une équation de cette tangente.

3) Déterminer le sommet, l'axe focal et le foyer des paraboles d'équations :

a) $\frac{3}{4}x^2 - y + 1 = 0$.

b) $2y^2 = 4y + x - 3$

4.a) Déterminer les tangentes passant par le point A(2 ;9) de la parabole (P) d'équation :

$$\left(\frac{y}{6}\right)^2 - x = 0.$$

b) Préciser les coordonnées des points de contacts de ces tangentes avec (P).

5) Démontrer que le système

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ est une représentation}$$

paramétrique d'une partie de parabole que l'on précisera.

Activité 4

Partie A

Soit la parabole (P) la parabole d'équation :

$$y^2 + 9 = 4x - 2y$$

1.a) Préciser les éléments caractéristiques de (P).

b) Tracer (P) et son image (P_O) par la symétrie orthogonale d'axe l'axe des abscisses.

2) Déterminer l'image de (P) par la rotation de centre K(1 ;2) et d'angle de rotation $\frac{\pi}{2}$.

3) Déterminer l'image de (P) par la symétrie orthogonale d'axe $2x - y + 1 = 0$.

4) Préciser l'image de (P) par la réflexion plane d'axe la 2^{ème} bissectrice puis construire là dans le même repère.

5) Explicite la réciproque de de (P) puis construire là dans le même repère.

Partie B

On désigne par (D) la droite d'équation $x + y = 4$ et par (T) la parabole de foyer O et de directrice (D).

1) Déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole (T).

2) Etablir une équation cartésienne de (T) dans le repère (O ; $\vec{i}, \vec{j}$).

3) Démontrer que $R=(S, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est un repère orthonormé. On donne $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} - \vec{j})$.

4) Donner dans R une équation cartésienne de (T).

III. Etude de l'ellipse

Activité 5

1) Déterminer les éléments caractéristiques de l'ellipse (E) d'équation :

a) $(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 - 4 = 0$.

b) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

2.a) Tracer l'ellipse (E) d'équation :

$$\frac{x^2}{25} + \frac{4y^2}{25} = 1.$$

b) Déterminer une équation des tangentes à (E) aux points d'abscisse 4.

c) Déterminer une équation des tangentes à (E) ayant pour coefficient directeur $\frac{\int_0^{\sqrt{3}} 2x dx}{\alpha}$ où α est un entier naturel décimal tel que $C_\alpha^2 \equiv 0[28]$.

3) Déterminer une représentation paramétrique de l'ellipse (E) d'équation :

$$4x^2 + y^2 - 8x + 6y = 3.$$

4) Déterminer une équation de l'ellipse dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -2 + 4\cos\varphi \\ y = 1 + 2\sqrt{2}\sin\varphi \end{cases} (\varphi \in \mathbb{R}).$$

5) Soit F et F' deux points du plan tels que : $FF' = 6$. Déterminer dans un repère convenablement choisi l'équation réduite de l'ellipse définie par : $MF + MF' = 8$.

6) Donner la définition bifocale de l'ellipse (E) dans chacun des cas suivants :

a) $x^2 + 2y^2 = 4$; b) $3x^2 + y^2 = 2$.

Activité 6

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on note (E) l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

$$x^2 + 4y^2 - 2|x| - 3 = 0.$$

1.a) Prouver que (E) est la réunion d'arcs d'ellipse.

b) Donner les éléments caractéristiques de (E).

c) Préciser les axes de symétrie, les points où les tangentes sont parallèles aux axes et les demi-tangentes aux points d'abscisse nulle.

d) Construire (E).

2) Donner l'image de (E) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

3) Déterminer l'image de (E) par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation :

$$2x - y + 1 = 0.$$

4) Déterminer l'image de (E) par l'affinité orthogonale d'axe la première bissectrice et de rapport $k=2$.

IV. Etude de l'hyperbole.

Activité 7

1.) Donner les éléments caractéristiques des hyperboles d'équations :

a) $(x - 1)^2 - 4(y + 2) = 4$.

b) $-\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

2.a) Tracer l'hyperbole d'équation :

$$\frac{1}{2}x^2 = y^2 + 1.$$

b) Déterminer une équation des tangentes à (H) aux points de (H) d'abscisse $2\sqrt{2}$

c) Déterminer une équation des tangentes à (H) ayant pour coefficient directeur 1.

3) Déterminer, dans un repère convenablement choisi l'équation réduite de l'hyperbole définie par : $|MF - MF'| = 4\sqrt{5}$ avec $FF' = 12$ où F et F' sont deux points du plan.

4) Dans chacun des cas suivants, donner la définition bifocale de l'hyperbole (H) :

a) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ b) $-\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$

5) Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de l'hyperbole dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ tel que $\vec{e}_1(1; 1)$ et $\vec{e}_2(1; -1)$:

a) $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$; b) $x^2 - y^2 + 2x = 4y$

c) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 3x + y + 12 = 0$.

Activité 8

Le plan est muni du repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Soit les points $F(1 ; -1)$ et $F'(-1 ; 1)$. On donne $\vec{u}(\frac{1}{\sqrt{2}} ; -\frac{1}{\sqrt{2}})$ et $\vec{v}(\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{\sqrt{2}})$. On veut déterminer une équation de l'ensemble (R) et (R') des points M tels que : $MF + MF' = 4$ et $|MF - MF'| = 2$ puis étudier la courbe (c) qui a pour équation : $x^2 - 2x - 2y^2 + 4y - 3 = 0$. On désigne par (H) et (H') les hyperboles d'équations respectives : $x^2 = 3y^2 + 1 = 0$ et $3x^2 = y^2 - 1$.

On note (Γ) l'ensemble défini par :

$$\frac{y^4}{9} - 1 = x^4 - 2x^2$$

1.a) Dire pourquoi est-il difficile de déterminer directement les équations de (R) et de (R') dans le repère (O ; $\vec{i}, \vec{j}$) ?

b) Déterminer ces équations dans le repère (O ; $\vec{u}, \vec{v}$).

c) En déduire une équation de ces ensembles dans le repère (O ; $\vec{i}, \vec{j}$).

2 a) Préciser la nature de (c). Donner ses éléments caractéristiques et construire (c) dans le repère (O ; $\vec{i}, \vec{j}$).

b) Déterminer l'équation de la courbe (c') = f(c) où f est l'application affine d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = x - 2y + 2 \\ y' = x - y + 1 \end{cases}$$

c) Donner les éléments caractéristiques de (c') et construire (c') dans le même repère que (c).

3) Démontrer que (H') est l'image de (H) par :

a) la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice.

4) Démontrer que l'ensemble (Γ) est la réunion de deux coniques dont on déterminera la nature et les éléments caractéristiques.

Activité 9

Soit P un plan affine euclidien orienté admettant le repère orthonormé direct (O ; $\vec{i}, \vec{j}$), repère qui sera noté R.

1) On appelle f la fonction de variable réelle définie par : $f(x) = x\sqrt{3} + \sqrt{4x^2 - 1}$.

Soit (c) sa courbe représentative dans le plan rapporté à R.

a) Étudier les variations de la fonction f.

b) Démontrer que (c) admet deux asymptotes que l'on déterminera.

c) Étudier l'existence de tangentes à la courbe (c) aux points d'abscisses $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

d) Calculer l'abscisse du point d'intersection de (c) et de l'axe des abscisses puis construire la courbe (c).

2) Soit (c') la courbe symétrique de (c) par rapport à l'origine.

a) Déterminer une équation de (c') dans R et construire (c') sur le même graphique que (c).

b) Démontrer qu'une équation de la courbe : (H) = (c) ∪ (c') est :

$$y^2 - x^2 - 2\sqrt{3}xy + 1 = 0$$

3) Soit g la rotation affine du plan P, de centre O et dont une mesure de l'angle, exprimée en radian, est $\frac{\pi}{3}$.

Quelle est l'expression analytique de g ?

4.a) Déterminer une équation de (H'), image de (H) par la rotation g.

b) Quelle est la nature de (H') ? Préciser le centre, les asymptotes, les foyers de (H').

5.a) Soit (K) une hyperbole de foyers F₁ et F₂. Démontrer que l'image de (K) par une isométrie affine h est une hyperbole de foyers h(F₁) et h(F₂).

b) En déduire la nature de (H), les coordonnées de ses foyers. Placer ces points sur la figure de la question 2.

Activité 10 (BAC C – BENIN)

(P) désigne le plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct R = (O, $\vec{i}, \vec{j}$) (unité : 1 cm)

On considère la fonction numérique f_m définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f_m(x) = \sqrt{(|x^2 - 6x + 5|)} & \text{si } x \leq 3 \\ f_m(x) = (x - 3) - m \ln(x - 3) & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

m étant un paramètre réel.

On désigne par (Γ_1) et (C_m) les courbes représentatives respectives des restrictions de f_m à $] -\infty, 3]$ et à $]3, +\infty[$ dans le plan (P) .

Partie A

1. a) Démontrer que (Γ_1) est une portion de la réunion d'un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon et d'une hyperbole (H) dont on précisera le centre, les sommets et les asymptotes.
b) Construire la courbe (Γ_1) .
c) En déduire la valeur de $\int_1^3 f_m(x) dx$
2. Etudier suivant les valeurs de m les variations de f_m sur $]3, +\infty[$
3. a) Déterminer l'ensemble I des valeurs de m pour lesquelles la fonction f_m admet un minimum sur $]3, +\infty[$
b) Soit B_m le point de (C) ayant pour ordonnée le minimum de f_m .
Déterminer l'ensemble décrit par B_m lorsque m varie dans I .
4. a) Etudier suivant les valeurs de m , la position relative de (C_m) et de la droite (Δ) d'équation $y = x - 3$.
b) Construire la courbe (C_2) .
c) Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 4.
Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_2) la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 4$ et $x = \lambda$.

Partie B

On considère la rotation r du plan (P) de centre $J(3; 0)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

5) On pose : $(\Gamma) = \{M(x, y) \in C_2 | x \geq 5\}$.

Déterminer l'image (Γ) de (C'_2) par r .

6a) Démontrer qu'il existe une et une seule droite (Δ) passant par le point J , que l'on précisera, telle que l'on ait $r = S_{\Delta} \circ S_{\Delta}$ où S_{Δ} et $S_{\Delta'}$ désignent respectivement les symétries orthogonales de (P) par rapport à (Δ) et à (Δ')

b) En déduire une méthode géométrique pour la construction de la courbe (Γ)

c) Construire (Γ)

Activité 11

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer la nature et les éléments géométriques de l'application T du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = -iz + 2 + 2i$$

2.a) Soit H le milieu du segment $[MM']$.

Exprimer l'affixe de H en fonction de l'affixe z de M et de $\bar{z}$.

b) En déduire, toujours en fonction de z et de $\bar{z}$ la distance de M à H .

3) Préciser la nature et les éléments caractéristiques géométriques de l'ensemble (E) des points M du plan dont l'affixe z vérifie :

$$|z + 1 + i| = \frac{1}{2} |z + i\bar{z} - 2 - 2i|$$

4.a) Démontrer que l'ensemble des points M tels que $\bar{z} + z + 4$ est une droite (D) .

b) Démontrer que pour tout point M, la distance de M à (D) est : $\frac{1}{2} |\bar{z} + z + 4|$.

5) Démontrer que l'ensemble (E) des points M tels que : $\left| \frac{z-1-i}{\bar{z}+z+4} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ est une ellipse dont on précisera un foyer, une directrice et l'excentricité.

Activité 12

On désigne par (Δ) la droite d'équation $x - y - 1 = 0$ et on donne $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Soit S_1 la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et t la translation de vecteur $\vec{u}$.

1.a) Définir analytiquement S_1 et t .

b) Déterminer analytiquement les applications $g = S_1 \circ t$ et $h = t \circ S_1$.

c) Démontrer que g est une symétrie glissée et en déduire le vecteur $\vec{v}$ et la droite (D) qui caractérisent g .

2) Soit la courbe (c) d'équation :

$$x^2 + 9y^2 - 6x = 0.$$

a) Donner la nature de (c) et ses éléments caractéristiques.

b) Déterminer l'image (c') de (c) par g .

3.a) A partir de l'équation cartésienne du cercle de centre O et de rayon a ($a > 0$), trouver sans calcul la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

b) Calculer I à l'aide d'un changement de variable $x = a \cos \beta$, avec $0 \leq \beta \leq \pi$.

c) En déduire l'aire A du domaine du plan intérieur à l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

d) Donner alors l'aire A du domaine du plan intérieur de la courbe (c').

Activité 13

Le plan ($\mathcal{P}$) est muni d'un repère orthonormé direct ($O ; \vec{i}, \vec{j}$), (τ) désigne l'ensemble des points M ($x; y$) tel que : $x^2 - y^2 = 1$

1.a) Quelle est la nature exacte de (τ) ?

Donner ses éléments caractéristiques : centre, asymptote et sommets.

b) Représenter graphiquement (τ) dans ($\mathcal{P}$).

2) On désigne par (τ_1) la partie de (τ) formée des points qui ont une abscisse strictement positive.

a) Démontrer que si M($x; y$) appartient à (τ_1), alors $x \geq 1$.

b) Démontrer que si M($x; y$) appartient à (τ_1), alors on a :

$$x + \sqrt{x^2 - 1} > 0 \text{ et } x - \sqrt{x^2 - 1} > 0.$$

c) En déduire que si M($x; y$) appartient à (τ_1), alors $x + y > 0$ et $x - y > 0$.

d) Démontrer que si M($x; y$) appartient à (τ_1), alors il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x + y = e^t \\ x - y = e^{-t} \end{cases}$$

e) Inversement, démontrer que s'il existe un réel t tel que $\begin{cases} x + y = e^t \\ x - y = e^{-t} \end{cases}$ alors M($x; y$) appartient à (τ_1).

f) Déterminer alors une représentation paramétrique de (τ_1).

3.) Soit f la transformation du plan qui à tout point M($x; y$), associe le point M'($x'; y'$) tel que :

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

Donner l'écriture complexe de f , préciser sa nature exacte ainsi que ses éléments caractéristiques.

4.) On pose : (τ_2) = $f((\tau_1))$.

Déterminer une équation cartésienne de (τ_2) puis la représenter graphiquement dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Activité 14

Le plan P est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2cm. On considère l'application $\mathcal{F}$ du plan dans lui-même qui, à tout point M, d'affixe z , associe le point M' d'affixe $(2z - z^2)$.

On désire tracer la courbe (τ) décrite par M' lorsque M décrit le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1.

Soit t un réel de $[-\pi; \pi]$ et M le point de $(\mathcal{C})$ d'affixe $z = e^{it}$.

1.a) Démontrer que l'image M' de M par $\mathcal{F}$ est le point de coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$$

b) Pour $t \in [-\pi; \pi]$, comparer $x(-t)$ et $x(t)$ d'une part, $y(-t)$ et $y(t)$ d'autre part. En déduire que (τ) admet un axe de symétrie que l'on précisera.

Justifier ensuite que l'on peut étudier (τ) sur $[0; \pi]$.

c) Montrer que pour $t \in [-\pi; \pi]$, on a :

$$\begin{cases} x'(t) = 2\sin t(2\cos t - 1) \\ y'(t) = -2(\cos t - 1)(2\cos t + 1) \end{cases}$$

avec x' et y' les fonctions dérivées respectives de x et y .

d) En déduire le sens de variation des fonctions dérivées de x et de y sur $[0; \pi]$.

e) Donner le tableau de variation des fonctions x et y .

2.a) Démontrer que si t est différent de 0, alors la tangente à (τ) au point M' de paramètre t est dirigée par le vecteur de coordonnées :

$$\left(\cos \frac{3t}{2}; \sin \frac{3t}{2} \right)$$

(On pourra utiliser : $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$ et $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$);

b) Démontrer que $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à la tangente à (τ) en M'.

c) Déterminer et placer les points de (τ) sur $[-\pi; \pi]$ où la tangente est parallèle aux axes de coordonnées.

3.) Construire (τ) sur $[-\pi; \pi]$.

Séquence 4 : Similitudes planes

I Généralités sur les similitudes planes- Similitudes planes directes.

Activité 1

On considère les transformations planes f, g, h et i définies par :

$$f : z' = z + 1 - 2i$$

$$g : z' = (1 - i)z + 4i$$

$$h : z' = 3z - 2 - i$$

$$i : z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z + 5$$

1.a) Justifie que f , et i sont des déplacements.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f, g, h et i .

2) Caractériser les transformations $g \circ f, g \circ h, g^{-1}, (i \circ h)^{-1}$ et $i \circ g^{-1}$.

3) Soit t la translation de vecteur de translation $\vec{u}(1+3i)$, h l'homothétie de centre $I(-1; 2)$ et

de rapport $k=5$ et r la rotation de centre $J(3; 0)$ et d'angle de rotation $\frac{\pi}{6}$.

a) Donner l'écriture complexe de t , h et r .

b) Déterminer l'image de $A(0; 1)$ et l'antécédent de O par $f = h \circ r \circ h \circ t^{-1}$.

c) Caractériser f et en déduire l'écriture complexe des transformations qui le composent.

Activité 2

Soit f un déplacement de centre A qui transforme B en C avec $B(-6 + 5i)$, $C(-4 + i)$ et A est l'antécédent de $A'(-3 - 16\sqrt{5}; 2 - 12\sqrt{5})$ par la transformation $S : z' = 4i\sqrt{5}z + 2i - 3$. On considère la transformation plane g d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$$

1.a) Déterminer l'écriture complexe de f et donner sa nature et ses éléments caractéristiques.

b) Caractériser g à partir de son écriture complexe.

2) Déterminer l'image par g de la droite $(D) : 2x + y - 1 = 0$.

3) Déterminer l'image par g du cercle d'équation : $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

4) Soit $D(1 - i)$

a) Déterminer l'image D par g .

b) Donner l'image du quadrilatère $ABCD$ par f puis construire cette image dans un repère.

5.a) Donner l'écriture complexe et analytique de $f \circ g$ et de $g \circ f$.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $f \circ g$ et de $g \circ f$.

Activité 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 4cm. Soit α un nombre complexe non nul et différent de 1. On définit pour tout entier naturel n , la suite (z_n) de nombres complexes par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \alpha z_n + i \end{cases}$$

On note M_n le point d'affixe z_n .

1.) Vérifier les égalités :

$$z_1 = i; z_2 = (\alpha + 1)i;$$

$$z_3 = (\alpha^2 + \alpha + 1)i.$$

b) Démontrer que, pour tout entier n positif ou nul,

$$z_n = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} i.$$

2.a) Montrer que $z_4 = 0$.

b) Pour tout entier naturel n , exprimer z_{n+1} en fonction de z_n .

c) Montrer que M_{n+1} est l'image de M_n par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

d) Représenter les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

3.) Caractérisation de certaines suites (z_n) .

a) On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\alpha^k = 1$.

Démontrer que pour tout entier naturel n , on a l'égalité :

$$z_{n+k} = z_n.$$

b) Réciproquement, montrer que s'il existe un entier naturel k tel que, pour tout entier naturel n , on ait l'égalité $z_{n+k} = z_n$, alors :

$$\alpha^k = 1.$$

Activité 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 0,5cm. On note j le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$. Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1.) Placer les points A, B, C, A' et C' dans le repère donné.

2.) On appelle a' , b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C'.

a) Calculer a' . On vérifiera que a' est un nombre réel.

b) Montrer que $b' = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

En déduire que O est un point de la droite (BB').

c) On admet que $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$.

Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.

3.) On se propose désormais de montrer que la distance $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.

a) Calculer $OA + OB + OC$.

b) Montrer que $j^3 = 1$ et que

$$1 + j + j^2 = 0.$$

c) On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe.

Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} |(a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j| \\ = |a + bj^2 + cj| = 12. \end{aligned}$$

d) On admet que, quels que soient les nombres complexes z, z' et z'' :

$$|z + z' + z''| \leq |z| + |z'| + |z''|.$$

Montrer que $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.

Activité 5**Partie A**

On considère le système de congruences $(\mathcal{S})$ défini par :

$$\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 1[5] \end{cases}$$

où n désigne un entier relatif.

1.) Montrer que 11 est solution de $(\mathcal{S})$.

2.) Montrer que si n est solution de $(\mathcal{S})$, alors $n - 11$ est divisible par 3.

3.) Montrer que les solutions de $(\mathcal{S})$ sont tous les entiers de la forme $11 + 15k$ où k désigne un entier relatif.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z' et g celle qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z'' définies par :

$$z' = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) z \text{ et } z'' = e^{i\frac{\pi}{5}} z.$$

1.) Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g .

2.) On considère les points A_0 et B_0 d'affixes respectives :

$$a_0 = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} \text{ et } b_0 = 4e^{-i\frac{\pi}{5}}.$$

Soient (A_n) et (B_n) les suites de points définies par les relations de récurrences :

$$A_{n+1} = f(A_n) \text{ et } B_{n+1} = g(B_n).$$

On note a_n et b_n les affixes respectives de A_n et B_n .

a) Quelle est la nature de chacun des triangles OA_nA_{n+1} ?

b) En déduire la nature du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$.

3.a) Montrer que les points B_n sont situés sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b) Indiquer une mesure de l'angle

$$(\overrightarrow{OB_n}; \overrightarrow{OB_{n+2}}).$$

c) En déduire la nature du polygone

$$B_0B_2B_4B_6B_8.$$

4.a) Exprimer a_n et b_n en fonction de .

b) Montrer que les entiers n pour lesquels A_n et B_n sont simultanément sur l'axe des réels sont les solutions du système (S) de la Partie A.

II. Similitudes planes indirectes.

Activité 6

On considère les transformations planes f, g, h, i, j, k définies par :

$$f: z' = i\bar{z} + 1 - i$$

$$g: z' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\bar{z} + 3i$$

$$h: z' = (1 - i)\bar{z} + 2i$$

$$i: z' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - i\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\bar{z} + 3i - 1$$

$$j: z' = -3i\bar{z} + 1 - 2i$$

$$k: z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}\bar{z} + 2 + 3i$$

1.a) Identifier parmi ces transformations celles qui sont des antidéplacements.

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f, g, h, i, j et k .

2) Caractériser $f \circ g, g \circ f$ et $j \circ k \circ i$.

Activité 7

1.a) Déterminer l'écriture complexe de l'antidéplacement S laissant globalement invariant la droite $(\Delta): 2x - y + 1 = 0$.

b) Déterminer l'image de la conique d'équation $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$ par S .

2) ϕ désigne un antidéplacement d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + \sqrt{5}$ et de vecteur de

translation $\vec{u}\left(\frac{5}{2\sqrt{5}} - i\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ et ϕ' la similitude

plane indirecte de vecteur $\vec{v}\left(\frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{i(6-3\sqrt{2})}{4}\right)$ et

d'axe de repère $(A; \vec{v})$ avec $A\left(\frac{-3\sqrt{2}}{4}; \frac{12+3\sqrt{2}}{4}\right)$.

a) Déterminer l'écriture complexe de ϕ et ϕ' .

b) Donner l'image par ϕ' de l'ellipse

d'équation $(x+1)^2 + \frac{(y-2)^2}{3} = 1$.

3) T désigne la similitude plane indirecte de rapport $k = \sqrt{2}$ d'axe $(D): x + y(1 + \sqrt{2}) - 2 = 0$ et qui laisse invariant le point $I(2; 0)$.

a) Donner l'écriture complexe de T .

b) Déterminer l'image de la droite (D') :

$y - 2x - 5 = 0$ puis du cercle (c) de centre $I(1; -3)$ et de rayon $r=2$ par T .

Activité 8

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

$(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soient A, B et C les points d'affixes respectives :

$$Z_A = 2+i, Z_B = 5+2i \text{ et } Z_C = i$$

(S_1) désigne la symétrie d'axe (AB) .

1.a. Démontrer que (S_1) transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right)\bar{z} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right).$$

b. En déduire l'affixe de C' , symétrique de C par rapport à (AB) .

c. Démontrer que l'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est la droite (D)

d'équation $4x + 3y = 1$ privée du couple $(-5; 7)$.

d. Vérifier que le point C' appartient à (D) .

2. a. Démontrer que les droites (D) et (AB) sont sécantes en un point P dont on précisera l'afixe ω .
- b. On désigne par s_2 la symétrie d'axe (D) et par f la transformation définie par $f = s_2 \circ s_1$. Justifier que f est une similitude plane directe et préciser son rapport.
- c. Déterminer les images des points C et P par la transformation f .
- d. Justifier que f est une rotation dont on donnera le centre.

Activité 9

Le plan complexe est rapporté à un repère ortho normal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère l'application f qui au point M d'afixe z fait correspondre le point M' d'afixe z' tel que :

$$z' = \frac{3+4i}{5} \bar{z} + \frac{1-2i}{5}$$

1. On note x et x' , y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z' .

Démontrer que :
$$\begin{cases} x' = \frac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \frac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$$

2. a. Déterminer l'ensemble des points invariants par f .
- b. Quelle est la nature de l'application f ?
3. Déterminer l'ensemble (D) des points M d'afixe z tels que z' soit réel.
4. On cherche à déterminer les points de (D) dont les coordonnées sont entières.
- a. Donner une solution particulière $(x_0; y_0)$ appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$.
- b. Déterminer l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$.
5. On considère les points M d'afixe $z = x + iy$ tels que $x = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point M' = $f(M)$ a pour affixe z' .
Déterminer les entiers y tels que $\text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z')$ soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5)

Activité 10

Le plan complexe P est rapporté au repère ortho normal direct

$(O; \vec{u}; \vec{v})$. Cet exercice propose l'étude de l'ensemble

(C) des points M du plan dont les affixes vérifient :

$$|(1+i)z - 3+3i|^2 + |z - 6|^2 = 54.$$

1. Première méthode

- a. En posant $z = x + iy$, donner une équation cartésienne de (C).
- b. En déduire la nature de (C).
- c. Construire (C).

2. Deuxième méthode

On désigne par s la similitude qui, au point M d'afixe z , associe le point $M_1 = s(M)$ d'afixe $z_1 = (1+i)z - 3+3i$

et on désigne par t la translation qui, au point M d'afixe z , associe le point $M_2 = t(M)$ d'afixe $z_2 = z - 6$.

- a. Caractériser géométriquement ces deux transformations.
- b. Déterminer les antécédents respectifs S et T de O par s et t .

c. Calculer le rapport $\frac{SM}{OM_1}$ puis le rapport $\frac{TM}{OM_2}$

d. En déduire que (C) est la ligne de niveau définie par :

$$2SM^2 + TM^2 = 54.$$

- e. Calculer l'afixe du barycentre G du système $\{(S, 2), (T, 1)\}$.
- f. Montrer que l'ensemble (C) est défini par $MG^2 = 8$.
- g. En déduire la nature et les éléments qui déterminent (C).

Activité 11

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A et B dans ce plan d'affixes respectives $a = 1 + i$; $b = -4 - i$.

Soit f la transformation du plan (P) qui a tout point M d'afixe z associe le point M' d'afixe z' tel que :

$$\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}.$$

- 1.a) Exprimer z' en fonction de z .

b.) Montrer que f admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe. En déduire que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

2.) On se place dans le cas où les coordonnées x et y de M sont des entiers naturels avec $1 \leq x \leq 8$ et $1 \leq y \leq 8$. Les coordonnées $(x' ; y')$ de M' sont alors : $x' = 3x + 2$ et $y' = 3y - 1$.

a.) On appelle G et H les ensembles des valeurs prises respectivement par x' et y' .
Ecrire la liste des éléments de G et H .

b.) Montrer que $x' - y'$ est un multiple de l'entier 3.

c.) Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité.

d.) On se propose de déterminer tous les couples $(x' ; y')$ de $G \times H$ tels que $m = x'^2 - y'^2$ soit un multiple non nul de 60.

Montrer que dans ces conditions, le nombre $x' - y'$ est un multiple de 60. Le nombre $x' - y'$ peut-il être un multiple de 30 ?

e.) En déduire que, si $x'^2 - y'^2$ est un multiple non nul de 60, $x' + y'$ est multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples $(x' ; y')$ qui conviennent.

En déduire les couples $(x ; y)$ correspondant aux couples $(x' ; y')$ trouvés.

Activité 12

1.) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \bar{z}.$$

a) Exprimer $(f \circ f)(z)$ en fonction de z .

b) Montrer que $f = R \circ S$ où R est une rotation et S une symétrie axiale. (On

déterminera les éléments caractéristiques de ces deux applications, R et S).

c) Décomposer R à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que f est une réflexion dont on donnera l'axe (D_1) . Réaliser une figure, en y représentant l'axe (D_1) (unité graphique 2 cm).

2.) On considère l'application g qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M'' d'affixe z'' telle que :

$$z'' = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \bar{z} - \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

a) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble des points invariants de g .

b) Montrer que $g = t \circ f$ où t est une translation (on précisera l'affixe du vecteur de translation).

c) Décomposer la translation t à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que g est une réflexion, d'axe noté (D_2) .

d) Quelle est l'image par g du point A d'affixe $\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$? En déduire une construction de la droite (D_2) (on n'utilisera pas l'équation de (D_2)).

P

artie III :

Enoncés des épreuves des Collèges et Lycées, des Examens Blancs départementaux, des tests APMB et des anciens sujets de Baccalauréat série C de 2002 à 2016.

Situation d'évaluation n°1 (Devoir Collège Père Aupiais)

Le soir, au coucher du soleil, alors que les troupeaux regagnaient leurs enclos, Waliou rendait visite aux bergers. Leur agglomération composée de quelques huttes, était située bien loin du village. Les huttes ne servaient d'abri que pendant l'hivernage. Le reste de l'année, ils dormaient à la belle étoile.

Tache : Tu es invité(e) à résoudre les trois problèmes suivants.

Problème 1

Waliou est un élève de la classe de terminale C. Impressionné par les diverses formes géométriques des huttes dans cette agglomération, il s'intéresse particulièrement à la hutte ayant la forme d'une pyramide SABCD de sommet S telle que SAC et SBD sont des triangles rectangles isocèles en S. Pour étudier cette hutte, Waliou désigne par O le centre de la base ABCD et suppose que $AB=a$ ($a \in \mathbb{R}^*_+$). I et J sont les milieux respectifs des segments [BC] et [SA]. α et β sont des réels non nuls.

- 1- Il suppose que : $\alpha - \beta = 0$. Déterminer l'ensemble (E_1) des points M de l'espace tels que : $\alpha \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = \beta \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MS}$.
- 2- Il suppose que : $\alpha - \beta \neq 0$, et il désigne par G le barycentre des points pondérés (I, α) et (J, β).
 - a- Calculer IJ^2 , GI^2 et GJ^2 en fonction de a, α et β .
 - b- Déterminer l'ensemble (E_2) des points M de l'espace tels que $\alpha(\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}) = \beta(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MS})$.
- 3- Waliou décide d'orienter l'espace. ABCD est dans le sens direct.
 - a- Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{OS}$.
 - b- Déterminer l'ensemble (E_3) des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$
- 4- L'espace étant rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, soit $E(1 ; 1 ; 1)$ et l'application f de l'espace dans l'espace, qui à tout point $M(x ; y ; z)$ de l'espace associe le point $M'(x' ; y' ; z')$ tels que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OE}$.
 - a- Déterminer l'ensemble F des points invariants par f.
 - b- Donner l'expression analytique de f.
 - c- Waliou considère les points $H(0 ; 0 ; -2)$ et $K(0 ; 1 ; -1)$
 - Démontrer qu'il existe un et un seul demi-tour, noté g, tel que $g(O) = H$ et $g(K) = K$
 - Déterminer l'expression analytique de g.
 - d- Soit l'application h par laquelle $M(x ; y ; z)$ a pour image $M'(x' ; y' ; z')$ tel que :

$$\begin{cases} 3x' = -x + 2y + 2z + 3 \\ 3y' = 2x - y + 2z - 3 \\ 3z' = 2x + 2y - z - 3 \end{cases}$$
 - Déterminer l'ensemble des points invariants par h.
 - Démontrer que h est la composée commutative d'un demi-tour et d'une translation t que l'on précisera.

Problème 2:

Dans cette agglomération, Waliou a compté quatre enclos et sur chaque porte d'enclos, est inscrite l'une ou l'autre des inscriptions suivantes : $a = 11n + 3$; $b = 13n - 1$; $c = \overline{2310}^n$; $d = \overline{252}^n$; n étant un entier naturel. Waliou se rapproche des bergers pour mieux comprendre les significations de ces

écritures sur les portes des enclos des troupeaux dans cette agglomération. Surpris par les explications des bergers, il se propose d'étudier ces différents nombres. Il pose $S = \text{pgcd}(c, d)$.

- 5- Démontrer que tout diviseur de a et b est diviseur de 50.
- 6- Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation $50x - 11y = 3$.
- 7- Démontrer que $(2n + 1)$ divise c et d .
- 8- Démontrer que $S = 2(2n + 1)$ si n est un entier pair et que $S = 2n + 1$ si n est un entier impair.

Problème 3 :

En réalité, Waliou a rendu visite aux bergers dans le but de connaître le prix de vente d'un bœuf. Ce prix de vente est un réel noté $k(x)$ (exprimé en milliers de francs CFA) où k est une fonction à variable réelle, l'âge x (exprimé en mois) du bœuf. $k(x) = x^4 - 2x^2 \cos 2\theta + 1$; $\theta \in \mathbb{R}$. Waliou cherche à mettre $k(x)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré en x . Pour cela il considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation d'inconnue z suivante (R) : $z^4 - 2z^2 \cos 2\theta + 1 = 0$.

- 9- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (R). On mettra les solutions sous la forme trigonométrique.
- 10- En déduire l'écriture de $k(x)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré en x .

Situation d'évaluation n°2

L'entrepreneur Gbadagba est choisi par le conseil communal de Zoungbo pour réaliser le plan de construction d'un bâtiment sur un domaine (P) d'équation cartésienne : $x+y+z+1=0$. Devant ce domaine se trouve un lampadaire défini par une droite (Δ) à l'intersection de deux voies définies respectivement l'une par une droite (Δ_1) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -2t + 1 \\ z = -2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

et l'autre par une droite (Δ_2) de système d'équations cartésiennes : $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-4}$

Sur le plan de construction de ce bâtiment, la droite (Δ) représente la perpendiculaire commune aux droites (Δ_1) et (Δ_2) en un point I, et le bâtiment en dalle est définie par un plan (Q). L'entrepreneur Gbadagba désire connaître la hauteur H comprise entre 6 et 8 de cette dalle (Q), le nombre N d'ouvriers sur le chantier et les positions des trois signaux A, B et C de surveillance.

Tâche : Aider l'entrepreneur Gbadagba en résolvant les trois problèmes suivants ; l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

Problème 1

ABC est un triangle équilatéral tel que ; $AB=a$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$) .

I est le milieu du segment [BC], m étant un paramètre réel non nul, le point G, s'il existe, est le barycentre des pondérés (A, m), (B, -1), (C, -1) et γ désignent respectivement la fonction vectorielle de

Leibniz et la fonction scalaire de Leibniz associées à ces points pondérés. (E_m) désigne l'ensemble des points M de l'espace tels que : $mMB^2 - MB^2 - MC^2 = a^2$.

1. Déterminer $f(I)$.
2. Calculer $\gamma(I)$ et $\gamma(G)$.
3. Déterminer la nature de (E_m) suivant les valeurs de m .

Problème 2

4. Déterminer l'expression analytique de la réflexion S_p de plan (P)
5. Déterminer un vecteur $\vec{\omega}$ de la droite (Δ)
6. a) Déterminer la nature et un élément caractéristique de la composée $S_{\Delta_1} \circ S_{\Delta_2}$
b) En déduire l'expression analytique de la composée $S_{\Delta_1} \circ S_{\Delta_2}$
7. Le plan (Q) est tel que $S_p \circ S_Q = t_{\vec{\omega}}$
 - a) Calculer la hauteur H
 - b) Déterminer l'expression analytique de la réflexion S_Q de plan (Q)
 - c) En déduire une équation cartésienne du plan (Q)

Problème 3

8. Le nombre $N = \overline{aa}^8$ en base 8, tel que 1 est le reste de la division euclidienne de a par 3 et 2 est le reste de la division euclidienne de a par 5.
 - a) Déterminer le chiffre a .
 - b) Déterminer alors le nombre N dans le système décimal.
9. Les signaux A, B, C sont des points d'affixes respectives z_0, z_1, z_2 solutions dans l'ensemble des nombres complexes de l'équation : $z^3 + i = 0$.
 - a) Déterminer z_0 sachant que z_0 est une solution imaginaire pure.
 - b) Déterminer z_1 et z_2 sachant que $\text{Re}(z_1) > \text{Re}(z_2)$.
 - c) Ecrire z_1 et z_2 sous la forme exponentielle.

Situation d'évaluation n°3

Texte : Construction d'un centre de formation d'ingénieurs agronomes.

Le gouvernement du Bénin décide de construire un centre de formation d'ingénieurs agronomes. Il est nécessaire de forer un puits pour l'approvisionnement en eau du centre. Le technicien chargé de faire le plan des travaux prévoit que le bord (margelle) du puits sera à carré ABCD de centre O tel que $OA = 1$. Le puits sera protégé par un barbelé représenté par l'ensemble (Γ) des points M de l'espace orienté (ε) tel que : $MA^2 - 2MB^2 + MC^2 - 2MD^2 = -4$. Pour garantir la fraîcheur de l'eau une bâche de sommet recouvrira le puits tel que $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \vec{OS}$. Pour ses calculs, le technicien utilise deux demi-tours d_1 et d_2 d'axes respectifs (OA) et (OB) . Il considère également l'application t de (ε) dans (ε) qui à tout point M associe le point M' tel que :

$\vec{BM} = (\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}) \wedge \vec{BC} + \vec{BM}$. Le directeur de ce centre voyant ces informations dans les documents du technicien se pose beaucoup de questions.

Tache : tu traiteras les trois problèmes ci-après afin de te rendre compte des concepts mathématiques que cachent les informations du texte.

Problème 1

- Démontrer que O est le barycentre des points pondérés (A,1) ; (B,-2) ; (C,1) ; (D,-2).
- Détermine l'ensemble (Γ) .
- Précise la nature de d_1od_2 .
 - Détermine l'image de (Γ) par d_1od_2 .
 - justifie que $(A, \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OS}; \overrightarrow{OA})$ est un repère orthonormé direct de (ε) .
- Démontrer que l'application t est une translation dont le vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{OS}$.
 - Détermine dans le repère $(A, \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OS}; \overrightarrow{OA})$ une équation cartésienne de l'image par t du plan (OAB).

Problème 2

Le directeur du centre demande au technicien de modifier le bord du puits de manière qu'il devienne un hexagone. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, les affixes des sommets (assimilés à des points) de l'hexagone sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E_1) : $z^6 + 4z^3 + 8 = 0$. Les points A et B ont pour affixes respectives 1 et $-2i$. Le grand domaine (D) sur lequel le centre est installé est délimité par l'ensemble (C) des points M d'affixe z tels que $(z + 2i)(\bar{z} - 2i) = 4$. La voie allant de la ville au centre est contenue dans l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que : $(2 + i)z + (2 - i)\bar{z} = 4$.

Partie A

- Détermine les ensembles (Δ) et (C).
 - Construis (Δ) et (C) dans le repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
 - Calculer l'aire de la surface du domaine (D) en m^2 sachant que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 10m$.
- Montre que $1 + i$ et $1 - i$ sont solutions de l'équation (E_1) .
- Résous l'équation (E_2) : $z^3 - 1 = 0$ et écris ses solutions sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
- Montre que t est solution de (E_1) et si q est solution de (E_2) alors $t \times q$ est solution de (E_1)
 - En déduis sous forme algébrique et trigonométrique les affixes des sommets de l'hexagone représentant le bord du puits.

Partie B

Pour déterminer la mesure d'un certain angle dans ses calculs, le technicien considère l'application f qui à tout point M d'affixe z différent de $-2i$ associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{\bar{z} + 4i}{\bar{z} - 2i}$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z.

- Vérifie que $z' - 1 = \frac{6i}{\bar{z} - 2i}$.
 - Déduis-en que $BM \times AM' = 6$ puis trouve une mesure de l'angle orienté $(\widehat{BM; AM})$.

Problème 3

Le premier concours de recrutement des élèves ingénieurs agronomes a été lancé. Le sujet de mathématiques de ce concours est le suivant que tu traiteras :

10. Résous dans $\mathbb{Z}/_7\mathbb{Z}$ l'équation : $3x^2 + 6x + 5 = 0$.
11. Un entier naturel A s'écrit $\overline{361}$ dans le système de numération de base b et a pour reste dans la division Euclidienne par 7.
 - a) Démontre que $3b^2 + 6b - 2 \equiv 0[7]$.
 - b) En déduis l'ensemble E des valeurs de b.
12. On suppose dans cette question que $b = 8$.
 - a) Vérifier que b appartient à E.
 - b) Donner l'écriture décimale de A.
 - c) Démontre que A est un nombre premier.
13. Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue (x; y) suivant : $x^2 + 6x = y^2 + 232$.

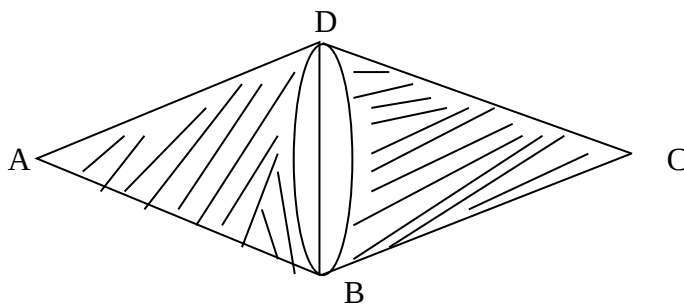
Situation d'évaluation n°4

Texte : Construction d'une piscine

Foogan, un opérateur économique, a une parcelle en forme de losange sur laquelle il envisage de construire une piscine moderne. A cet effet, il sollicite l'aide de l'ingénieur Avakpo. Ce dernier se lance le défi de construire cette piscine de manière que l'ensemble des points de la paroi soit globalement invariant par l'application f de l'espace dans l'espace dont l'expression analytique dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ convenablement choisi est :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x - 2y - 2z + 6) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2z - 6) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x - y - z + 12) \end{cases}$$

Après quelques jours d'études, Avakpo présente à Foogan les résultats de ses travaux. Il représente dans le plan (P) limité par l'arc (7) et son symétrique par rapport à (BD). Avakpo a également prévu le pavage du reste de la parcelle (partie hachurée). Voir figure ci-dessous.



Après les applications de Avakpo, Foogan se demande :

Quelle est la quantité d'eau à utiliser par trimestre et quelle est l'aire de la surface à paver ?

Tache : Tu vas aider Foogan à trouver des réponses à ses questions. Pour cela tu vas résoudre les trois problèmes suivants.

Problème 1

L'espace est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Démontre que $f \circ f$ est l'application identique de l'espace.
2. Démontre que l'ensemble (Δ) des points invariants par f est une droite dont tu donneras un repère.
3. Soit M un point de l'espace n'appartenant pas à (Δ) et M' son image par f .
 - a) Démontre que le milieu du segment $[MM']$ appartient à (Δ) .
 - b) Démontre que la droite (MM') est perpendiculaire à la droite (Δ) .
 - c) Dédus des questions précédentes que f est un demi-tour dont on précisera l'axe.

Problème 2

Le nombre de litre d'eau à utiliser par trimestre est un entier naturel N divisible par 495 et qui s'écrit $\overline{10\alpha 009\beta}$ en base 10, α et β sont des entiers naturels non nuls.

4. Résous dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ l'équation $-9x = 2$.

Dédus-en tous les couples $(p; q)$ d'entiers relatifs tels que $11p - 9q = 2$.

5. Détermine l'ensemble des nombres entiers relatifs X qui vérifient $\begin{cases} X \equiv -1[9] \\ X \equiv -3[11] \end{cases}$.

6. a) Démontre que $(\alpha + \beta) \equiv 8[99]$.

b) Détermine α et β .

c) Ecris N en base 16.

Problème 3

Le plan (P) est muni du repère orthonormé direct (AIJ) .

Partie A

Le point D a pour affixe $\sqrt{2} + i(\sqrt{2} + 2)$. On désigne par F le point d'affixe $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et par H le point d'affixe $2i$.

7. a) Vérifie que $2i$ est une solution de l'équation $(E) : iz^3 + 2z^2 - 2z + 4i = 0$ d'inconnue le nombre complexe z .

b) Détermine les nombres complexes a , b et c tels que pour tout nombre complexe z ,

$$iz^3 + 2z^2 - 2z + 4i = (z - 2i)(az^2 + bz + c).$$

c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

8. a) Détermine la distance AF puis donne une mesure de l'angle $(\widehat{AI; AF})$.

b) justifie que le quadrilatère $AFDH$ est un losange.

c) Construis :

- Le point H puis les points F et D en utilisant les questions 8.a) et 8.b).
- Les point B et C sachant que B appartient à la demi-droite $[AI)$.

9. a) Justifie que $\text{mes}(\widehat{AI; AD}) = \frac{3\pi}{8}$.

b) Ecris l'affixe du point D sous forme trigonométrie.

$$\text{Déduis-en que } \cos \frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} \text{ et } \sin \frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}.$$

10. Justifie que $\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\right)^{2012}$ est un nombre imaginaire pur.

Partie B

L'unité de longueur est le décimètre.

Soit D' le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (D ; -1).

(φ) est une partie de l'ensemble (C) des points M du plan (P) tels que

$$(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{MD'} = 0.$$

11. Exprime D comme barycentre des points A, B et C.

12. Démontre que (C) est le cercle de centre A et de rayon AD.

13. Calculer l'aire de la surface à paver en m^3 .

Situation d'évaluation n°5

Contexte : Les merveilles d'une sortie pédagogique

Le complexe cimentier wanru est l'un des dernières industries de fabrication du ciment de la cité de Dunian. En visite dans ce complexe, Claire l'une des meilleurs élèves de la classe de terminale scientifique du collège VISA, de la cité de Dunian, est passionnée par le mouvement d'une pièce métallique d'épaisseur négligeable ayant la forme d'un quadrilatère ABCD et fixée à une potence, sur une grande plaque plane telles que les plans supports de la pièce et de la plaque soient constamment supposés confondus. Pendant le mouvement non uniforme de cette pièce sur la plaque, M est un point stratégique de la plaque qui décrit la courbe de la fonction f définie par :

$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} - 1$. Cette courbe est visualisée par l'écran d'un ordinateur, ce qui permet au directeur d'apprécier l'évolution du traitement des matières premières. Le plan de la plaque est assimilable au plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) ; les affixes respectifs des points A,B,C et D sont les racines du polynôme $\varphi(z)=z^4+2z^3+2z^2-2z+1$, de l'une des photos par propriétés du point stratégique M de la courbe visualisée, de la fonction f et de retrouver les affixes des points A,B,C et D dans le plan complexe support de sa photo.

Tâche : tu vas te substituer à Claire en résolvant les trois problèmes ci-dessous.

Problème 1

Dans le plan complexe muni du repère (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) , M est le point d'affixe $z=x+iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, le point I d'affixe i ; le point j d'affixe -3i et le point M' d'affixe $z'=x+3iy$

- 1) Quelle condition doit vérifier z pour que l'on ait $M \neq I$ et $M' \neq J$
- 2) Sous cette condition démontrer que (IM)//JM' si et seulement si $\frac{z-i}{z'+3i} \in \mathbb{R}^*$

- 3) a) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $\frac{z-i}{z'+3i} \in \mathbb{R}^*$
 b) Déduis-en l'ensemble (E) des points M tels que $(IM) \parallel (JM')$.
 4) Déterminer l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que J, M et le point d'affixe iz soient alignés.

Problème 2

Pour déterminer les racines du polynôme $\varphi(z)$, Claire souhaite l'écrire comme produit de deux facteurs du second degré à variable z dans $\mathbb{C}$.

- 5) a) Déterminer les entiers naturels a et b tels que :

$$\varphi(z) = z^2 \left[\left(z - \frac{1}{z} \right)^2 + a \left(z - \frac{1}{z} \right) + b \right] \text{ et } z \text{ non nul.}$$

b) En posant $u = z - \frac{1}{z}$, justifie que l'équation $\varphi(z) = 0$ équivaut à $u^2 + au + b = 0$ et que u et $\bar{u}$ sont solutions de $u^2 + au + b = 0$ dans $\mathbb{C}$.

c) Dédire que $\varphi(z) = (z^2 - uz - 1)(z^2 - \bar{u}z + 4)$.

- 6) On pose $a=2$ et $b=4$.
 a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $u^2 + 2u + 4 = 0$.
 b. Déduis les nombres complexes u et $\bar{u}$.
 c. Justifie que $(\sqrt{3}+i)^2 = 2+2i\sqrt{3}$ et que $(\sqrt{3}-i)^2 = 2-2i\sqrt{3}$.
 d. Déduis les racines de $\varphi(z)$.
 7) Démontrer que les points A, B, C et D, sommets de la pièce sur la photo sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Problème 3

Partie A

Pendant le temps que Claire a mis à observer le mouvement de la pièce, cette dernière a effectué un nombre N de tour avec sa potence. Ce nombre s'écrit $\overline{361}$ de système de numérotation de base b et a pour reste 3 dans la division par 7.

- 8) a) Démontrer que $b^2 + 6b - 2 \equiv 0[7]$.

b) Résous dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, l'équation $\dot{3}x^2 + \dot{6}x + \dot{5} = \dot{0}$.

c) Déduis l'ensemble $S_{\mathbb{N}}$ des valeurs de b .

- 9) On suppose dans cette question que $b=8$.

- a. Vérifie que b appartient à $S_{\mathbb{N}}$.
 b. Donne l'écriture décimale de N .
 c. Démontrer que N est un nombre premier.

10) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue (x,y) définie par : $x^2 + 6x = y^2 + 232$.

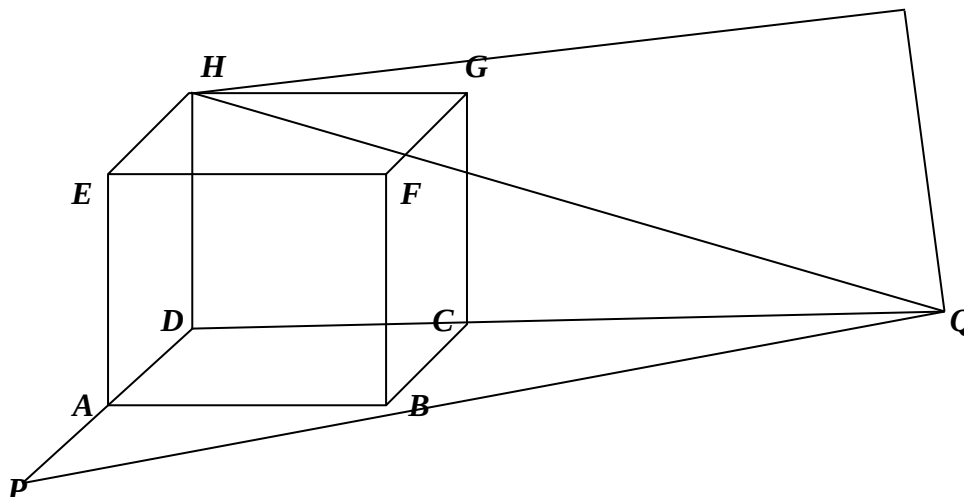
- 11) Soit $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $x + y = 651$ et sachant que le quotient de leur PPCM (m) et leur PGCD (d) est égal à 108, déterminer x et y .

Partie B

- 12) a) Justifie que la fonction f est continue sur tout intervalle non nul de son ensemble de définition D .
 b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
 c) Déduis le signe de $f(x)$ sur son ensemble de définition.
- 13) a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 b) Démontrer que la fonction f admet un prolongement g par continuité en -1 que tu définiras.
 c) Interprète graphiquement les résultats des limites de f aux bornes de son ensemble de définition autre que la borne -1 .
- 14) Etudie la dérivabilité de la fonction g à gauche en -1 puis justifie que sa courbe admet une demi-tangente dont tu préciseras l'équation et que les fonctions f et g ont même ensemble de dérivabilité qu'on précisera.
- 15) Justifie que $f'(x) = \frac{-1}{x-1\sqrt{x^2-1}}$ pour tout x appartenant à D' .
- 16) Etudier le sens de variation de la fonction f et établis les tableaux de variations de f et de g .

Situation d'évaluation n°6**Contexte**

« Beauté plus » est un établissement de vente de bijoux. A l'approche des fêtes de fin d'année, la directrice de l'établissement d'un commun accord avec le propriétaire de la boutique décide de réaliser en verre un solide lumineux et transparent afin de d'y exposer les bijoux haut de gamme. Le dessin de ce solide se présente comme l'indique la figure ci-après :



Le solide principal a la forme d'un cube ABCDEFGH tel que dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct : $(D; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DH})$ on a $\overrightarrow{DP} = \frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{ES} = 2\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ et enfin Q est la symétrique de I par rapport à C.

Au point S il est prévu un écran lumineux qui fait défiler les articles rangés dans ce solide.

Q est fixé comme ouverture et en P, E et H, on a prévu de belles décorations.

Ulrich et Abel deux élèves en classe de terminal C émerveillés par cette figure décident de mettre en pratique tout ce qu'ils ont appris sur le calcul vectoriel, les applications de l'espace et la résolution de systèmes d'équations linéaires par la méthode du pivot de Gauss.

Tâche : Tu devras te substituer à Ulrich et Abel pour résoudre les trois problèmes suivants.

Problème 1

- 1) Détermine les coordonnées des points A, B, I, P et Q.
- 2) Détermine une équation cartésienne du plan (APB) et calcule l'aire du triangle APB.
- 3) a) Démontre que S est le barycentre des points pondérés (E, α) ; (H, β) ; (G, γ) où α, β et γ sont à préciser .
b) Déduis-en les coordonnées de S.
- 4) Détermine le volume du tétraèdre EABP.

Problème 2

Le décorateur décide qu'il y ait un lien géométrique entre décor de chaque point. Pour cela considère les applications de l'espace suivantes :

$$t: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

$$M \rightarrow M' \text{ telle que } \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MH} - \overrightarrow{MG}.$$

$$h: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

$$M \rightarrow M' \text{ telle que } 2\overrightarrow{MM'} = -2\overrightarrow{ME} + 2\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MG}.$$

- 5)
 - a) Démontre que t est une translation que tu caractériseras.
 - b) Démontre que h est une homothétie que tu caractériseras.
- 6) Donne la nature et les éléments caractéristiques de t o h .
- 7) a) Donne l'expression analytique de t o h.

b) Donne l'expression analytique de t et celle de h et vérifie l'expression analytique de t o h trouvée en a).

Le décorateur poursuit sa logique et la directrice pense à ce qu'elle défalquera pour l'écran lumineux, les ampoules et le décor .

Problème 3

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(D; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DH})$.

- 8) a- Détermine dans le plan (EHG) l'ensemble des points M vérifiant :

$$-2ME^2 + 2MH^2 + MG^2 = 3.$$

Soit R le centre de la face ABEF et J milieu de [GF].

b- Détermine l'ensemble des points de l'espace tels que : $(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{NF}) \wedge (\overrightarrow{NF} + \overrightarrow{NG})$.

9) a) Détermine une équation cartésienne du plan (RCG) puis calcule la distance du point S à ce plan.

b) Soit S_P la réflexion du plan (P) d'équation cartésienne $\frac{1}{2}x + y - 1 = 0$.

Donne l'expression analytique de S_P .

10) a) Démontre que les plans (HDQ) et (AEH) sont perpendiculaires et se coupent en (DH).

b) Soit la translation $t = S_{(HDQ)} \circ S_{(AEH)}$. Donner la nature de t .

11) La directrice doit dépenser pour l'écran lumineux, le décor et les ampoules une somme s'élevant à 860.000 francs. Le coût de l'écran lumineux vaut trois fois celui du décor et le coût du décor dépasse celui des ampoules de 85.500 francs.

a) Traduis ce problème par un système d'équations linéaires en précisant le coût de chaque élément par des variable x , y , et z .

b) Par la méthode du Pivot de Gauss, résous ce système et donne le coût de l'écran, du décor et des ampoules.

Situation d'évaluation n°7

Contexte : La reine des Mathématiques

L'arithmétique, reine des mathématiques permet de développer des modèles de raisonnement cohérents. Elle est utilisée en tout temps de notre vie quotidienne. Elle est utilisée par les physiciens, les biologistes, les chimistes, les géomètres, les architectes, dans les industries, les astronomes etc. Pour cela il y a mille et une raison de combiner l'arithmétique et la géométrie de l'espace.

Tache : Tu vas découvrir l'arithmétique au cœur de nombreux phénomènes, en résolvant les problèmes suivants :

Problème 1

1) n est un entier naturel non nul, quel est le reste de la division euclidienne de :

a) $(n+2)^2$ par $n+4$.

b) $(2n^2+n)$ par $n+1$.

2) Démontre que tous les nombres dont l'écriture décimale est $\overline{ababab}$; avec a et b appartenant à $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, sont divisibles par 3, 7, 13 et 37.

3) Démontre que $1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + 4^{2003} \equiv 0[5]$.

Problème 2

Partie A

1)

- a) Vérifie que 1999 est un nombre premier.
- b) Déterminer l'ensemble des couples (a,b) d'entier naturels admettant pour somme 11994 et pour PGCD 1999.
- 2) On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à $\mathbb{N}$.
(E) : $n^2 - Sn + 11994 = 0$ où S est un entier naturel.
On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{N}$.
 - a. Trouve l'ensemble des diviseurs positifs possibles de 11994
 - b. Détermine un entier S pour que 3 soit solution de (E) et précise la deuxième solution.
 - c. Peut-on déterminer un entier S tels que 5 soit solution de (E) ?
 - d. Vérifie que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11994. Déduis-en toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.

Partie B

- 1) Détermine PGCD (2688, 3024).
- 2) x et y sont des entiers relatifs.
 - a. Justifie que les équations (1) et (2) suivantes sont équivalentes :
(1) : $2688x + 3024y = -3360$.
(2) : $8x + 9y = -10$.
 - b. Vérifie que le couple (1, 2) est une solution particulière de l'équation (2).
 - c. Déduis-en les solutions de l'équation (2).
- 3) Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. On considère les plans (P) et (P') d'équations cartésiennes respectives :
 $x + 2y - z = -2$ et $3x - y + 5y = 0$.
 - a. Démontre que (P) et (P') sont sécants en une droite (D) dont on donnera une représentation paramétrique.
 - b. Justifie que les coordonnées des points de (D) vérifient l'équation (2).
 - c. Déduis-en l'ensemble E des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Problème 3

L'espace ε est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Dans un plan (R) de l'espace, on considère le triangle EFG tel que EF=8 ; EG=5 et FG=4 .

On désigne par I le milieu de $[FG]$.

- 4)
 - a. Démontre que l'on a : $EF^2 + EG^2 + FG^2 = 2EI^2 + IG^2 + IF^2$.
 - b. Déduis-en la valeur de EI.
- 5) Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan (R) tels que : $ME^2 - MF^2 = 9$.
 - a) Démontre que $G \in (\Delta)$.
 - b) Détermine et construis (Δ) .
- 6) On suppose que le plan (R) a pour équation cartésienne $x + y + z - 2 = 0$.
Soit M un point quelconque de l'espace ε d'image M' par f.

f est l'application affine de ε dans ε d'expression analytique
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z + 4) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + y - 2z + 4) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x - 2y + z + 4) \end{cases}$$

- a. Démontre que le milieu de $[MM']$ appartient au plan (R).
- b. Démontre que $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur normal à (R)
- c. Détermine l'ensemble des points de l'espace invariants par f.
- d. Déduis en la nature et l'(es) élément(s) caractéristique(s) de f.
7. On considère le plan (Q) dont une équation cartésienne est : $2x - y - z - 1 = 0$.
 - a) Démontre que (Q) et (R) sont perpendiculaires.
 - b) S_Q est la réflexion du plan (Q).
Détermine la nature et l'(es) élément(s) caractéristique(s) de $g = S_Q \circ f$.
 - c) Détermine l'expression analytique de g.
8. S_R désigne la réflexion du plan (R), détermine une équation cartésienne du plan (R') tel que $S_R \circ S_{R'} = t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Situation d'évaluation n°8

Contexte Le portail du père de Lili

Boni est un jeune soudeur diplômé du lycée technique de Dounia. Il réalise pour le père de Lili un portail sur lequel on pouvait voir les motifs représentés par le cube ABCDEFGH d'arrête l'unité et le triangle SRT isocèle en S tel que $SR = ST = 3a$ et $RT = 2a$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$). Lili élève en classe de terminal C ayant vu le travail effectué par Boni est très émerveillée et se propose de vérifier si le travail de Boni est réellement basé sur une étude scientifique.

Elle considère le repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$. Lorsque $M(x, y, z)$ est un point de l'espace, elle désigne par M_1 et M_2 ses projetés orthogonaux respectifs sur les droites de repère $(A, \overrightarrow{AB})$ et $(A, \overrightarrow{AD})$. Elle désigne également par (P) le plan (ACG), par f la réflexion de plan (P) et par g le demi tour d'axe (DB).

Tâche : Tu es invité (e) à aider Lili en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1

1. a) Justifie que $M_1(x, 0, 0)$ et $M_2(0, y, 0)$.
b) Détermine l'expression analytique de f.
2. (π) désigne l'ensemble des points M du plan (ABC) vérifiant $(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM_1} + (\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AM} = 1 + xy$ où $M' = f(M)$.
 - a. Démontre que si $M \in (ABC)$ alors M a pour coordonnées $(x, y, 0)$.
 - b. Démontre qu'une équation du plan (π) est : $x - 2y - 1 = 0$.
3. a) Détermine l'expression analytique de g.
b) Détermine l'expression analytique de $f \circ g$.

c) Détermine l'image de (π) par g .

Problème 2

Afin d'étudier les configurations du plan réservé sur le triangle isocèle SRT, elle désigne par O le barycentre des points S, R, T affectés respectivement des coefficients 2, 3 et 3 ; I milieu de [RT], et J milieu de [SI].

4. Détermine que O est le milieu de [IJ].
5. a) Détermine suivant les valeurs de m l'ensemble (E_m) des points M du plan tels que :
$$2MS^2 + 3MR^2 + 3MT^2 = m \text{ où } m \text{ un réel.}$$
b) Détermine l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que
$$2MS^2 + 3MR^2 + 3MT^2 = 18a^2.$$
c) Détermine l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que
$$2MS^2 + 3MR^2 + 3MT^2 = 22a^2.$$
6. a) Calcule de deux manières différentes l'aire du triangle SOR.
b) Déduis la distance du point O à la droite (SR).
c) Démontre alors que les droites (RT), (RS), (ST) ont chacune un unique point commun avec l'ensemble (E_2) .
d) Que représente O pour le triangle isocèle SRT ?

Problème3

Lili considère les familles des plans (P_m) , (Q_m) , (R_m) d'équations cartésiennes respectives :
$$mx + y + mz = 2 - m ; x + my + z = 1 \text{ et } x + y + mz = 1 \text{ où } m \text{ est un réel.}$$
Lili affirme que l'intersection de ces trois familles de plans est soit l'ensemble vide, soit un plan, soit un singleton.

1. Justifie l'affirmation de Lili en précisant les différentes valeurs de m pour lesquelles on a chacun des ensembles dont parle Lili.
2. a) Lili désigne par n le nombre de droites concourantes qu'on peut obtenir sur le cube ($n \in \mathbb{IN}$, $n \geq 3$)
Détermine en base n l'entier naturel $(n + 1)^3$.
b) Démontre que $\text{PGCD}(2n + 3 ; 3n + 5) = 1$.
c) Démontre que $\text{PGCD}(2n + 8 ; 3n + 15)$ est un diviseur de 6.
d) Pour quelle(s) valeur(s) de n a-t-on $\text{PGCD}(2n + 8, 3n + 15) = 6$?
Calculer dans ce cas $\text{PGCD}(2n + 8 ; 3n + 15)$.

Situation d'évaluation n°9

Contexte : Le meilleur dessinateur

Sélectionné pour représenter le Bénin au Concours International de Dessin (CID), qui a eu lieu à Paris en France, Mauriane a remporté le premier prix avec le dessin d'une maison TATA composée de quatre cases reliées par un mur de base circulaire. Les expositions de dessin de CID ont eu lieu dans la pyramide de Louvre, grand hall ayant la forme d'une pyramide régulière SABCD de base ABCD et dont les faces latérales sont entièrement en verre. Mauriane a ramené sur la Pyramide de Louvre, des informations qui peuvent se traduire comme suit : dans un repère orthonormé direct $(\Omega; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace orienté pour lequel l'unité de longueur est égale à 11 mètres ;

- les sommets A, B, C ont pour coordonnées : A (1, 2, 3) ; B (-1, 0, 4) ; C (1, -1, 6).
- l'une des faces latérales est contenue dans le plan (P) d'équation :
$$22x - 20y + 4z + 6 = 0 .$$

- le sommet S appartient à l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que :

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \wedge \vec{\mu} = (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM}) \wedge \vec{\mu} \text{ Où } \vec{\mu} = \vec{e_1} - 2\vec{e_2} - 2\vec{e_3} .$$

Renaud, jeune frère de Mauriane et élève en classe de terminal scientifique, se propose d'utiliser ces informations pour déterminer la quantité de verre ayant servi à couvrir la Pyramide du Louvre ; mais il est surtout intéressé par la valeur du prix remporté par Mauriane.

Tâche : tu es invité(e) à trouver des réponses aux préoccupations de Renaud en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1

- 1) Calcule en mètres, la longueur du côté de la base de la pyramide du Louvre.
- 2) a) Détermine les coordonnées du point D.
b) Détermine les coordonnées de l'isobarycentre G des points A, B, C et D.
- 3) a) Démontre que l'ensemble (E) est la droite passant par le point H, milieu du segment [AC], et dirigée par le vecteur $\vec{\mu}$.
b) Ecris une représentation paramétrique de (E) .
- 4) Démontre qu'on a $S\left(\frac{1}{3}; \frac{11}{6}; \frac{35}{6}\right)$.
- 5) a) Calcule en mètres la hauteur de la pyramide du Louvre.

Problème 2

Renaud a représenté dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(R, \vec{v}, \vec{w})$, les points de contact K, L, M, N des quatre cases avec la base circulaire (C) du mur.

Les affixes des points K, L, M sont des solutions de l'équation $P(z) = 0$ où

$$P(z) = z^3 + (5 - 2i)z^2 + (4 - 22i)z + 20 - 60i \text{ avec } z \in \mathbb{C}.$$

- 6) Démontre que $P(z)$ admet une racine réelle a qu'on déterminera.
- 7) Détermine un polynôme $Q(z)$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - a)Q(z)$.
- 8) a) Calculer $(4 + 6i)^2$.
b) résous l'équation $z^2 - 2iz + 4 - 12i = 0$ dans $\mathbb{C}$.

- 9) En réalité les points de contact K, L, M, N des quatre cases avec la base circulaire du mur ont respectivement pour affixe :

$$z_1 = 2 + 4i, z_2 = -2 - 2i, z_3 = -5, z_4 = -1 + 6i .$$

- a) Démontre que KLMN est un rectangle.
- b) Détermine une équation cartésienne de (C).
- c) Représente (C).

Problème 3

La valeur correspondant au premier prix du CID est en dizaines de milliers d'euros du module de l'affixe du centre de l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points $M(z)$ tel que $f(z) = \frac{z+2+3i}{z-i}$; ($z \neq i$) soit imaginaire pur où $-2 - 3i$ est une racine du polynôme $P(z) = z^3 + (1 + 4i)z^2 - 3z + 1 + 8i$.

Partie A

- 10) a) Démontre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire par z_0 qu'on précisera
 b) Justifie que $i^{2012} = 1$ et $i^{2013} = i$.
 c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (i^{2012} + 5i^{2013})z - 8 + i = 0$.
- 11) Résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Partie B

Dans la suite A_1, B_1, C_1, E_1 et M désignent les points du plan complexe d'affixes respectives :

$z_0 = i, z_1 = 1 - 2i, z_2 = -2 - 3i, z_4 = (-1 - 2\sqrt{3}) + (-1 + \sqrt{3})i$ et z puis on pose $U = \frac{-1+i\sqrt{3}}{z_0+z_2}$.

12.a) Mettre $f(z_1)$ sous forme algébrique puis déduis-en la nature du triangle $A_1B_1C_1$.

- b) Mettre U sous forme algébrique et géométrique.
 c) Déduis-en les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.
 d) Ecrire U^{2014} sous forme algébrique.

13.a) Détermine la forme exponentielle de $f(z_4)$.

- b) Déduis-en la nature du triangle $A_1C_1E_1$.

14.a) Détermine l'ensemble $(\mathfrak{Z}_1)$ des points $M(z)$ tel que $|f(z)| = 1$.

- b) Exprime les parties réelles et imaginaire de $f(z)$ en fonction de x et y où $z = x + yi$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 c) Détermine l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

15. Justifie que le prix remporté par Mauriane au CIV dépasse 10.000 euros.

Situation d'évaluation n°10 (Test APMB Série D 2013)

Contexte

Au cours de la semaine culturelle organisée par son établissement, divers jeux tiennent les spectateurs en haleine. L'un des jeux consiste à lancer un gros dé cubique et, lorsqu'il est au repos, à observer l'inscription de la face supérieure : 0 ; 1 ; -1 ; $\sqrt{3}$, 2 et $\sqrt{2}$. Le dé est pipé de la manière suivante :

- Les évènements élémentaires $\{0\}, \{2\}$ et $\{\sqrt{2}\}$ sont équiprobables
- Les évènements élémentaires $\{1\}, \{-1\}$ et $\{\sqrt{3}\}$ sont équiprobables
- L'évènement élémentaire $\{0 ; 2 ; -\sqrt{2}\}$ est le double de son évènement contraire.

L'animateur du jeu vante des surprises agréables et les gains qui attendent ceux qui tentent leur chance. Les spectateurs sont curieux de savoir ce qu'il faut miser pour gagner le gros lot. Un spectateur du nom de Judicaël sollicite ton aide.

Tâche : tu vas te servir de tes connaissances pour aider Judicaël à résoudre les problèmes suivants.

Problème 1

- 1) Déterminer la probabilité des événements élémentaires $\{0\}$ et $\{1\}$
- 2) Calculer la probabilité des événements R, S, T défini comme suit :
 - R : « l'inscription de la face supérieure est un nombre entier naturel »
 - S : « l'inscription de la face supérieure est un nombre entier relatif »
 - T : « l'inscription de la face supérieure est un nombre réel strictement négatif »

Problème 2

Une phase du jeu consiste à lancer deux fois de suite le dé précédent. On désigne a et b les inscriptions obtenues respectivement au premier lancer et au second lancer .

On pose $z = a + ib$ où $i^2 = -1$.

- 3) a) Calculer la probabilité pour que z soit égal à $-1 + i\sqrt{3}$.
b) Calculer la probabilité pour que z soit égal à $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.
- 4) a) On pose : $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$. Ecris z_1 et z_2 sous forme exponentielle .
b) Détermine la forme algébrique de $(\frac{1}{2}z_1)^{2013}$.
- 5) a) Calcule : $(z_2)^6$ et $(2 - i)^4$.
b) Déduis-en les solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation :
$$z^4 = -7 - 24i$$
- 6) Soit $A(2 - i)$, $B(-2 + 2i)$, $C(1 + 2i)$ des points du plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.
 - a) Calcule $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ et donne une équation cartésienne du cercle (C) circonscrit au triangle ABC .
 - b) Détermine l'écriture de la similitude plane directe s de centre A qui transforme C en B .
Précise les éléments caractéristique de s .

Problème 3

Dans un autre stand, il est question de lancer une fléchette sur un domaine plan rapporté à un repère orthogonal $(O; I; J)$. Le joueur gagne si la fléchette tombe dans la partie du domaine délimitée par l'axe des abscisses, la courbe (φ) de la fonction f et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1 + e^x)$.

- 7) On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) définie par :

$$y' + y = \frac{1}{1 + e^x} .$$

- a) Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E_0) : y' + y = 0$.
- b) Prouve que la fonction h est solution de l'équation (E) .
- c) Démontre qu'une fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $(h - f)$ est solution de l'équation différentielle (E_0) .
- d) Déduis-en les solutions de l'équation différentielle (E) .
- 8) a) Etudier les variations de g et réalise son tableau de variation.
- b) Déduis-en le signe de $g(x)$.
- 9) Démontre que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe (γ) de g au voisinage de $+\infty$.
- 10) a) Démontre que $f(x) = (1 + e^{-x}) \frac{\ln(1+e^x)}{1+e^x}$.
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- c) Déduis alors les asymptote de (φ) .
- 11) Démontre que pour tout nombre réel x , on a : $f'(x) = e^{-x} g(x)$.
- 12) a) Dresse le tableau de variation de f .
- b) Construis la courbe (φ) de f .
- 13) a) Hachure le domaine (ω) où devra tomber la fléchette pour que le joueur gagne.
- b) Démontre que l'aire Ω de (ω) est telle que $\frac{\ln 2}{e} \leq \Omega \leq \ln(1 + e)$.

Situation d'évaluation n°11 (Devoir Collège Père Aupiais)

Contexte :

Le conseil communal de KATA décide de construire dans l'un de ses arrondissements, un centre commercial ayant la forme d'un cube ABCDEFGH d'arête a ($a \in \mathbb{R}_+^*$). La grande porte d'accès doit porter une décoration qui est la représentation graphique d'une fonction numérique f à variable réelle x , définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Les différents points de vente dans ce centre sont installés à partir d'une application g de l'espace (E) . L'architecte TAKA est retenu par le conseil communal pour réaliser le plan de construction de ce centre.

Tâche : Aider l'architecte TAKA en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

- Déterminer $f(x)$, sachant que la courbe (E) représentative de la fonction f vérifie les trois conditions suivantes :
 - (E) passe par les points de coordonnées $(-1 ; 0)$
 - (E) admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 6x + 1$ au point de coordonnées $(1 ; 4)$
 - (E) admet au point d'abscisse 0 une tangente perpendiculaire à la droite d'équation $x + y + 1 = 0$.
- L'espace (E) est muni du repère (A, B, C, D) . Les points F, B, E et G du cube appartiennent à une sphère (S) .
 - Déterminer une équation cartésienne de (S) .
 - Déterminer les coordonnées du centre Ω et le rayon r de (S) .

3. La base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ étant directe, exprimer dans cette base les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{DF}$.

Problème 2

4. Soit m un paramètre réel.

A tout point M de l'espace (E) , l'application f_m associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = m\overrightarrow{MB} + (m-1)\overrightarrow{ME} + (m-2)\overrightarrow{MG}$.

- a) Pour quelle valeur de m , f_m est-elle une translation. Déterminer alors le vecteur de translation.
- b) On suppose que $m \neq 1$ et $m \neq \frac{4}{3}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_m .
5. L'espace est muni du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
- a) Déterminer la nature et un élément caractéristique de la $f_1 \circ f_2$.
- b) Déterminer l'expression analytique de la composée $f_1 \circ f_2$.
- c) En déduire l'autre élément caractéristique de la composée $f_1 \circ f_2$.

Problème 3

L'espace (E) est muni du repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs directeurs unitaires respectifs des droites (AB) , (AD) et (AE) .

- 6.
- a) Déterminer une équation cartésienne du plan (BEG) .
- b) Calculer en fonction de a , l'aire du triangle BEG .
- c) Calculer en fonction de a , le volume du tétraèdre $FBEG$.
7. Déterminer l'expression analytique de la réflexion S_1 de plan (BEG) .
8. Déterminer l'expression analytique du demi-tour S_2 d'axe la droite (DF) .
- 9.
- a) Déterminer la nature de la composée $g = S_1 \circ S_2$.
- b) En déduire les coordonnées de l'élément caractéristique de la composée.

Situation d'évaluation n°12 (Devoir Collège Saint Augustin)

Contexte d'évaluation

Texte : La construction des logements sociaux

Les autorités municipales de la ville de Cotonou envisagent de construire des logements sociaux au profit des agents de la mairie sur l'un des domaines de la commune. Consulté pour réaliser le plan d'aménagement, l'urbaniste Gandonou a prévu :

- la construction des logements de la même forme selon l'espace réservé. Ainsi certains logements seront plus spacieux que d'autres.

- la décoration des murs des logements à l'aide de figures géométriques dans un ensemble de points M de l'espace vérifiant :

$$(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}).(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0 \text{ où B, C et D sont des points connus de l'espace.}$$

A la vue du plan, Jean élève en terminal scientifique voudrait déterminer des transformations permettant de passer d'un logement à l'autre puis de déterminer des transformations et la position relative de droites et plans de l'espace.

Tache : Tu vas trouver solutions aux préoccupations de Jean en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1:

Jean considère dans l'espace ε un cube ABCDEFGH assimilable à un logement sans toit et le repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Il désigne par I le milieu de [EF] et par K le centre du carré ADHE.

- 1-
 - a. Justifie par calcul l'existence d'un unique plan (P) contenant les points A, I et G.
 - b. Déterminer une équation cartésienne de (P).
 - c. Justifie que la droite (BK) est orthogonale au plan (P) et détermine leur point d'intersection J.
- 2- (π) est un plan de ε qui passe par le point B et qui est perpendiculaire (P). (Δ) est droite de (π) qui passe par C et qui est parallèle à la (BK).
 - a. Détermine une équation cartésienne de (π) .
 - b. Détermine une représentation paramétrique de (Δ) .
- 3- On désigne par P le centre de la face EFGH, par s et s' les réflexions de plans (ACE) et (CFH) respectivement.
 - a. Détermine les expressions analytiques de s et s'.
 - b. Etudier la position relative du plan (ACE) au plan (CFH).

Problème2

Gandonou a prévu décorer les murs avec des tétraèdres ABCD puis d'autres figures dont l'ensemble des points M vérifient $MB^2 + MC^2 + MD^2 = m$ pour m un réel donné. Pour cela, dans l'espace orienté, on considère alors le tétraèdre ABCD tel que ABC, ABD et ACD forment trois triangles isocèles en A et $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$.

- 1-
 - a. Démontre que $AC = AD = AB$.
 - b. On pose $AB = 1$. Justifie que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormé direct de l'espace. Dans la suite, on suppose que l'espace est muni du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
- 2-
 - a. Détermine une équation cartésienne du plan (BCD).
 - b. Soit G le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).
 - i. Détermine les coordonnées de G.

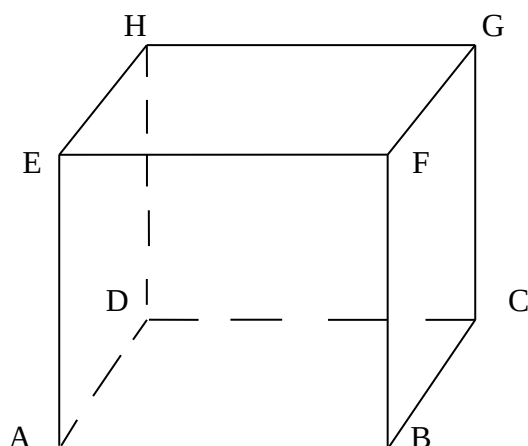
ii. Vérifie que G est le centre gravité du triangle (BCD).

3-

- Détermine la nature du triangle BCD.
- Détermine, suivant les valeurs du nombre m , l'ensemble (E_m) des points M de l'espace tels que : $MB^2 + MC^2 + MD^2 = m$.
- Peut-on déterminer m pour que l'isobarycentre des A, B et C appartienne à (E_m) ?

Problème 3

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1. On désigne par J le centre du carré BCGH. On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



- Justifie que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
 - Détermine l'ensemble (P) des points M de l'espace tels que : $(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$.
- Soit t l'application de l'espace dans lui-même qui associe à tout point M , le point $t(M) = M'$ tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.
 - Détermine la nature de t et précise son élément caractéristique.
 - Détermine l'image de (P) par t .
 - Démontre qu'il existe une homothétie h dont on précisera le centre Ω et le rapport k telle que $h(J) = A$ et $h(B) = H$.
 - Soit $s(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ un point de l'espace.
 - Démontre que SABCD est une pyramide.
 - Calcule le volume de l'image de cette pyramide par t ou h , puis le volume de l'image du cube ABCDEFGH par h ou t .

Situation d'évaluation n°13(Collège Père Aupiais)

Contexte:

A l'occasion des fêtes de fin d'année, Guésséré, un élève en classe de Tle C est chargé de décorer le salon principal de leur maison. Pour cela, il décide d'utiliser plusieurs guirlandes et jeux

lumineux. Il devra placer des ampoules aux points images des solutions dans $\mathbb{C}$ des équations $(E_1) : 4x^3 + x^2 + x - 3 = 0$ et $(E_2) : Z^3 - i(1 + \sqrt{3})Z^2 - (1 + \sqrt{3})(\sqrt{3} + i)Z + 2(1 - \sqrt{3}) + 2i(1 + \sqrt{3}) = 0$. Il devra disposer l'une des guirlandes suivant la courbe de la fonction g définie sur $[0, 2\pi]$ par $g(0) = 0$ et $g(x) = \sin \left[xE\left(\frac{\pi}{x}\right) \right]$ pour $x \neq 0$. Guésséré est confronté à des problèmes d'ordre mathématique.

Tâche: Tu vas te joindre à Guésséré pour consolider tes connaissances en mathématiques à travers les problèmes suivants :

Problème 1

- Démontre que l'équation (E_1) n'a qu'une seule solution réelle qui de plus appartient à $]0 ; 1[$
- Démontre que si (E_1) a une solution rationnelle de la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers premiers entre eux, alors p divise 3 et que q divise 4.
 - Quels sont les rationnels vérifiant cette dernière condition ?
 - Détermine la solution rationnelle $\frac{p}{q}$ de (E_1) .
 - Achève alors la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E_1) .
- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_2) sachant qu'elle admet une racine réelle α .
- On désigne par Z_0 le produit des deux autres solutions de (E_2) . Les durées en secondes séparant les clignotements des ampoules sont des entiers naturels n tels que $(Z_0)^n$ soit un nombre complexe imaginaire pur. Détermine alors ces durées.

Problème 2

- Démontre que tout réel t , on a : $t - 1 < E(t) \leq t$.
 - Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(xE\left(\frac{\pi}{x}\right) \right)$.
 - Etudie la continuité de g en 0.
- Résous dans $[0, 2\pi]$, l'équation $E\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$ puis l'équation $E\left(\frac{\pi}{x}\right) = k$ avec k un entier naturel non nul.
 - Explicite g sur les intervalles $]\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{2}]$ et $]\frac{\pi}{2} ; \pi]$.
 - Explicite g sur $]\frac{\pi}{k+1} ; \frac{\pi}{k}]$; k décrivant $\mathbb{N}^*$.
 - En déduire l'étude de la continuité de g sur $[0, 2\pi]$.
- Etudie la dérivabilité de g sur $]0, 2\pi[$, précise les résultats pour les valeurs $x = \frac{\pi}{k}$, k étant un entier naturel positif.
 - Pour tout k entier naturel positif, on pose $y_k = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{k}} (+ g(x))$. Montre que le point $M_k(\frac{\pi}{k} ; y_k)$ appartient à une courbe (S) dont on précisera l'équation.
 - Trace (S) et (C) courbe de restriction de g à $]\frac{\pi}{6} ; \pi]$ dans un plan où l'on a choisi un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 4\text{cm}$ et $\|\vec{j}\| = 10\text{cm}$.

Problème 3

Un interrupteur devra être placé au point I dont les coordonnées sont des entiers solutions de l'équation $(E_3) : x^2 + 6x = y^2 + 232$. Toi et Guesséré vous allez déterminer les coordonnées de I. Pour cela :

8. a) Résous dans $\mathbb{Z} / 7\mathbb{Z}$ l'équation : $3x^2 + 6x + 5 = 0$.

b) Un entier naturel A s'écrit $\overline{361}^b$ dans le système de numération de base b et a pour reste 3 dans la division euclidienne par 7.

i) Démontre que : $3b^2 + 6b - 2 \equiv 0[7]$.

ii) En déduire l'ensemble E des valeurs de b.

9. On suppose dans cette question que $b=8$.

a) Vérifie que b appartient à E.

b) Donne l'écriture décimale de A.

c) Démontre que A est un nombre premier.

d) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E_3) .

10. Pour des problèmes d'ordre technique, Guésséré est encore amené à résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E_4) : (1 + iz)^n = (1 - iz)^n$; n étant un entier naturel supérieur à 2.

a) Démontre que pour toute solution z de (E_4) on a : $|1 + iz| = |1 - iz|$.

b) En déduire que si z est une solution de (E_4) , alors z est un nombre réel.

c) Démontre que pour tout réel e, il existe un unique réel φ de l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ tel que $z = \tan \varphi$.

d) Exprime en fonction de $e^{i\varphi}$, le nombre complexe $\frac{1+ie}{1-iz}$.

e) Démontre que z est solution de (E_4) si et seulement si φ est solution de l'équation

$$(E_5) : e^{i2n\varphi} = 1 \text{ avec } \varphi \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[.$$

f) Résous l'équation (E_5) en supposant que $n=6$.

g) Déduis les solutions de l'équation (E_4) .

Situation d'évaluation n°14 (Devoir Collège les 'HIBISCUS'(Parakou))

Contexte : Réfection d'un centre de loisirs à Parakou

L'architecte Domingo, le promoteur d'un centre de loisirs à Parakou remarque à travers la ville que son centre de loisirs ne comble plus l'attente de ses nombreux clients qui ne font que diminuer chaque jour. Il décide donc de le réfectionner.

Il veut renforcer l'immeuble par quatre poteaux implantés en quatre points dont les affixes dans le plan complexe sont les racines du polynôme : $P(z) = z^4 + 4z^3 + 10z^2 + 12z + 8$. De plus, il veut installer un détecteur de vol assimilable à l'image (c') de l'ensemble (c) des points M du plan complexe d'affixe z tels que : $9iz^2 - 9i\bar{z}^2 + 82z\bar{z} = 1600$ par la transformation : (F) d'écriture complexe $z' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)z$. Il veut aussi améliorer la décoration intérieure par des jeux de lumières modernes dont les radiations sont assimilables à des courbes d'une famille de fonction $h_{(a;b)}$ a et b étant des entiers naturels.

Domingo voudrait connaître la position précise de ces poteaux, la forme du détecteur et avoir l'allure d'une courbe de la famille de courbes $h_{(a;b)}$ pour voir comment serait intéressant ces jeux de lumière.

Tache : tu vas aider Domingo à satisfaire ses préoccupations en résolvant les trois problèmes suivants :

PROBLEME 1

1. a. Démontre que tout nombre complexe, z est solution de $P(z)=0$, si $\bar{z}$ est aussi solution de $P(z)=0$.
- b. Calcule $P(-1 - i)$ et résous l'équation $P(z)=0$ dans $\mathbb{C}$.
- c. Détermine l'argument principal du nombre complexe $z_0=(-1 + i)(-1 + i\sqrt{3})$.
- 2.a) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $7x + 12y = -6$.
- b. Déduis l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels z_0^n est un imaginaire pure.
- 3.a. Démontre que (c) est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- b. Démontre que (c) est globalement invariant par la symétrie orthogonale d'axe, l'axe des abscisses
- c. Détermine l'équation réduite de (c').
- d. Donne la nature de (c') et ses éléments caractéristiques (sommets, excentricité, foyers et directrice) puis construis (c').

PROBLEME 2

Le centre de loisirs est implanté sur un domaine carré de sens direct ABCD de centre O_1 et de côté 4dam. Domingo voudrait l'élargir sur le domaine ADB'D'B. B' et D'étant les symétriques respectifs de B et D par rapport à C ; A' le symétrique de A par rapport à D. t est la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, r est la rotation de centre O_1 et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. On pose $R = t \circ r$.

Domingo voudrait étudier certaines propriétés géométriques de ce nouvel domaine.

4 a. Faire une figure.

b. Démontre que ACB'D est un parallélogramme.

c. Démontre que DBB' est un triangle rectangle isocèle directe.

5) a. Détermine les images par R des points A, B, C et D.

b. Détermine la nature et les éléments caractéristique de R.

6. Soit S la similitude plane directe qui transforme B en D' et C en B'.

a.) Détermine le rapport et l'angle de S (tu pourras utiliser les milieux I et J respectifs de [DB'] et [BD']).

b). Détermine l'image D_1 de D par S.

c). Donne l'écriture complexe de S dans le plan muni du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

7. (Γ) est l'ensemble des points M du plan tels que : $|MB - MC| = 2\sqrt{2}$ et (Γ') son image par S.

a. Détermine le centre, les sommets et l'axe focale de (Γ') .

b. construis (Γ') .

PROBLEME 3

$h_{(a,b)}$ est la fonction définie par $h_{(a,b)}(x) = b + \frac{1}{\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{1+x-a}{1-x+a}\right)$ et $(c_{(a,b)})$ sa courbe. Domingo éprouve des difficultés pour construire ces courbes. L'un de ses amis enseignant de mathématique dans l'un des collèges de la place, pour l'aider considère les fonctions k définies sur $]0, +\infty[$ par $k(x) = \frac{x-1}{x+1}$ et f définie de $\mathbb{R}$ vers $]0, 1[$ par : $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$.

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs unitaire tels que $\vec{i} \cdot \vec{j} = \sin \alpha$, $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. O est un point du plan.

8.a. Démontre que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base du plan.

b. Détermine α pour que $(O; \vec{i}, \vec{j})$ soit un repère orthonormé.

Dans la suite le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

9.a. Etudie les variations de k .

b. Démontre que pour tout réel x , $f(x) = k(2^x)$.

c. Déduire les variations de k .

d. Démontre que O est un point d'inflexion à la courbe (c) de f et déduire l'équation de la tangente à (c) en O .

10. a. Construis (c) .

b. Calcule l'aire du domaine plan limité par (c) ; les axes de coordonnées et la droite d'équation $x=1$ (tu pourras poser $2^x = X$).

c. Démontre que f admet une bijection réciproque g .

d. Exprime $g(x)$ pour tout x élément de $]0, 1[$.

11 a. Exprime $h_{(a,b)}(x)$ en fonction de $g(x - a)$.

b. Déduis que $(c_{(a,b)})$ est l'image de (c) par l'application $\varphi_{(a,b)} = T \circ S$ où T est une translation et S une symétrie orthogonale que l'on précisera.

c. Détermine les conditions nécessaires et suffisantes sur a et b pour que $\varphi_{(a,b)}$ soit une symétrie orthogonale.

12. a et b sont des chiffres obtenus pour la première fois respectivement au quatrième et au cinquième lancé sur la face cachée d'un dé tétraédrique après n lancers ($n \geq 5$) et sont solution de l'équation (E) : $12b^2 - a^3 + 12b + 3 = 0$.

Les faces du dé sont numérotées 1, 2, 3 et 6. Le dé étant truqué, les probabilités $p_1; p_2; p_3$ et p_6 d'obtenir respectivement 1, 2, 3 et 6 sont dans cet ordre en progression arithmétique de raison $r=0,1$.

a. Détermine les probabilités $p_1; p_2; p_3$ et p_6 .

b. Démontre que si (a, b) est solution de (E) alors 3 divise a puis détermine les valeurs possibles de a .

c. Détermine les valeurs de a et b .

d. Calcule la probabilité de l'événement :

« (a, b) est solution de (E) ».

13. En réalité $a=3$ et $b=1$.

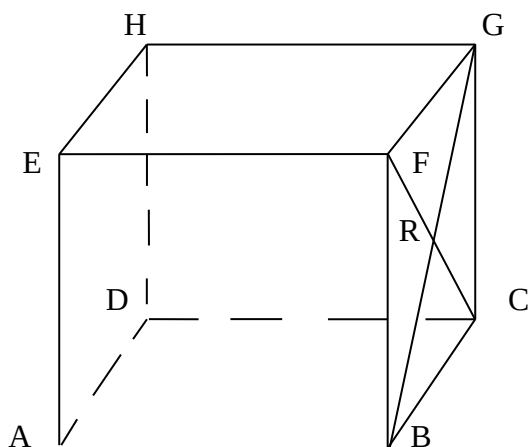
a. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de $\varphi_{(3;1)}$.

b) construis $\varphi_{(3;1)}$.

Situation d'évaluation n°15

Contexte : Le chantier de construction de l'Université Supérieure de Missianfoh.

Le nouveau site de l'Université Supérieure de Missianfoh en construction dans la commune de Gbédjivi est un bâtiment à plusieurs niveaux. Fiowa un élève en classe de Terminale C, fils de Gbadagba l'ingénieur de travaux chargé de la supervision du chantier s'est intéressé au bureau réservé au standardiste de cette université privée. Ce bureau a la forme d'un cube ABCDEFGH comme l'indique la figure suivante :



Au centre O du carré EFGH est installé un brasseur d'air. En I, J, K et L milieux respectifs des côtés [EF], [FG], [GH], [EH] seront installées les lampes de décoration. Au centre R de la face BCGF se trouve une signalisation lumineuse, qui doit indiquer les appels téléphoniques entrant. Chacun des six niveaux de bâtiment a pour hauteur $AE=3\text{m}$

Il est prévu une décoration spéciale du plafond dans sa partie délimitée par l'ensemble (Γ) des points M du plan (EFG) tels que : $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{ME} = 9$.

Emerveillé par la beauté architecturale de l'ouvrage, Fiowa s'est proposé d'en savoir davantage sur l'ensemble (Γ) et les applications de l'espace qui ont été utilisées pour la réalisation d'un édifice aussi important que solide.

Tache : Tu aideras Fiowa à satisfaire sa soif de compréhension en résolvant les trois problèmes suivants.

PROBLEME 1

1- M étant un point du plan (EFG).

- a. Démontre que $M \in (\Gamma)$ si et seulement si $MI^2 + MJ^2 + MK^2 + ML^2 = 18$.
- b. Justifie que le point O est l'isobarycentre des points I, J, K et L.
- 2- a. Démontre que : $M \in (\Gamma)$ si et seulement si $OM^2 = \frac{9}{4}$.
- b. Déduis-en l'ensemble (Γ) puis précise en m^2 l'aire de la surface délimitée par (Γ) .

PROBLEME 2

L'architecte a travaillé dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace où le point A a pour coordonnées (2,1,0) et l'un des plans d'une des quatre faces latérales est le plan (P) ayant pour équation cartésienne $x - y + 2z - 1 = 0$.

Afin de vérifier l'exactitude des calculs effectués par l'architecte, l'ingénieur Gbadagba s'est servi du repère $R=(A; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace et des réflexions des plans P, Q_1 et Q_2 avec $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$, Q_1 et Q_2 les plans de repère respectifs $(A; \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(A; \vec{e}_1, \vec{e}_3)$.

3.a) Démontre que $(A; \vec{e}_1, \vec{e}_2,)$ est un repère orthonormé du plan P.

b) Détermine dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les coordonnées du vecteur $\vec{e}_3$ tel que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ soit une base orthonormée de l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Gbadagba a en fait utilisé le repère R tel que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ soit une base orthonormée de w.

4) Détermine dans R, l'expression analytique de S_p réflexion du plan P.

5.a) Ecris dans R une équation cartésienne des plans Q_1 et Q_2 puis rappelle dans le repère R, l'expression analytique de S_{Q_1} et de S_{Q_2} des réflexions de Q_1 et Q_2 respectivement.

b) Justifie que $S_{Q_1} \circ S_{Q_2}$ est un demi-tour dont tu préciseras l'axe.

6) Détermine la composition $g = S_p \circ S_{Q_1} \circ S_{Q_2}$.

PROBLEME 3

La porte du recteur et celle du comptable sont électroniques. On utilise des codes de quatre chiffres pour les ouvrir.

Partie A

Le code dont se sert le recteur pour ouvrir son bureau est un entier naturel qui, écrit :

-dans le système de numération de base 5 est abcca.

-dans le système octal est bbab.

7) Démontre que : $309a + 15c = 226b$.

8) Démontre que b est un multiple de 3 puis déduis-en b.

9) Démontre que $3a \equiv 1[5]$. Puis déduis-en a et c.

10) Ecris le code permettant au recteur d'ouvrir son bureau.

Partie B

Pour des raisons de sécurité, le comptable a le choix d'utiliser rien que des entiers naturels α et β tels que $\begin{cases} (3\alpha + 5\beta)(\alpha + 2\beta) = 1276 \\ \alpha\beta = 2 \times \text{ppcm}(\alpha, \beta) \end{cases}$ pour écrire le code ou bien d'écrire un T tel que pour tout entier naturel non nul n , 6 divise $T^n - T$.

11.a) Justifie que $\text{pgcd}(\alpha, \beta) = 2$.

b) Démontre que si x et y sont deux entiers relatifs premiers entre eux alors il en est de même pour $3x+5y$ et $x+2y$.

12.a) Déduis-en α et β .

b) Donne le plus petit et le plus grand des codes que le comptable peut écrire en se servant de α et β .

13.a) Démontre que les propositions suivantes sont équivalentes sachant que x et y sont des entiers relatifs non nuls :

P_1 : y divise $x^2 - x$.

P_2 : $\forall n \in \mathbb{N}^*, y$ divise $x^n - x$.

b- Démontre alors que : $T \in \{6k, 6k+1 ; k \in \mathbb{N} \text{ et } k \geq 167\}$.

Situation d'évaluation n°17(PI)

Exercice1

On considère la suite (U_n) définie par $U_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx$, pour tout entier naturel n

1°) Calculer U_0 .

2°) a) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$.

b) Etudier la convergence de la suite (S_n) .

3°) a) Démontre que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) La suite (U_n) est-elle convergente ?

c) Calcule U_n en fonction de n .

Exercice 2

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - 6y' + 9y = 50e^{-2x}$.

4°) Déterminer a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ae^{-2bx}$ soit solution de (E).

5°) Soit f une fonction 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$, montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E) : $y'' - 6y' + 9y = 0$.

6°) a) Résoudre (E').

b) En déduire la solution de (E).

c) Déterminer la solution de (E) dont la courbe passe par le point $A(0 ; 3)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $-10x - y + 7 = 0$.

PROBLEME

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = 1 - x + \sqrt{x^2 + 3}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

7°) a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f .

- c) Dresser le tableau de variation de f .
- 8°) a) Etudier les branches infinies de (C) .
b) Tracer (C).
- 9°) Soit la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow g(x) = f(x)$$
a) Montrer que g est une bijection/
b) Soit g^{-1} la réciproque de g . Montrer que tout élément x de $f_2(\mathbb{R})$, $g^{-1}(x) = \frac{3-(x-1)^2}{2(x-1)}$
c) Calculer : $\int_e^{+\sqrt{3}} g^{-1}(x) dx$.
d) En déduire l'aire du domaine limité par (C) l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
- 10°) Etablir une équation de la courbe (C') image de (C) par la symétrie de centre $S(0 ; 1)$.
- 11°) A tout point d'affixe $Z = x + iy (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$ on associe le point M' d'affixe Z' tel que

$$z' = \frac{4-(z+\bar{z})i}{1-i+\frac{1}{2}(z-\bar{z})}$$
 où $\bar{z}$ désigne de le conjugué de z . Soit (H) l'ensemble des points M tels que M' appartiennent à la droite d'équation $x = 1$.
a) Montrer qu'une équation de (H) est $y^2 - 2y + 2xy - 2x - 2 = 0$.
b) Vérifie que $(H) = (C) \cup (C')$ et construire (H).
- 12°) Soit V la transformation du plan dans lui-même qui à tout point $M(x,y)$ associe le point M'
 (x',y') tel que :
$$\begin{cases} x' = \frac{x}{2} \\ y' = x + y \end{cases}$$
 .
a) Déterminer l'ensemble des points invariants par v .
b) Montrer que pour tout point M d'image M' par V le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.
c) En déduire que V est une affinité dont on précisera le rapport, l'axe et la direction.
- 13°) a) Donner une équation cartésienne (H') image de (H) par V .
b) En déduire que (H') est une conique dont on précisera, la nature, le centre et l'excentricité.
c) Montrer que (H') est l'ensemble des points M du plan tels que $|MH_1 - MH_2| = k$ où H_1 et H_2 sont des points du plan dont on donnera les coordonnées et k un réel strictement positif à déterminer.
d) Construire (H').
- 14°) a) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $y^2 - 4x^2 - 2y = 0$.
b) Existe-t-il des points de (H') dont les coordonnées sont des entiers relatifs ?

Situation d'évaluation N°18 (Devoir Collège Catholique Mgr Isidore de SOUZA)

Contexte :

Le Directeur d'une entreprise textile "VIP" veut lutter contre la contrefaçon de ses produits. Il engage alors un designer qui doit réfléchir sur une façon singulière de disposer dans le plan des tissus de fines pierres précieuses afin de distinguer le vrai du faux. Son chef service anti-piraterie lui décrit également une manière de coder tous les produits à mettre sur le marché. Il assimile les lettres de l'alphabet français A ; B ; ... ; Z aux nombres 0 ; 1 ; ... ; 25 respectivement ; puis considère la fonction :

$$f: \{0; 1; \dots; 25\} \rightarrow \{0; 1; \dots; 25\}$$

$$x \rightarrow f(x) \text{ avec } f(x) \equiv (17x + 24)[26]$$

Pour coder un mot, la lettre qui correspond au nombre x sera remplacée par celle qui correspond à $f(x)$. Chaque produit sera vendu aux clients avec un code. Le Directeur est préoccupé par l'efficacité de son projet.

Tâche : Tu vas participer à la réalisation du projet du Directeur par la résolution des trois problèmes suivants.

Problème 1

- Détermine les nombres correspondant aux lettres du mot BLANC, puis le code de ce mot.
- a) Résous dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation : $17u - 26v = 1$.
b) Résous dans $\mathbb{Z} / 26\mathbb{Z}$ l'équation : $17u = 1$.
- a) Pour tout élément y de $\mathbb{Z} / 26\mathbb{Z}$, résous dans $\mathbb{Z} / 26\mathbb{Z}$, l'équation : $y = 17x + 24$ et déduis l'expression d'une fonction de déchiffrement g , de $\{0; 1; \dots\}$ dans lui-même telle que $y \equiv f(x)[26] \Leftrightarrow x \equiv g(y)[26]$.
b) Déchiffre alors le code FIFA.

Problème 2

Une des propositions du désigner est de disposer les pierres à intervalle régulier le long d'une courbe ; il considère la famille de courbes (C_n) de la fonction f_n dans un repère orthonormé

$(O; \vec{i}; \vec{j})$, d'unité 5 cm définie par : $\begin{cases} f_n(x) = x(\ln x)^n \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

A/

- Etudie la dérivabilité de f_n en 0.
- Etudie les variations de la fonction f_1 ; puis trace la courbe (C_1) .
- Etudie les variations de f_n lorsque $n > 1$ (distinguer deux cas selon la parité de n).
- Démontre que toutes les courbes (C_n) passent par trois points fixes, c'est-à-dire des points dont les coordonnées sont indépendantes de n .
- Etudie les positions relatives des courbes (C_n) et (C_{n+1}) , restreintes à l'intervalle $[1; +\infty[$.
- Trace dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. la courbe (C_2) .

B/ On note (D) la droite d'équation $y = x$.

- Pour tout réel x strictement positif, on note A ; B et C les points de même abscisse x , respectivement situés sur (D) , (C_1) et (C_2) .
On note G le barycentre des points pondérés $(A; 1)$; $(B; 2)$ et $(C; 1)$.
Calcule les coordonnées du point G. On note (Γ) l'ensemble des points G lorsque x décrit $[0; +\infty[$.
- On note g l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x; y)$ associe le point

$$M'(x'; y) \text{ tel que } \begin{cases} x' = \frac{1}{e}x \\ y' = \frac{1}{4e}y \end{cases}$$

Prouve que (Γ) est l'image de (C_2) par g .

Problème 3

Afin d'attirer la clientèle, le Directeur organise un concours. A l'issue du concours, le Directeur prévoit partager les éventuels ex-æquo en soumettant chacun d'eux à une épreuve qui consiste à lancer deux fois de suite un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Le candidat perd 15 000 F si la somme des numéros apparus ne dépasse pas 4 ; il perd un montant x si cette somme est comprise entre 5 et 8 et il gagne 20 000 F si cette somme est au moins 9. Le candidat à choisir sera celui qui aura le plus grand gain algébrique. Le Directeur se demande comment choisir le montant x pour que ce jeu soit équitable.

12. En désignant par X la variable aléatoire égale à la somme des numéros sortis :
 - a) Quel est l'ensemble des valeurs prises par X .
 - b) Calcule l'espérance mathématique $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.
 - c) Trace la fonction de répartition F de X et déduis la probabilité de chacun des événements suivants : $X \leq 4$; $5 \leq X \leq 8$; $X \geq 9$.
13. En désignant par Y la variable aléatoire qui représente le gain algébrique du candidat :
 - a) Détermine en fonction de x l'espérance mathématique de Y .
 - b) Détermine la solution à la préoccupation du Directeur.

Situation d'évaluation N°19 (PI)

Exercice 1

1. Démontrer pour tout entier naturel n non nul que :
 - a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
 - b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Démontrer que :
 - a) $\forall t \in [0 ; +\infty[; 1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$.
 - b) $\forall x \in [0 ; +\infty[; x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
3. On pose, pour tout entier naturel n non nul,
$$U_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$
 - a) Démontrer, en utilisant les résultats précédents, deux suites (P_n) et (q_n) telles que $P_n \leq \ln u_n \leq q_n$ pour tout entier naturel non nul n .
 - b) Calculer les limites des suites (P_n) et (q_n) .
 - c) La suite (U_n) est-elle convergente ? Quelle est alors la limite de la suite (U_n) .

Exercice 2

Une urne contient 60 boules blanches et 40 boules noires. On effectue dans cette urne des tirages successifs avec remise de chaque boule après tirage. On s'arrêtera à l'obtention d'une boule blanche.

Dans cette question, on ira au maximum à 4 tirages. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la dernière boule blanche. Par convention X sera égale à 0 si l'on n'obtient pas de boule blanche après les 4 tirages.

1.
 - a) Calculer la probabilité pour que X soit égale à 0 .
 - b) Calculer la probabilité pour que X soit égal à k ; k valant successivement 1, 2, 3 et 4 .
2. Dans cette question, on procédera à n tirages au maximum, n étant un entier naturel non nul. De même on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaire à l'obtention de la première boule blanche et ici encore Y sera nul si on n'obtient pas de boule blanche après n tirages.
 - a) Calculer la probabilité pour que Y soit égale à k ; k étant un entier naturel variant de 1 à n .
 - b) On considère la fonction polynôme P telle que $P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$.

Soit $E(Y)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y .

Montre que : $E(Y) = \frac{4}{5}p\left(\frac{2}{5}\right)$.

Problème

Partie A

Soit la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{e^x}{e^x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé

(O ; I ; J)

1.
 - a) Démontre que : $\forall t \in [0 ; +\infty[, e^t \geq t + 1$.
 - b) Soit a et b deux nombres réels tels que $0 < a \leq b$.

Démontre que :

$$\frac{b-a}{b} \leq \int_a^b \frac{dt}{t} \leq \frac{b-a}{a} .$$

- c) Dédire de ce qui précède que, pour tout réel x strictement positif,

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1 .$$

- d) En déduire que l'ensemble de définition de f est $[0 ; +\infty[$.

2.
 - a) Etudier la continuité de f en 0 .

- b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter .
3. Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.
 - a) Etudier les variations de g .
 - b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_0 et vérifier que $1,7 < x_0 < 1,8$.
 - c) Dédire le signe de g .
4. a) Dresser le tableau de variation de f .
b) Construire la courbe (C) de f . (on prendra $f(x_0) = 1,1$).
5. Soit α et β deux nombres réels. On désigne par $\varphi_{(\alpha,\beta)}$ l'application du plan (P) dans (P) qui pour tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que $\begin{cases} x' = y + \alpha \\ y' = x + \beta \end{cases}$.
 - a) Déterminer suivant les valeurs de α et β la nature et les éléments caractéristiques de $\varphi_{(\alpha,\beta)}$.
 - b) Démontrer que l'application ψ du plan (P) dans (P) qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ y' = x + 1 \end{cases}$ est la composée d'une affinité et d'une symétrie glissée dont on précisera les éléments caractéristiques.
6. On désigne par (Γ) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan défini par $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t - 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.
Démontrer que l'image (Γ') de (Γ) par ψ est une conique dont il faut donner les éléments caractéristiques.

- b. Résoudre (e).
- c. Déterminer l'entier naturel A inférieur à 1000 tel que : $A \equiv 22[324]$ et $A \equiv 101[245]$.
2. Soit N l'ensemble des quadruplets (a, b, c, d) d'entiers naturels qui vérifient les conditions :
 $ad - bc = 1$ et $a < b$.
- a. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n , le quadruplet $(1, n, 0, 1)$ est-il un élément de N .
- b. Démontre que le produit abd est différent de 0, que la fraction $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont irréductibles et que l'on a $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$.
- c. En déduire la comparaison des fractions $\frac{31}{41}$ et $\frac{245}{324}$.

Exercice 2

1. a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 0$.
- b) Vérifier que la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{4}e^{-2x}$ est solution de (E).
2. Soit $(U_n)_{(n>0)}$ une suite arithmétique de raison non nulle r et $(V_n)_{(n>0)}$ une suite.
- a. Démontrer que $(V_n)_{(n>0)}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
- b. Exprimer en fonction de U_0 , r et n la somme $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$.
- c. Détermine suivant les valeurs de n $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ puis en déduire
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2} + \dots + \frac{1}{4}e^{-2n} \right)$.
3. Soit $(W_n)_{(n>0)}$ la suite numérique telle que W_n est l'aire (à l'unité d'aire près) du domaine limité par la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.
- a. Démontre que (W_n) est convergente.
- b. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (W_1 + W_2 + \dots + W_n) - \frac{n}{8}$.

Problème

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Partie A

On considère les points A , B et C d'affixes respectives $-1 + 3i$, $1 + i$ et -4 . Le point désigne le barycentre des points pondérés $(A, 4)$; $(B, 3)$; $(C, 5)$.

Soit l'application h définie par : $(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{R}$
 $M \mapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$.

1. a) Calculer $h(A)$.
- b) Démontrer que pour tout point M du plan on a $h(M) = 6MG^2 + h(G)$.
- c) Déterminer puis construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que $h(M) = 18$.
2. Atout point M d'affixe z telle que : $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, On associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = [z^3 + 4(1 - i)z^2 - 2(2 + 7i)z - 16 + 8i] - (z^3 + 2 - 2i)$.
- On désigne par (H) l'ensemble des points M du plan tels que O , B et M' sont alignés.
- a. Démontre que pour tout point M on a :

$$M \in (H) \Leftrightarrow 4(x^2 - y^2) + 5x + 9y - 14 = 0.$$

- b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (H).

Partie B

Soit $f_\alpha(x) = \exp\left(\frac{\alpha-x}{\alpha+x}\right)$, où α est un nombre réel non nul. On désigne par (C_α) la courbe représentative de f_α dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

3. a) Déterminer l'ensemble de définition D_α de f_α .
b) Etudier les variations de f_α suivant les valeurs de α .
4. a) Démontrer que f_α est une bijection de D_α vers $f_\alpha(D_\alpha)$ que l'on précisera.
b) Expliciter $f_\alpha^{-1}(x)$ pour tout x élément de $f_\alpha(D_\alpha)$.
5. On pose $f = f_1$ (C) désigne la courbe représentative de f et (C') celle de f^{-1} .
a) Dresser le tableau de variation de f .
b) Construire (C) et (C') .
6. On suppose α strictement positif et différent de 1. On désigne par (C'_α) la courbe représentative de f_α^{-1} . Démontrer que :
a. (C_α) est l'image de (C) par une affinité orthogonale dont on précisera le rapport et l'axe.
b. (C'_α) est l'image de (C') par une affinité orthogonale dont on précisera le rapport et l'axe.

Partie C

Soit φ_α l'application affine du plan qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = \alpha x + 1 \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

7. Exprimer l'affixe z' de M' en fonction de α et de l'affixe z de M
8. Détermine α dans chacun des cas suivants :
a. φ_α est un déplacement.
b. φ_α est un antidéplacement.
9. Déterminer une équation de l'image (H') par φ_α .

Situation d'évaluation n°21

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On se propose d'étudier l'ensemble (E) des points M d'affixe z du plan, du plan complexe tels que : $\ln[i(z^2 + 3z + 2)]$ existe.

1. Démontrer que (E) est l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant : $\begin{cases} x^2 + 3x + 2 - y^2 = 0 \\ 2xy + 3y < 0 \end{cases}$.

2. a) Justifier que (E) est inclus dans une hyperbole dont on précisera le centre, les sommets et asymptotes.
- b) Construire (E) .
3. Soient (E') la portion du plan délimitée par (E) , l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -1/2$ et $x = 1$.

Calculer le volume du solide engendré par la rotation de (E') autour de l'axe des abscisses.

Exercice 2

Soit (E) l'équation suivante dans $\mathbb{C}$: $z^3 - (3i + 2)z^2 + (5i - 1)z - 2i + 2 = 0$.

1. Sachant que (E) admet une solution réelle, la calculer.
2. Résoudre (E) .

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité: 1cm).

Soit $A_1(1; 0)$; $A_2(1; 1)$ et $A_3(0; 2)$.

3. Démontrer qu'il existe une similitude directe S de centre O qui transforme A_1 en A_2 et A_2 en A_3 .

Donner les éléments caractéristiques de S .

4. On considère la suite de points (A_n) définie par : $A_{n+1} = S(A_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Placer les points $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5. $d(A, B)$ désigne la distance entre les points A et B .

a) Pour tout n , $n \geq 1$ démontrer que : $d(A_{n+1}, A_{n+2}) = \sqrt{2} \cdot d(A_n, A_{n-1})$.

b) En déduire la longueur L_n de la ligne brisée $A_1 A_2 \dots A_n$.

PROBLEME (BAC C – BENIN, Session de remplacement)

On considère l'équation différentielle : $(E): y'' - y' - 2y = -1 - 2x$.

1^{ère} Partie

1. a) Résoudre l'équation différentielle $(E_1): y'' - y' - 2y = 0$.
- b) Déterminer une fonction polynôme du 1^{er} degré g solutions de (E) .
- c) Soit φ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que φ est une solution de (E) si et seulement si la fonction $\varphi - g$ est une solution de (E_1) .

En déduire la forme générale des solutions de (E) .

2. Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, passe par le point $A(0; 2)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 2x - 3$.
3. Soit f la fonction numérique définie par $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} + e^{2x} + x$.
 - a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 - b) Déterminer la fonction dérivée f' de f .
 - c) Démontrer que l'équation : $2x^3 + x - 1 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que l'on a : $\alpha \in]0,5; 0,6[$.
 - d) En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - e) Dresser le tableau de variation de f .
 - f) Etudier les branches infinies de la courbe représentative (C) de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ puis construire (C) .

2^{ème} Partie

On considère la courbe (Γ) dont une équation cartésienne dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est : $e^{2-y} + e^{2y-4} + y + 1 = 0$.

4. a) Déterminer l'image de (C) par la translation t de vecteur $\vec{u}(2; 3)$.
 - c) En déduire que l'on a : $(\Gamma) = (Sot)(C)$, où S désigne la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$.
5. Construire (Γ) .
6. a) Démontrer qu'il existe une symétrie glissée σ telle que l'on ait : $(C) = \sigma(\Gamma)$.
 - b) Déterminer l'axe et le vecteur de σ .

3^{ème} Partie

On considère l'application π du plan (P) muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = i\bar{z} - 2 - 3i$ et on pose $\pi \circ \pi = \theta$.

7. Démontrer que θ est une translation que l'on précisera.
8. On considère la suite de points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} M_0 = A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ M_{n+1} = \theta(M_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Démontrer que tous les points M_n sont alignés sur une droite (D) dont on donnera une équation cartésienne.

Situation d'évaluation n° 22 : TEST APMB-2004, Série C et E

Exercice 1

On lance à la fois deux dés tétraédriques parfaits D_1 et D_2 , on attend qu'ils s'immobilisent et on note le nombre marqué sur la face inférieure de chacun d'eux. Sur les 4 faces de D_1 sont marqués : 0, 1, -1, 2. Sur les faces de D_2 sont marqués : 1, -1, 0, 1. On note α le nombre relevé sur D_1 et β celui relevé sur D_2 .

Soit f la transformation du plan d'écriture complexe : $z' = \overline{\alpha z} + 1 + i$, avec $a = \alpha + i\beta$.

1. a) Déterminer la probabilité pour que f soit une similitude indirecte.
- b) Déterminer la probabilité pour que f soit un antidéplacement.
2. On pose dans cette question : $\alpha=1$ et $\beta = -1$
 - a) Quelle est la nature précise de f ?
 - b) Déterminer les éléments caractéristiques de f .

Exercice 2

On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par les relations :

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t} dt \text{ et } I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t} dt, \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. a) Comparer t^n et t^{n+1} , lorsque $0 \leq t \leq 1$ et $n > 0$.
3. Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.
 - a) Démontrer que pour tout t élément de $[0; 1]$, on a : $0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2}(1-t)$.
 - b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.
 - c) Déterminer la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème

Partie A

L'espace orienté (E) est muni d'un repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives : $x - y + z - 3 = 0$ et $2x - y - 3z + 4 = 0$.

1. Déterminer l'expression analytique du demi-tour d'axe $(P) \cap (Q)$.
2. Soit le vecteur $\vec{u} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

Déterminer une représentation paramétrique du plan (P') tel que $t_{\vec{u}} = f \circ S_{(P')}$, où f et $S_{(P')}$ désignent respectivement les réflexions de plan (P) et (P') , et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

3. On considère le point $O(0; 4; 0)$ et les vecteurs $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + 2\vec{j})$ et $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(6\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k})$.
 - a) Démontrer que $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est un repère orthonormé de (Q).

b) On désigne par h la restriction de f au plan (Q) .

Déterminer l'expression analytique de h relativement au repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Partie B :

On suppose que le plan complexe (Q) est muni du repère orthonormé direct $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

A tout point $M(x, y)$ du plan associé, lorsque cela est possible, le nombre complexe

$z_{m,a} = \frac{1}{\ln 2} \ln(2^x + a^2 + 1) + i[2x(-m + \ln(ax)) - y]$, où m et a sont des paramètres réels avec a différents de zéro.

4. Déterminer l'ensemble des points M tels que $z_{m,a}$ soit un nombre réel strictement positif.

On définit ainsi une famille de courbes $(C_{m,a})$ d'équation : $y = f_{m,a}(x)$.

5. a) Déterminer le domaine de définition $D_{m,a}$ de $f_{m,a}$.

b) Etudier les variations de $f_{m,a}$.

6. On considère maintenant la fonction g définie par :
$$\begin{cases} g(x) = 1 - \sqrt{1 - 2x - 2x^2}, & \text{si } x \leq 0 \\ g(x) = f_{1,1}(x) & , \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (Γ) la courbe de g dans le repère R .

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en $x = 0$ puis interpréter graphiquement le résultat de la dérivabilité.

b) On désigne par (Γ_1) la courbe dans R de la restriction de g à l'intervalle $]-\infty, 0[$.

Démontrer que (Γ_1) est la portion d'une ellipse (E) dont on précisera : le centre, les sommets, les foyers et les directrices.

c) Construire, avec soin la courbe (Γ) .

d) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel t , le nombre de solutions de l'équation : $g(x) - x - t = 0$

e) Calculer l'aire A du domaine plan délimité par la courbe (Γ) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = e$.

Partie C

On désigne par F la transformation du plan d'expression analytique :
$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

7. a) Démontrer que F est une affinité dont on donnera le rapport, la direction et l'axe.

b) Déterminer une équation cartésienne de $F(\Gamma_1)$.

8. Pour tout entier naturel n , on pose : $M_{n+1} = F(M_n)$.

- a) Déterminer en fonction de x_o, u_o et n les coordonnées (x_n, y_n) de M_n .
- b) Déterminer l'ensemble des points M_n , pour lesquels x_n et y_n ont une limite nulle, lorsque n tend vers $+\infty$.

Situation d'évaluation n° 23 : (TEST APMB – 2005, Série C)

Exercice 1

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Soit f_1 et f_2 les applications de (P) dans (P) d'écriture complexe respectives $z' = 2i\bar{z} - 3$ et $z' = i\bar{z} + 2i$.

On pose $f_3 = f_2 \circ f_1$.

- 1. Donner la nature et caractériser chacune des applications f_1, f_2 et f_3 .
- 2. a, b, c sont trois nombres réels tels que $a + b + c = 1$.

Soit l'application $f : (P) \rightarrow (P)$
 $M \mapsto M'$

Où M' est le barycentre des points pondérés $\{(f_1(M), a); (f_2(M), b); (f_3(M), c)\}$

- a) Déterminer l'expression analytique de f .
- b) En déduire l'écriture complexe de f .
- 3. a) Pour quelles valeurs de (a, b, c) , f est-elle un déplacement ?
b) Caractériser ce déplacement dans chacun des cas trouvés.

Exercice 2

Un sac contient 5 boules indiscernables au toucher portant les inscriptions : 4, 6, 8, 10, 12 .

- 1. On tire simultanément deux boules du sac et on désigne par a et b les inscriptions qu'elles portent.

Calculer la probabilité de l'évènement : A « l'équation $ax + by = 2$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ ».

- 2. A l'issue d'un tirage d'une paire de boules, on désigne par X la variable aléatoire qui prend la valeur 2 si A est réalisé et la valeur -2 dans le cas contraire. On effectue $2n$ tirage successifs d'une paire de boules avec remise ($n \in \mathbb{N}^*$). On désigne par Y_n la somme des valeurs prises par X .

Calculer les probabilités : $P(\{Y_n = 0\})$ et $P(\{Y_6 = 6\})$.

- 3. On considère la suite de terme général $U_n = \frac{2(n!)^2}{(2n)!} P(\{Y_n = 0\})$.

Calculer la limite de la suite de terme général $S_n = \sum_{i=1}^n u_i$.

PROBLEME

Partie A

On considère l'équation différentielle $(E): y'' - 2(\ln 2)y' + (\ln 2)^2 y = \frac{-2x}{x^2 \ln 2}$; où x est élément de l'intervalle $]0, +\infty[$.

1. Vérifier que $g : x \mapsto \frac{-2x}{x^2 \ln 2}$ est solution de (E) .
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_1): y'' - 2(\ln 2)y' + (\ln 2)^2 y = 0$.
3. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.
 - a) Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est solution de (E_1) .
 - b) En déduire toutes les solutions de (E) .
4. On désigne par h la fonction solution de (E) dont la courbe (C) dans un repère du plan admet en son point d'abscisse 1 (un) une tangente d'équation $y = \left(2 + \frac{2}{\ln 2}\right)x - 2$.
 - a) Déterminer $h(x)$ pour tout x élément de $]0, +\infty[$.
 - b) Calculer $h'(x)$ pour tout réel strictement positif x .
5. On considère la fonction φ définie sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto 1 + \ln x + \frac{1}{x \ln 2}$.
 - a) Démontrer que $\forall x \in]0, +\infty[, \varphi(x) \geq 2 - (\ln \circ \ln)(2)$.
 - b) Acheter l'étude des variations de h .
6. a) Etudier les branches infinies de (C) .
c) Construire la courbe (C) .
7. Calculer une valeur approchée de l'intégrale $J = \int_1^{1,5} \frac{2x}{\ln 2} (1 + \ln x) dx$ par la méthode des trapèzes (on subdivisera l'intervalle $[1; 1,5]$ en 5 (cinq) intervalles de même amplitude).

Partie B

Dans le plan orienté, une unité étant choisie, on considère un rectangle ABCD tel que $AB = \sqrt{2}$; $AD = 1$; $(\widehat{AB, AD})$ est un angle direct; I désigne le milieu de $[AB]$.

8. Soit E l'ensemble des points M du plan tels que $MD^2 - MB^2 = 1$.
 - a) Vérifier que les points C et I appartiennent à E.
 - b) Déterminer et construire l'ensemble E.
 - c) En déduire que les droites (BD) et (CI) sont perpendiculaires.

9. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(A; \vec{u}; \vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. S est la similitude directe telle que $S(D) = C$ et $(SoS)(D) = B$.
- Déterminer le rapport et l'angle de S .
 - Démontrer que S transforme B en I .
 - En déduire une autre justification de l'orthogonalité des droites (BD) et (CI) .
 - Démontrer que le centre Ω de la similitude S est le point d'intersection des droites (BD) et (CI) .
10. Déterminer l'image de la courbe (C) de la question 6.b) par la similitude (S) .

Situation d'évaluation n°24 : (Test APMB Série C 2007)

EXERCICE 1

On considère les entiers naturels n vérifiant la condition : n est le produit de trois entiers naturels premiers a, b et c ($a < b < c$) dont l'un est la somme des deux autres, par exemple 286 est un tel nombre, car $286 = 2 \times 11 \times 13$, avec $13 = 2 + 11$.

- Déterminer a .
- n_1 et n_2 étant deux entiers naturels, démontrer que $(n_1 \leq n \leq n_2)$ équivaut à $(\sqrt{\frac{n_1}{2} + 1} - 1 \leq b \leq \sqrt{\frac{n_2}{2} + 1} - 1)$.

3. En déduire les entiers naturels n pour les quels : $n_1 = 6 \times 10^4$ et $n_2 = 8 \times 10^4$.

EXERCICE 2

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points N et M d'affixes respectives $z = 2\cos^2\theta + i\sin 2\theta$ et $z = \frac{1}{z^2}$ avec $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

- Calculer le module et un argument de z .
 - En déduire le module et un argument de Z .
 - En déduire que $Z = \frac{1}{4}(1 - \tan^2\theta) - \frac{1}{2}i \tan\theta$.
- Démontrer que N appartient à la courbe (C) d'équation : $x^2 + y^2 - 2x = 0$.
- Démontrer que M appartient à la courbe (Γ) d'équation $4x + 4y^2 = 1$.
 - Déterminer la nature de (Γ) et ses éléments caractéristiques.
 - Construire (Γ) .
- Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à (Γ) en son point $A(0; y_A)$ avec $y_A > 0$.

PROBLEME

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1 - e^{-2x}}$. (C) désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f .
2. a) Démontrer que : $(\forall x \in D - \{0\}, \frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{2}{x}(\frac{e^{-2x}-1}{-2x})}$.
 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat géométrique.
3. a) Démontrer que la courbe (Γ) d'équation $e^x + y^2 - 1 = 0$ avec $y \geq 0$ est l'image de la courbe (C) par une affinité ϕ .
 b) Déterminer l'expression analytique de ϕ .
4. a) Etudier les variations de f .
 b) Construire la courbe (C).
5. Soit la fonction $g : D \rightarrow f(D)$

$$x \mapsto g(x) = f(x)$$
 - a) Démontrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} .
 - b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout x élément de $f(D)$.
 - c) Construire la courbe (C') de g^{-1} dans le même repère que (C).
 - d) Calculer l'intégrale $\int_0^1 g^{-1}(x) dx$.
6. a) Démontrer que : $(\forall x \in D - \{0\}, f(x) = f'(x)(-1 + \frac{1}{2[1+f(x)]} + \frac{1}{2[1-f(x)]})$.
 b) α étant un réel tel que $0 < \alpha < \ln 2$, calculer l'aire $A(\alpha)$ de la surface limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation respectives $x = \alpha$ et $x = \ln 2$.
 c) calculer $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} A(\alpha)$. Que représente cette limite ?
- 7.) Soit (U_n) la suite réelle définie par :
$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \frac{1}{e^{2n}}} \end{cases}$$

On pose $V_n = U_n^2 - U_{n-1}^2$ pour tout entier naturel $n, n \geq 2$.

 - a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.
 - b) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = V_2 + V_3 + \dots + V_n$.
 - c) En déduire : $U_n = \frac{f(n)}{f(1)}$ pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$.
 - d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Situation d'évaluation n°25 : TEST APMB Série C 2013

Contexte d'évaluation

Djibodé est un contrebandier des produits pétroliers. Après les menaces du gouvernement Béninois, il décide de mettre fin à cette activité et de faire l'élevage de lapins. Il sollicite l'aide d'un soudeur pour concevoir des clapiers. Le soudeur consulté a identifié deux catégories de matériaux C_1 et C_2 . Le nombre a de matériaux de type C_1 et le nombre b de matériaux de type C_2 vérifient les relations $a+b = 96$, $\text{PPCM}(a, b) = 180$ et $a > b$.

Bio fils du soudeur en classe de terminale scientifique , veut déterminer les nombres a et b . Il voudrait aussi décorer ces clapiers à l'aide des lignes courbes , et étudier certaines configurations de l'espace .

Tache : tu es invité(e) à répondre aux préoccupations de Bio en résolvant les trois problèmes suivants .

Problème 1

- 1) On pose $\text{PGCD}(a, b) = d$.
 - a) Justifie que d divise 96 et d divise 180.
 - b) Donne les valeurs possibles de d .
- 2) a) Démontre que si deux entiers naturels sont premiers entre eux alors la somme et le produit de ces entiers sont premiers entre eux .
 - b) Déduis en le nombre a de matériaux de type c_1 et le nombre b de type c_2 .

Problème 2

Un des clapiers a la forme d'un cube ABCDEFGH d'arête l'unité . On note (P) le plan (ACG) et φ la réflexion du plan (P). L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct

$R = (A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$; lorsque M est un point de l'espace , on désigne par M_1 et par M_2 ses projetés orthogonaux respectivement sur $(A; \overrightarrow{AB})$ et $(A; \overrightarrow{AD})$.

- 3) a. Détermine les coordonnées des points M_1 et M_2 en fonction de celles de M .
 - b. Détermine l'expression analytique de la réflexion φ .
- 4) (Γ) désigne l'ensemble des points M du plan ABC vérifiant :

$$(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{M'A}) \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AM'} \cdot \overrightarrow{AM_1} + (\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AM} = 1$$
 où M' désigne l'image de M par φ .
 Démontre que (Γ) est l'ensemble des points $M(x, y, 0)$ vérifiant : $x + xy - 2y - 1 = 0$.
- 5) On pose : $S(2, -1, 0)$; $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{BD}$.
 - a.) Justifie que $(S; \vec{u}; \vec{v})$ est un repère orthonormé du plan (ABC).
 - b Détermine une équation cartésienne de (Γ) et construis (Γ) . Tu préciseras ses foyers , ses sommets , directrices et son excentricité.
- 6) On note f l'application de l'espace d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + y + z - 1) \\ y' = \frac{1}{2}(x - y - z) \\ z' = z \end{cases}$$
 - a. Détermine l'ensemble (Δ) des points invariants par f .
 - b. Démontre que si M appartient au plan (ABC) alors $M' = f(M)$ appartient au plan (ABC).
- 7) On désigne par S la restriction de f au plan (ABC) .

- a.) Démontre que l'écriture complexe de S est donnée par $z' = \frac{1}{2}(1+i)\bar{z} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$, où z et z' désignent les affixes respectives de M et $M' = s(M)$, vu comme points du plan (ABC) .
- b) Déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de s .
- c) Détermine l'image (Γ') de (Γ) par s .

Problème 3

L'une des lignes courbes qui servira à décorer les clapiers est la courbe (C) représentative, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, de la fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = e^{x-1} - x^2 + 2x, & \text{si } x < 1 \\ g(x) = 2 + \ln\left(\frac{x+1}{2x}\right), & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- 8) Justifie que l'ensemble D de définition de g est $\mathbb{R}$.
- 9) Etudie la dérivabilité de g en $x_0 = 1$.
- 10) Etudie les variations de g .
- 11) a. Démontre que la courbe (C) admet deux asymptotes dont l'une est une partie d'une conique (T) .
b Précise la nature les éléments caractéristiques de cette conique.
- 12) Construis (C) et (T) .

Situation d'évaluation n° 26 : TEST APMB 2014

Contexte :

Pour rendre la défense de son équipe très performante pour le prochain championnat, le staff technique du « caïman FC » a décidé

d'adopter le schéma défensif ci-contre réalisé dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ judicieusement choisi.

Dans ce plan A, A', B et B' sont des points fixes d'affixes respectives $1, -1, i$ et $-i$.

Selon le directeur technique de l'équipe, lorsqu'un adversaire arrive à la position M d'affixe Z , les défenseurs latéraux du « caïman » doivent se positionner en C_1 et C_2 d'affixes respectives Z_1 et Z_2 telles que les triangles BMC_1 et AMC_2 soient rectangles et isocèles avec $\text{mes}(\overrightarrow{C_1B}; \overrightarrow{C_1M}) = \text{mes}(\overrightarrow{C_2M}; \overrightarrow{C_2A}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. La tactique est telle que, les joueurs C_1, C_2 et le gardien de but situés en O doivent se retrouver au sommet d'un triangle équilatéral. Les points A et B sont définis à partir de la transformation T d'écriture complexe $Z' = -i\bar{Z} + 2i$.

OLOGBON jeune de l'équipe « caïman FC » et élève en terminale scientifique est très impressionné par ce schéma tactique. Il souhaite étudier les principes mathématiques qui sous-tendent ce schéma.

Tâche : Tu es invité(e) à résoudre les trois problèmes ci-dessous qui constituent les préoccupations de OLOGBON.

Problème 1

- 1) a. Justifie que $Z - Z_1 = i(i - Z_1)$ et $1 - Z_2 = i(Z - Z_2)$.
b. Déduis que $Z_1 = \left(\frac{1+i}{2}\right)(Z+1)$ et $Z_2 = \left(\frac{1-i}{2}\right)(Z+i)$.
- 2) a. Démontre que $OC_1 = OC_2$ si et seulement si $|Z+1| = |Z+i|$.
a. Déduis-en l'ensemble (Δ) des points M du plan tel que $OC_1 = OC_2$.
- 3) a. Démontre que $OC_1 = OC_2$ si et seulement si $|Z+1|^2 = 2|Z|^2$.
b. Démontre que pour tout nombre complexe Z, $|Z+1|^2 = 2|Z|^2$ équivaut à $|Z-1|^2 = 2$.
c. Déduis-en l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $OC_1 = OC_2$.
- 4) Justifie que pour tout M appartenant à $(\Delta) \cap (\Gamma)$, le triangle OC_1C_2 est équilatéral
- 5) On pose $Z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Détermine par ses coordonnées les points M pour lesquels OC_1C_2 est un triangle équilatéral.
- 6) Démontre que la transformation T est une symétrie glissée dont tu détermineras les éléments caractéristiques.

Problème 2

En vue d'évaluer la tactique mise en place, le staff technique a décidé de mettre en place une caméra dans l'espace du terrain rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Cette caméra doit être située dans une surface (S) d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Pour qu'elle puisse enregistrer convenablement les déplacements de tous les joueurs, elle doit être placée en point d'intersection de la surface (S) avec un plan parallèle au plan (xoy) .

OLOGBON veut déterminer la position exacte de cette caméra.

- 7) On note R la réflexion de plan (xoy) .
a. Détermine l'expression analytique de R.
b. Démontre que (S) est globalement invariant par R.
- 8) E et F sont les points de coordonnées respectives $(3; 1; -3)$ et $(-1; 1; 1)$.
a. Détermine une représentation paramétrique de la droite (EF).
b. Démontre que la droite (EF) est incluse dans (S).
- 9) a. Détermine la nature de la section de (S) par un plan parallèle au plan (xoy) .
b. Précise les éléments caractéristiques de la courbe (C), intersection de (S) et du plan d'équation $Z=68$.
- 10) L'emplacement idéal pour la caméra se trouve en un point K de (C) d'abscisse a et d'ordonnée b telles que $(a; b)$ soit solution du système
$$\begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a; b) = 440 \end{cases}$$
.
a. Démontre que $\text{pgcd}(a; b) = 1$ ou $\text{pgcd}(a; b) = 5$.
b. Détermine les coordonnées du point K.

Problème 3

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (unité graphique 2cm), on considère la famille de fonction $f_k (k \in \mathbb{N}^*)$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = x^k e^{-x}$ et de courbes représentatives (C_k)

- 11) a. Démontre que les courbes (C_k) passent toutes par deux points fixes dont tu préciseras les coordonnées.
- b. Etudier les variations de f_k lorsque k est impair et lorsque k est pair.
- c. Etudier la position relatives de (C_k) et de (C_{k+1}) sur $[0; +\infty[$. Déduis-en les positions relatives de (C_1) et (C_2) .
- d. Représente (C_1) et (C_2) dans le même repère.

12) Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \exp(x \ln x - x) & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \quad \text{de courbe représentative (c).}$$

- a. Etudie la continuité et la dérivabilité de g en 0.
- b. Etudie les variations de g .
- c. Construis (c) dans le même repère que (C_1) et (C_2) .
- d. Résous l'inéquation $g(x) \geq 1$ dans $]0; +\infty[$.

13) On considère les point $M_k (k; f_k(k)) ; (k \in \mathbb{N}^*)$.

Justifie que M_k est un point de (c).

BAC C BENIN 2002**DUREE : 04 HEURES**

Le candidat doit traiter les deux Exercices et le Problème.

EXERCICE 1

Soit f l'application $f : \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{3 + \sqrt{3} \sin x + \cos x}$$

1. a) Justifier que f est dérivable sur $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

b) Vérifier que pour tout x de l'intervalle $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$, $f'(x) = -\sqrt{4 - \left[\frac{1}{f(x)} - 3\right]^2} \times [f(x)]^2$.

c) Déterminer l'image J de l'intervalle $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ par l'application f .

2) g est l'application définie de $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ vers J par : $g(x) = f(x)$.

a) Démontrer que g est bijective.

b) Déterminer le plus grand ensemble K sur lequel g^{-1} est dérivable.

c) Exprimer, pour tout x élément K , $(g^{-1})'(x)$.

3. a) Calculer $g(-\frac{\pi}{3})$ et $g(0)$.

b) Calculer l'intégrale $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \sqrt{(5x-1)(-x+1)}} dx$.

EXERCICE 2

1. On considère deux nombres réels non nuls a et b et la fonction numérique g de variable réelle x définie par $g(x) = ae^{-2bx}$.

Déterminer les réelles a et b pour que l'on ait :

pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $g''(x) - 6g'(x) + 9g(x) = 50e^{-2x}$.

2. f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose : $h(x) = 2e^{-2x}$ pour tout réel x .

Démontrer que pour x élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) - 6f'(x) + 9f(x) = 50 - 2^{-x}$ équivaut à $(f-h)''(x) - 6(f-h)'(x) + 9(f-h)(x) = 0$.

3.a) Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 6y' + 9y = 0$.

b) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) : $y'' - 6y' + 9y = 50e^{-2x}$.

4) Déterminer la solution particulière φ de l'équation différentielle (E) telle que

$$\begin{cases} \varphi(0) = 3 \\ \varphi'(0) = -10 \end{cases}$$

PROBLEME

ABCDEFGH est un cube tel que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé direct de l'espace $\mathcal{E}$.

On pose $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$. On munit l'espace $\mathcal{E}$ du repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On

considère dans $\mathcal{E}$ les points $K(\frac{1}{2}, 0, 0)$; $L(\frac{1}{2}, 1, 0)$; $S(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Partie A

1) Soit t l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MF}$.

Justifier que t est une translation.

2) a) Calculer la distance du point S au plan (ABC) .

b) En déduire que $SABCD$ est une pyramide.

c) Calculer le volume de l'image par t de la pyramide $SABCD$.

3) Soit f_1 la réflexion de plan (SAB) et f_2 la réflexion de plan (SAD) .

a) Démontrer que les plans (SAB) et (SCD) sont perpendiculaires.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f_1 \circ f_2$.

4) a) Déterminer l'expression analytique de f_1 .

b) Déterminer l'image par $f_1 \circ f_2$ de la droite (SC) .

5) On pose $P_1=(SAB)$ et $P_2=(SCD)$.

Déterminer la position relative de $t(P_1)$ et de $t(P_2)$.

Partie B

On désigne par (π) le plan orienté par vecteur $\vec{l}$, muni du repère orthonormé direct

$R=(A, \vec{j}, \vec{k})$. Soit r l'application de (π) dans (π) qui à tout point $M(X, Y)$ associe le point

$M'(X', Y')$ tel que :
$$\begin{cases} X' = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y - 1 + \sqrt{2}) \\ Y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y - 1) \end{cases}$$
 et h l'application de (π) dans (π) qui à tout point

$M(X, Y)$ associe le point $M'(X', Y')$ et que :
$$\begin{cases} X' = \frac{\sqrt{2}}{2}X - \sqrt{2} + 1 \\ Y' = \frac{\sqrt{2}}{2}Y \end{cases}.$$

6) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de r .

7) On pose $s=r \circ h$. On admet que (π) est le plan complexe.

Soit z l'affixe du point M et z' l'affixe du point $s(M)$.

a) Exprimer z' en fonction de z .

b) Déterminer la nature de s et préciser ses éléments caractéristiques.

8) Soit (Γ) la courbe d'équation $4X^2+Y^2+16X+7=0$ dans le repère R .

a) Construire (Γ) .

b) On pose $(\Gamma')=s(\Gamma)$.

Déterminer la nature de (Γ') .

c) Préciser les coordonnées du centre et des sommets de (Γ') .

BAC C BENIN 2003

DUREE : 04 HEURES

Le candidat doit traiter les deux Exercices et le Problème.

EXERCICE 1

On considère un entier naturel n dont la décomposition en produit de facteurs premiers est :

$n=2^\alpha \times 3 \times 19^\beta$ où α et β sont des entiers naturels tels que : $\alpha < \beta$ et $(\alpha+1)(\beta+1)=8$.

1. Déterminer l'entier naturel n .

2. Déterminer l'ensemble des diviseurs de 456.

3. On considère l'équation suivante : $(E) : x^2 - \lambda x = 456$, λ étant un paramètre entier naturel.

Détermine l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles (E) a des solutions dans $\mathbb{N}$.

EXERCICE 2

Au second cycle d'un établissement, 66% des élèves font une série scientifique et 34% font une série littéraire. D'autre part, on constate que : 75% des élèves en série scientifique s'intéressent aux mathématiques et 87% des élèves en série littéraire ne s'intéressent pas aux mathématiques.

On choisit au hasard un élève de second cycle dans ce collège et on désigne par S l'événement « l'élève fait une série scientifique » et M l'événement « l'élève s'intéresse aux mathématiques ».

1) Calculer la probabilité de chacun des événements :

« S et $\bar{M}$ », « S et M », « $\bar{S}$ et $\bar{M}$ », « $\bar{S}$ et M ».

En déduire la probabilité de M.

2) Déterminer la probabilité pour qu'un élève ne s'intéressant pas aux mathématiques soit en série scientifique.

3) On choisit au hasard 7 élèves du second cycle dans le collège.

Déterminer la probabilité d'obtenir exactement 4 élèves s'intéressant aux mathématiques

NB : les résultats sont donnés à 10^{-4} près.

PROBLEME

(P) désigne le plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $R=(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1cm)

On considère la fonction numérique f_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_m(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|} & \text{si } x \leq 3 \\ f_m(x) = (x - 3) - m \ln(x - 3) & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

m étant un paramètre réel.

On désigne par (Γ_1) et (C_m) les courbes représentatives des restrictions de f_m à $]-\infty, 3]$ et à $]3, +\infty[$ dans le plan (P).

PARTIE A

1.a) Déterminer que (Γ_1) est une portion de la réunion d'un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon et d'une hyperbole H dont on précisera le centre, les sommets et les asymptotes.

b) Construire la courbe (Γ_1) .

c) En déduire la valeur de $\int_1^3 f_m(x) dx$.

2. Etudier suivant les valeurs de m les variations de f_m sur $]3, +\infty[$.

3. a) Détermine l'ensemble I des valeurs de m pour lesquelles la fonction f_m admet un minimum sur $]3, +\infty[$.

b) Soit B_m le point de (C_m) ayant pour ordonnée le minimum de f_m .

Déterminer l'ensemble décrit par B_m lorsque m varie dans I.

4. a) Etudier suivant les valeurs de m , la position relative de (C_m) et de la droite (Δ) d'équation $y = x - 3$.

b) Construire la courbe (C_2) .

c) Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 4.

Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_2) , la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 4$ et $x = \lambda$.

PARTIE B

On considère la rotation r du plan (p) de centre $J(3,0)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

5. On pose : $(\Gamma) = \{M(x,y) \in C_2 | x \geq 5\}$.

Déterminer l'image (Γ) de (C_2) par r .

6. a) Démontrer qu'il existe une et une seule droite (Δ') passant par le point J , que l'on précisera, telle que l'on ait : $r = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ où $S_{\Delta'}$ et S_{Δ} désignent respectivement les symétries orthogonales de (P) par rapport à (Δ) et à (Δ') .

b) En déduire une méthode géométrique pour la construction de la courbe (Γ) .

c) Construire (Γ) .

BAC C BENIN 2004

DUREE : 04 HEURES

Le candidat doit traiter les deux Exercices et le Problème.

Exercice 1

Le plan complexe (P) est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On lance à la fois deux dés parfaits D_1 et D_2 et on note le nombre marqué sur la face supérieure de chacun d'eux lorsqu'ils sont retombés. Sur les faces du dé D_1 , sont marqués $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $0,1,-1,\sqrt{3}$, -2 . Sur les faces du dé D_2 sont marqués $1,-1,\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 0, 1$.

On note u le nombre révélé sur D_1 et v celui révélé sur D_2 .

On définit les transformations f et g du plan (P) , d'écriture complexes respectives :

$z' = az + 1 + i$ et $z' = a\bar{z} + i$ avec $a = u + iv$.

1) a. Déterminer la probabilité pour que f soit une similitude plane directe.

b. Calculer la probabilité pour que g soit un antidéplacement.

2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A « f est une rotation d'angle droit ».

B « f est une homothétie ».

C « f est une similitude plane directe de centre I ».

3) On donne $u=1$ et $v=-1$ et on pose $h=g \circ f$.

a. Déterminer la nature de h .

b. Préciser les éléments caractéristique de h .

c. Déterminer les coordonnées du centre et des sommets de l'image de l'ellipse (E)

d'équation cartésienne $x^2 + 4y^2 = 2$ par h^{-1} .

EXERCICE 2

1. On considère la fonction numérique $u :]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$$

a) Détermine l'ensemble de définition D de u .

b) Etudier le sens de variation de u .

c) Dresse le tableau de variation de u .

2. Soit g la fonction numérique de la variation réelle par : $g(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + 1} dt$.

a) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Préciser la fonction g', dérivée première de g sur $\mathbb{R}$.

3. on pose $f = g \circ u$.

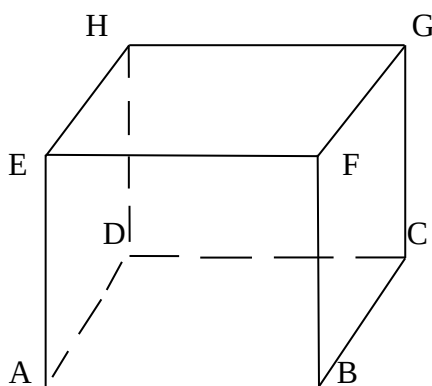
a) Justifier que f est dérivable sur $]-\infty ; 0]$.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à $]-\infty ; 0]$.

c) En déduire l'expression de f en fonction de x, pour x élément de $]-\infty ; 0]$.

PROBLEME

On considère dans l'espace le cube A B C D E F G H suivant :



On désigne par (p) le plan (BGE) et par (Q) le perpendiculaire à (P) et contenant la droite (BG)

Soit I le point d'intersection de (P) et de la droite (DF).

PARTIE A

1) a. Démontrer que les droites (EG) et (EB) sont orthogonales respectivement aux plans (DHF) et (DFG).

b. En déduire que la droite (DF) est orthogonale au plan (P).

2) a. Déterminer $(Q) \cap (P)$.

b. Déterminer que (DF) est parallèle à (Q).

3) a. Démontrer que A est le barycentre des points B, C et D affectés des coefficients que l'on déterminera .

b. Déterminer l'ensemble S des points M de tel que : $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = MC^2$.

4) Doit h l'application de E dans E qui à tout point M de E associe le point M' de E défini par :

$$\overrightarrow{CM'} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{AM} = \vec{0}.$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h .

PARTIE B

L'espace E est associé par le repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ d'unité graphique : 1cm

5)a. Déterminer une équation cartésienne de P .

b. Déterminer les coordonnées de I .

6) Déterminer une équation cartésienne de Q .

7) Calculer le volume de l'image par h de la pyramide $IABCD$ de base $ABCD$.

PARTIE C

Soit f l'application affine de E dans E d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x + 2y - 2z + 2) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + y + 2z - 2) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + 2y + z + 2) \end{cases}$$

8) Soit M un point quelconque de E , d'image M' par f .

a) Démontre que le milieu du segment $[MM']$ appartient au plan (P) .

b) Démontrer que $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur normal de (P) .

9) Déterminer l'ensemble des points de l'espace invariants par f .

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

BAC C BENIN 2005

DUREE : 04 HEURES

Le candidat doit traiter les deux Exercices et le Problème.

Exercice 1

1) p_1, p_2, p_3 sont des entiers naturels premiers et constituent dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 2.

a) Démontre que un et un seul des nombres p_1, p_2, p_3 est un multiple de 3

b) Détermine p_1, p_2 et p_3 .

2) x, y, z sont des entiers relatifs tels que : $3x + 5y + 7z = 0$.

a. Démontre que l'on a : $y \equiv z[3]$.

b. En déduire que x, y et z s'écrivent :

$$\begin{cases} x = -5p - 7q - 4r \\ y = 3p + r \\ z = 3q + r \end{cases} \quad r \in \{0, 1, 2\} \text{ et } (p, q) \in \mathbb{Z}^2.$$

3) $ABCDEFGH$ est un pavé droit de centre O tel que $AB=10, AD=5$ et $AE=5$.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{10} \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{5} \overrightarrow{AD}$, $\vec{k} = \frac{1}{5} \overrightarrow{AE}$ et (P) est un plan d'équation $3x+5y+7z=0$ dans ce repère.
Détermine l'ensemble des points à coordonnées entières de (P) qui sont intérieurs au pavé ABCDEFGH.

EXERCICE 2

Soit f et g deux fonctions numériques de variable réelle x , définies par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{x \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right|}, & \text{si } x \neq 1; \\ f(1) = 0 \end{cases} \quad g(x) = \frac{1}{x-1} + \ln \left(\left| \frac{x-1}{x} \right| \right).$$

On désigne par (c) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1) Etudier les variations de g .
- 2) a. Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α telle que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.
b. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- 3) a. Etudier la continuité de f en 1.
b. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = 1$.
c. Etudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 1, puis donner une interprétation géométrique de chacun des résultats.
- 4.a. Etudier les variations de f .
b. Prouver que $f(\alpha) = e^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ et donner un encadrement de $f(\alpha)$.
- 5) Construire la courbe (C) et les demi tangentes éventuelles à la courbe (C) en son point d'abscisse 1.

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

PARTIE A

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le polynôme :

$$P(z) = z^3 - [2 + (3 + \sqrt{2})i]z^2 + [-5 - 3\sqrt{2} + (2\sqrt{2} + 1)i]z + \sqrt{2} + 5i\sqrt{2}.$$

- 1) a. Démontre que $p(z)$ peut s'écrire sous la forme $p(z) = (z+1-i)Q(z)$ où $Q(z)$ est un polynôme de degré 2 que l'on précisera.
b. Ecrire sous forme algébrique, le nombre complexe : $d = [3 + (2 - \sqrt{2})i]^2$.
c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$.

- 2) On considère la translation f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z , associe le point $M'=f(M)$ d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \bar{z} - 1 + i(1 + \sqrt{2}).$$

On désigne par A, B et C les points d'affixe respective $-1+i$, $3+2i$ et $i\sqrt{2}$.

- Calculer les affixes respectives des points A' et C' , images respectives de A et C par f .
- En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .

PARTIE B

On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$; on pose $g = f \circ h$.

- Déterminer l'écriture complexe de h .
 - Détermine que g a pour écriture complexe $z' = (1+i)\bar{z} - 1 + 3i$.
- Soit M un point du plan d'affixe $z = x + iy$, avec x et y des entiers. On note $N = g(M)$.
Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont orthogonaux si et seulement si : $5x + 3y = 15$.
 - Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $5x + 3y = 15$.
 - En déduire les points M du plan dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5, 5]$ et tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN}$ soient orthogonaux.

PARTIE C

Soit ϕ la transformation plane d'expression analytique : $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 2 \end{cases}$.

- Démontrer que ϕ est une symétrie glissée.
- Démontrer que $r = g \circ \phi$ a pour écriture complexe : $z' = (1 - i)z$.
- soit (Γ) l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) vérifiant : $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4x + 4y = 0$.
 - Déterminer une équation cartésienne de (Γ') : $(\Gamma') = r(\Gamma)$.
 - Démontre que (Γ') est une ellipse dont on précisera le centre et les sommets.
 - Démontrer que (Γ) est une ellipse dont on précisera le centre et les sommets.

BAC C BENIN 2006

DUREE : 04 HEURES

Le candidat doit traiter les deux Exercices et le Problème.

Exercice 1

- Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
 - l'équation $3x - 4y = 6$.
 - le système $\begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ y \equiv x^2 [8] \end{cases}$.
- On pose $x = 18 + 32n$, $y = 12 + 24n$ et $S = (x + y)^\alpha$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}$.

Déterminer suivant les valeurs de α le reste de la division euclidienne de S par 4 .

Exercice 2

Dans un plan orienté (p) , on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $\text{mes}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k étant un élément de $\mathbb{Z}$. On pose $AB=a$ avec $a \in \mathbb{R}^*_+$. Soit I, J, K et L les milieux respectifs des cotés $[AB], [BC], [CD]$ et $[AD]$. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan (P) tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = a^2.$$

1. Soit M un point du plan (P) .
 - a) Démontrer que : $(M \in (\Gamma)) \iff (MI^2 + MJ^2 + MK^2 + ML^2 = 2a^2)$.
 - b) Justifier que le point O est l'isobarycentre des points I, J, K et L .
 - c) Démontrer que $(M \in (\Gamma)) \iff (MO^2 = \frac{a^2}{4})$.
 - d) Caractériser (Γ) .
2. Soit r la rotation de centre a et d'angle $\frac{\pi}{2}$, s la réflexion d'axe (AB) . on pose $f = r \circ s$ et $(\Gamma') = f(\Gamma)$.
 - a) Déterminer la droite (Δ) telle que $r = \varphi \circ s$ où φ est la réflexion d'axe (AB) .
 - b) Caractériser l'application f .
 - c) Déterminer et construire l'ensemble (Γ') (on prendra $a=2\text{cm}$).

PROBLEME

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{\ln x}{x-\ln x} + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Première partie

1. a) Etudier les variations de la fonction u définie sur $]0, +\infty[$ par $u(x) = x - \ln x$.
b) En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $x - \ln x \neq 0$.
2. Soit D l'ensemble de définition de f .
 - a) Démontrer que $D = [-1, +\infty[$.
 - b) Démontrer que f est continue sur D .
 - c) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.
 - d) Etudier la dérivabilité de f à droite en -1.
3. a) Etudier les variations de f
b) Construire la courbe (C)

Deuxième partie

4. On pose $I = [-1, 0]$ et $J = f(I)$.
Soit la fonction $g : I \rightarrow J$

$$x \rightarrow f(x)$$

et (C') sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

a) Démontrer que g est bijective .

Soit g^{-1} la bijection réciproque de g .

b) Dresse le tableau de variation de g^{-1} puis construire sa courbe (Γ) dans le même repère que (C) .

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour que tout x élément de J .

d) Calculer $\int_{-1}^0 [g^{-1}(x)] dx$.

5. Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe (Γ) , la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x=0$.

a) Calculer $\mathcal{A}$.

b) En déduire l'aire du domaine du plan compris entre les courbes (c') et (Γ) .

Troisième partie

Pour tout nombre réels x et y tels que $0 < y < 1$, on considère le nombre complexe z définie par $Z = x + i \frac{y-1}{1+\sqrt{-y^2+2y}}$ avec $z^2 = -1$. Soit (Γ') l'ensemble des points M d'affixe Z tel que $\arg z = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

6.) Soit u un nombre complexe non nul,

Démontrer que : $\left(\arg u = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(u) = \operatorname{Im}(u) \\ \operatorname{Im}(u) < 0 \end{cases}$.

7.) Soit $M(x ; y)$ un point du plan.

a) Etablir que $(M \in (\Gamma')) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y-1}{1+\sqrt{1-(y-1)^2}} \\ 0 < y < 1 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$.

b) En déduire que $(M \in (\Gamma')) \Leftrightarrow \begin{cases} y = g^{-1}(x) + 1 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$.

c) Démontrer que (Γ') est l'image de (Γ_1) par une translation t et caractériser t avec $(\Gamma_1) = (\Gamma) - \{O ; A\}$.

8.) a) En déduire que (Γ') est l'image de (C') par la composée d'une symétrie orthogonale et de la translation t .

c) Préciser les éléments caractéristiques de cette composée.

BAC C BENIN 2007

DUREE : 4 Heures.

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1

Dans l'espace orienté $(\mathcal{E})$, on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $OA=1$.

- Démontrer que O est le barycentre des points pondérés (A, 1); (B, -2) (C, 1) et (D, -2).
- Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de ($\mathcal{E}$), tel que :
 $MA^2 - 2MB^2 - MC^2 - 2MD^2 = -4$.
- On désigne par S le point de ($\mathcal{E}$), tel que $\overrightarrow{OA} \cap \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OS}$, par d_1 et d_2 les demi-tours d'axes respectifs (OA) et (OB).
 - Préciser la nature de d_1 et d_2 .
 - Déterminer l'image de (Γ) par d_1 et d_2 .
 - Justifier que (A; $\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OS}$; $\overrightarrow{OA}$) est un repère orthonormé direct de ($\mathcal{E}$).
- Soit t l'application de ($\mathcal{E}$), dans ($\mathcal{E}$), qui, à tout point M, associe le point M' tel que
 $\overrightarrow{BM'} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \cap \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM}$.
 - Démontrer que t est une translation dont le vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{OS}$.
 - Déterminer dans le repère (A; $\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OS}$; $\overrightarrow{OA}$) une équation cartésienne de l'image par t du plan (OAB).

EXERCICE2

- Calculer $\int_0^x te^t dt$, pour x appartenant à $\mathbb{R}$.
 - Soient a une constante réelle et u la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^x + a$.
 Soit U la primitive de u sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
 - Exprimer U(x) à l'aide d'une intégrale.
 - En déduire U(x) en fonction de x.

2°) f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\begin{cases} f(x) = xe^x - 2 \int_0^1 f(x) dx, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

Calculer $\int_0^1 f(x) dx$.

Problème

Le plan complexe est du repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) (unité : 2cm).

f est la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 5}$ et ($\mathcal{C}$) la courbe représentative de f.

Partie A

- Etudier les variations de f.
- On pose $K = f(\mathbb{R})$ et on considère l'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x)$
 - Démontrer que g est une bijection.
 - Soit g^{-1} la bijection réciproque de g et ($\mathcal{C}'$) la courbe représentative de g^{-1} .
 Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x élément de K.
- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $y^2 - 2xy - 5 = 0$.

b) En déduire les points de la courbe $(\mathcal{C})$ dont les deux coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

Partie B

Soit M et M' deux points distinct de $(\mathcal{C})$ pour tout x élément de K .

4. a) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe que l'on précisera.
 b) Démontrer que l'application affine s du plan qui transforme M en M' a pour expression analytique : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2x + y \end{cases}$.
- 5) a) Déterminer que l'ensemble des points invariants par s .
 b) Démontrer que pour tout point M d'image M' par s , le milieu du segment $[MM']$ appartient à la droite de repère $(O, \vec{v})$.
 c) Quelle est la nature de s ?
 d) On désigne par Δ l'axe des abscisses.
 i) Déterminer l'image Δ' de Δ par s .
 ii) Démontrer que Δ et Δ' sont les asymptotes de $(\mathcal{C})$.
 iii) Préciser les asymptotes de la courbe $(\mathcal{C}')$.
 e) Construire les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ dans le même repère.

Partie C

On note E l'ensemble des nombres complexes z tels que $z - iz \neq 0$ et pour tout z élément de E , on pose $z' = \frac{z + \bar{z} - 2i\sqrt{5}}{z - i\bar{z}}$.

- 6) Déterminer E .
- 7) Soit z un élément de E ; on désigne par M l'image de z et on pose $z = x + iy$; (x et y) étant des nombres réels.
 a) Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M tels que $|z'| = \sqrt{2}$ est la réunion de $(\mathcal{C})$ et de son symétrique par rapport à O .
 b) Construire (Γ) dans le même repère que $(\mathcal{C})$.
 c) Déterminer une équation cartésienne de (Γ) dans le repère $(O; \vec{u}; \vec{u} + 2\vec{v})$.
 En déduire la nature de (Γ) .

BAC C BENIN 2008

DUREE : 4 Heures.

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

Exercice 1 :

- 1) Démontrer que pour tout nombre réel x , on a : $-1 < \frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1} < 1$.

- 2) On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $] -1; 1[$ définie par : $f(x) = \frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1}$.
- Démontrer que f est une application.
 - Etudier le sens de variation de f .
 - Dresser le tableau de variations de f .
 - Construire la courbe (C) représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique : 2cm).

3°) a) Justifier que f est une bijection.

Soit g la bijection réciproque de f .

- Justifier que g est dérivable sur $] -1; 1[$.
- Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $] -1; 1[$.

Exercice 2 :

1°) Résoudre dans $\mathbb{Z} / 7\mathbb{Z}$ l'équation : $3x^2 + 6x + 5 = 0$.

2°) Un entier naturel A s'écrit $\overline{361}^b$ dans le système de numération de base b et a pour reste 3 dans la division euclidienne par 7.

- Démontre que : $3b^2 + 6b - 2 \equiv 0[7]$.
- En déduire l'ensemble E des valeurs de b .

3°) On suppose dans cette question que $b=8$.

- Vérifie que b appartient à E .
- Donne l'écriture décimale de A .
- Démontre que A est un nombre premier.

4) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation d'inconnues (x, y) : $x^2 + 6x = y^2 + 232$.

PROBLEME

Le plan complexe (P) est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère la droite (D) d'équation $x + y - 4\sqrt{2} = 0$, et le point $F(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Partie A

- Soit M un point du plan d'affixe z et M_1 le point d'affixe z_1 , image de M par la symétrie orthogonale s par rapport à (D) .
Exprimer z_1 en fonction de z .
- Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2 . On désigne par f l'application $h \circ s$.
 - Démontrer que f a pour écriture complexe :
 $z' = 2i\bar{z} - 8\sqrt{2}(1+i)$.
 - Indiquer la nature et les éléments caractéristiques de f .
- Soit H le milieu du segment $[MM_1]$ avec $M_1 = s(M)$.

- a) Démontrer que :
- $$MH = \left| \frac{z + \bar{z} - 4\sqrt{2}(1+i)}{2} \right|$$
- b) En déduire que l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que :
- $$\left| z - \sqrt{2} - i\sqrt{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{z + \bar{z} - 4\sqrt{2}(1+i)}{2} \right|$$
- est une ellipse de foyer F, de directrice (D) dont on précisera l'excentricité.
- 4) a) Démontrer que dans le repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, la courbe (Γ) a pour équation cartésienne :
- $$3(x^2 + y^2) - 2xy - 16 = 0.$$
- b) Démontrer que le point O est le centre de (Γ) .
- c) Déterminer une équation cartésienne de l'axe focal (Δ) de (Γ) et préciser la distance focale.
- d) Soit F' le second foyer de (Γ) . Donner les coordonnées de F' puis la définition bifocale de (Γ) .
- 5) Soit r la rotation de centre O et d'angle $(-\frac{\pi}{4})$.
On désigne par (Γ') l'image de (Γ) par r .
- a) Déterminer une équation cartésienne de (Γ') .
- b) Construire (Γ) et (Γ') dans le même repère.

Partie B

- 6) Soit a et b deux nombres réels strictement positifs et (E) l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- a) Démontrer que la moitié de l'aire du domaine intérieur à l'ellipse (E) est calculée, en unités d'aire par l'intégrale $\int_{-a}^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$.
- b) A l'aide du changement de variable $x = a \cos \theta$, $\theta \in [0; \pi]$, calculer $\int_{-a}^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$.
- c) En déduire que l'aire, en unités d'aire, du domaine intérieur à l'ellipse (E) est πab .
- 7) Quelle est l'aire du domaine intérieur de l'ellipse (Γ) ?

BAC C BENIN 2009

DUREE : 4 Heures.

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1

L'espace E est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Soit les points $A(1 ; -1 ; 2)$, $B(2 ; 0 ; -2)$, $C(-1 ; 1 ; 3)$ et $D(0 ; -3 ; -1)$.

1°) a) Démontrer que les points A, B et C déterminent un seul plan que l'on notera $\mathcal{P}$.

b) Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

2°) Justifier que ABCD est un tétraèdre.

3°) Soit s la réflexion de plan $\mathcal{P}$, h l'homothétie de centre A et de rapport $\left(\frac{-2}{3}\right)$.

a) Déterminer les coordonnées de l'image D' du point D par s .

b) Calculer le volume de l'image par $h \circ s$ du tétraèdre ABCD.

4°) Déterminer une équation cartésienne de l'image $\mathcal{P}'$ du plan $\mathcal{P}$ par $h \circ s$.

EXERCICE 2

On considère les nombres complexes z_n , ($n \in \mathbb{N}$), définis par :
$$\begin{cases} z_0 = e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ z_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{2}} z_n \end{cases} ; n \in \mathbb{N}.$$

On désigne par M_n l'image de z_n dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique : 4cm).

1°) Placer les points $M_0, M_1, \dots, M_{11}$.

2°) a) Démontrer par récurrence que, pour tout n élément de $\mathbb{N}$, on a : $z_n = e^{i(-\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{6})}$.

b) En déduire que les points M_n et M_{n+12} sont confondus.

3°) a) Démontrer que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $z_{n+6} = -z_n$.

b) En déduire que O est le milieu du segment $[M_n M_{n+6}]$.

4°) a) Calculer sous forme exponentielle : $\frac{z_{n+6} - z_n}{z_{n+4} - z_n}$.

b) En déduire la nature du triangle $M_n M_{n+4} M_{n+8}$.

PROBLEME

f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right), \text{ si } x > 0. \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan $(\mathcal{P})$ muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 2cm)

Première Partie

1°) Soit D l'ensemble de définition de f .

a) Démontrer que $D = [0 ; +\infty[$.

b) Démontrer que f est continue sur D .

c) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

Donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

2°) Pour t élément de $]0 ; 1[$, on pose $\varphi(t) = f\left(\frac{1}{t} - 1\right)$.

a) Démontrer que $\varphi(t) = \frac{(1-t)^2}{t} \times \frac{\ln(1-t)}{t}$.

b) A l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{x+1}$, démontrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

3°) On rappelle qu'au voisinage de 0, on a : $\ln(1-t) = -t - \frac{1}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$.

a) Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif x :

$$f(x) + x - \frac{1}{2} = \left(\frac{1-t}{t}\right)^2 \ln(1-t) + \frac{1}{t} - \frac{3}{2}, \text{ avec } t = \frac{1}{x+1}.$$

b) En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) + x - \frac{1}{2} \right] = 0$.

4°) On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = 2\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}.$$

a) Etudier le sens de variation de g .

b) Déterminer les limites de g en 0 par valeurs supérieures et en $+\infty$.

c) En déduire que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, g(x) < 0$.

5°) a) Justifier que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = xg(x)$.

b) En déduire que f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

c) Dresser le tableau des variations de f .

d) Construire la courbe $(\mathcal{C})$.

6°) Soit λ un nombre réel tel que $0 < \lambda < 1$.

On pose $A(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(x) dx$.

a) En utilisant une intégration par partie et l'égalité : $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$, calculer $A(\lambda)$.

b) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.

c) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} A(\lambda)$.

Deuxième Partie

Soit la fonction $h : [0 ; +\infty[\rightarrow]-\infty ; 0]$

$$x \mapsto f(x)$$

7°) Démontrer que h est une bijection.

8°) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h et $(\mathcal{C}')$ sa courbe représentative.

On désigne par (Γ) l'ensemble des points N de $\mathcal{P}$ tels que :

$$\begin{cases} M' \in (\mathcal{C}') \\ AM' = AN \\ \widehat{\text{mes}(\overline{AM'}; \overline{AN})} = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

A étant le point de coordonnées $(1 ; 1)$.

a.) Démontrer que (Γ) est l'image de $(\mathcal{C})$ par $r \circ S_{\Delta}$ où r est une rotation que l'on précisera et S_{Δ} la réflexion d'axe (Δ) d'équation : $x - y = 0$.

b.) En déduire que (Γ) est l'image de $(\mathcal{C})$ par une réflexion dont l'axe passe par A .

c.) Donner une écriture complexe de cette réflexion.

BAC C BENIN 2010

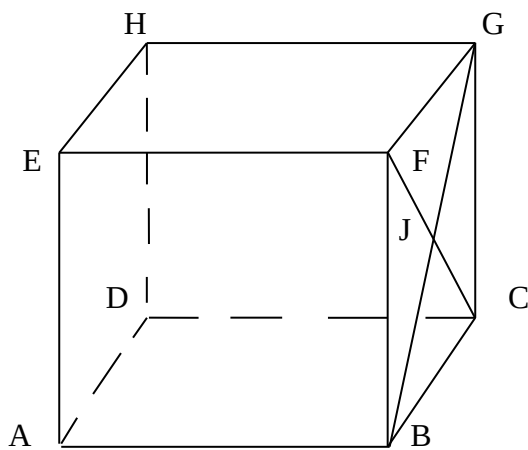
DUREE : 04 HEURES

Le candidat doit traiter les deux Exercices et le Problème.

EXERCICE 1

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1. On désigne par J le centre du carré BCGF.

On munit l'espace du repère orthonormé direct $(A ; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.



- 1°) a) Justifier que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
 b) Déterminer l'ensemble (P) des points M de l'espace tels que :
 $(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$.
- 2°) Soit t l'application de l'espace dans lui-même qui associe à tout point M, le point $t(M) = M'$ tel que :
 $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.
 a) Déterminer la nature de t et préciser son élément caractéristique.
 b) Déterminer l'image de (P) par t .
- 3°) Démontrer qu'il existe une homothétie h dont on précisera le centre Ω et le rapport k telle que $h(J) = A$ et $h(B) = H$.
- 4°) Soit $S\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ un point de l'espace.
 a) Démontrer que SABCD est une pyramide.
 b) Calculer le volume de l'image de cette pyramide par t ou h .

EXERCICE 2

- 1°) Justifier que dans l'anneau $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}; +, \times)$, $\dot{5}$ est inversible et trouver son inverse.
- 2°) Résoudre dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{4}x = \dot{4}$.
- 3°) Résoudre dans $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2$ le système :
$$\begin{cases} \dot{5}x + \dot{6}y = \dot{3} \\ \dot{3}x + \dot{2}y = \dot{5} \end{cases}$$

4°) Déterminer tous les entiers naturels n tels que $n \times 7^{2n} + 4n - 1$ soit divisible par 8.

PROBLEME

f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \ln|x| - \frac{\ln|x|}{x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A

1°) Soit D l'ensemble de définition de f .

- a) Démontrer que $D = \mathbb{R}^*$.
- b) Etudier les limites de f aux bornes de D .
- c) Etudier les branches infinies de (C) .

2°) Justifier que f est dérivable en tout point de D et qu'on a :
pour tout x élément de D ,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \text{ avec } g(x) = \ln|x| + x - 1.$$

3°) a) Etudier les variations de la fonction g .

- b) Démontrer que, pour tout x élément de $]-\infty; 0[$, $g(x) < 0$.
- c) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.

4°) a) Dresser le tableau des variations de f .

- b) Tracer la courbe (C) .

5°) Soit m un nombre réel.

En utilisant la courbe (C) , déterminer suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$. On précisera en particulier les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

6°) Calculer l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

7°) Soit la fonction $u :]-\infty; 0[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x)$.

On désigne par (C_0) la courbe représentative de u dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- a) Démontrer que u est une bijection.

b) Soit (Γ) l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} ; y < 0 \\ x = u(2y) \end{cases}$$

Démontrer que (Γ) est l'image de (C_0) par la composée de deux transformations simples du plan que l'on précisera.

Partie B

8°) Démontrer que, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique dans $[1; +\infty[$.

On note α_n cette solution.

On obtient ainsi une suite numérique $(\alpha_n)_{n \geq 1}$.

9°) a) Démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

- b) Démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est convergente.
- 10°) On note l la limite de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$.
- Justifier que $l \in [1 ; +\infty[$.
 - Taper une équation ici. Justifier que $f(l) = 0$.
 - En déduire l .

BAC C BENIN 2011

DUREE : 4 Heures.

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1.

Dans l'espace orienté, on considère le tétraèdre ABCD tel que ABC , ABD et ACD forment trois triangles isocèles en A et $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$.

- 1°) a. Démontrer que : $AB = AC = AD = 1$.
- b. Justifier que $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormé direct de l'espace .
- Dans la suite , on suppose que l'espace est muni du repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
- 2°) a. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
- b. Soit G le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).
- Déterminer les coordonnées de G.
 - Vérifier que G est le centre de gravité du triangle BCD.
- 3°) a. Déterminer, la nature du triangle BCD.
- b. Déterminer , suivant les valeurs du nombre réel m, l'ensemble (E_m) des points M de l'espace tels que : $MB^2 + MC^2 + MD^2 = m$.
- c . Peut-on déterminer m pour que l'isobarycentre des points A , B et C appartienne à (E_m) ?

EXERCICE 2

- 1°) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne par 10 de 13^n .
- 2°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul k, on a :
- $$1 + 13 + 13^2 + \dots + 13^{4k-1} \equiv 0[10] .$$
- 3°) On pose, pour tout entier naturel n, $A_n = 1 + 3 + \dots + 13^n$.
- Détermine suivant les valeurs de n, le chiffre des unités de A_n .

PROBLEME

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -\sqrt{1 - e^{2x}}, & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right), & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par D son ensemble de définition et $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1°) a. Démontrer que : $D = \mathbb{R}$.

b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

c) Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

2°) a. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0. En déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet à l'origine du repère une tangente dont on donnera une équation.

3°) Etudier le sens de variation de f sur $]-\infty; 0[$.

4°) a. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout x élément de $]0; +\infty[$.

b. Déterminer le sens de variations de f' sur $]-\infty; 0[$.

c. Dresser le tableau des variations de f' . En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout x élément de $]0; +\infty[$.

5°) a. Dresser le tableau des variations de f .

b. En déduire sur $]0; +\infty[$, la position relative de $(\mathcal{C})$ et de la droite (Δ) d'équation : $y=2$.

6°) Construire la courbe $(\mathcal{C})$.

7°) Soit α un nombre réel tel que : $0 < \alpha < 1$. On désigne par $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $y=2$, $x=\alpha$ et $x=\frac{2}{e-1}$.

a. Calculer $\mathcal{A}(\alpha)$.

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(\alpha)$. Quelle interprétation géométrique peut-on donner du résultat obtenu ?

Partie B

Soit x_0 un nombre réel de $]0; +\infty[$.

8°) a. Donner une équation de la tangente (T_{x_0}) à $(\mathcal{C})$ en son point d'abscisse x_0 .

c. Démontrer que (T_{x_0}) coupe l'axe des ordonnées au point N d'ordonnée $f(x_0) - x_0 f'(x_0)$.

9°) Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2x}{x+2}$.

On désigne par (Γ) la courbe représentative de g .

a. Etudier les variations de g .

b. Vérifier que pour tout x élément de $]0; +\infty[$, on a : $f(x) - g(x) = x f'(x)$.

c. Déterminer le signe de $f(x) - g(x)$ pour tout x élément de $]0; +\infty[$.

d. Tracer (Γ) dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

e. Déduire des questions précédentes une construction géométrique de la tangente (T_X) .

Tracer de cette façon la tangente à $(\mathcal{C})$ en son point d'abscisse 2.

BAC C BENIN : SESSION UNIQUE DE JUIN 2012

DUREE : 4 HEURES

Situation d'évaluation

Contexte : Conception d'un centre de loisirs .

Ali a hérité d'un domaine sur lequel il veut construire un centre de loisirs. Son fils BIO , titulaire d'un baccalauréat scientifique s'intéresse au volet esthétique du centre . Pour cela , il considère la famille de courbes (C_m) d'équation $(m-2)x^2 + y^2 - 2y - 5 + m = 0$ dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1; \vec{e}_2)$, m étant un paramètre réel. Il utilise aussi l'image d'une courbe (Γ) par une transformation du plan.

Tache : Tu es invité(e) à répondre aux préoccupations de Bio en résolvant les trois problèmes suivants :

I.

1) Soit $M(x, y)$ un point du plan $\mathcal{P}$.

Justifie que $(M \in (C_m)) \Leftrightarrow (m-2)x^2 + (y-1)^2 = (6-m)$.

2) a) Etudie le signe de $\frac{6-m}{m-2}$ suivant les valeurs de m où m est différent de 2.

b) Précise la nature de (C_3) .

c) Etudie suivant les valeurs de m , la nature de (C_m) .

II.

Bio choisit la courbe (Γ) représentative de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+\ln x$, la transformation φ telle que $\varphi = t \circ s$ où t est la translation de vecteur $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ et s la réflexion d'axe Δ d'équation $y = x$.

Il s'agit de rechercher un point I de (Γ) , un point J de (C_4) tels que $\varphi(I)=J$ et de matérialiser ces points à l'aide d'indication à présenter aux ouvriers sur le chantier de construction du centre de loisirs.

3) Etudie :

a) les variations de f .

b) les variations de la fonction v de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $v(x)=x^2-x+\ln x$.

c) le signe $v(x)$ pour tout nombre réel strictement positif x .

d) la position relation de (Γ) par rapport à la droite Δ .

4) a) Démontre que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique α .

b) Justifie que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

5) a) Détermine l'écriture complexe de φ .

b) Précise la nature et les éléments caractéristiques de φ .

c) Représente l'image (Γ') de (Γ) par φ .

6) (Γ') coupe (C_4) en deux points J_1 et J_2 .

Donne une méthode de construction d'un point I de (Γ) tel que $\varphi(I)=J$ où J est élément de $\{J_1, J_2\}$.

III.

Compte tenu de la superficie disponible, bio veut qu'on installe un nombre a de chaises et un nombre b de tables pour les grandes cérémonies.

D'après ses calculs, il se rend compte que :
$$\begin{cases} 3a + 7b = 1020 \\ \text{PGCD}(a; b) = 20 \end{cases}.$$

Détermine le nombre de chaises et le nombre de tables à installer.

BAC C BENIN 2014

DUREE : 4 heures

Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.

Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.

Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

Contexte Confection d'une tenue royale

Après son admission à la retraite, Monsieur KOTO précédemment professeur de mathématique, a été désigné pour être le nouveau chef de sa collectivité. Comme il est de coutume, le nouveau chef doit se faire confectionner une tenue spéciale pour le jour de l'intronisation. C'est ainsi que KOTO décide de se faire confectionner une tenue qui reflète sa profession. Afin de garder secrètes les spécificités de la tenue, KOTO confie à son fils KOFFI, élève en terminale C, des informations codées à décrypter au couturier chargé de confectionner la tenue. C'est ainsi qu'il a été retenu que le couturier devra disposer de deux types T_1 et T_2 de perles. Les perles du type T_1 seront réparties sur la trace d'une ligne courbe ($\cap$) et celle du type T_2 une ligne de courbe ($\cup$). Le nombre a de perle du type T_1 et le nombre b de perle du type T_2 vérifient la relation $b = 6a^4 + 3a^2 + 4a + 1$ avec $a \geq 2$. Pour coder cette relation KOTO recommande à Koffi de mémoriser suivant la valeur de l'entier a , l'écriture de b dans la base a . Enfin Koffi a été informé que a est aussi la plus petite valeur de l'entier n tel que le nombre complexe $(1 + e^{i\frac{\pi}{5}})^n$ soit imaginaire pur.

Une fois chez le couturier, Koffi veut lui expliquer le travail à faire.

Tache : Tu es invité(e) à aider Koffi dans sa mission en résolvant les trois problèmes suivants :

PROBLEME 1

- 1) Précise les différentes expressions de b que Koffi a utilisé pour mémoriser la relation considérée (Tu donneras suivant les valeurs de a l'écriture de b dans la base a).
- 2) a. Justifie que $1 + e^{i\frac{\pi}{5}} = (2\cos\frac{\pi}{10})e^{i\frac{\pi}{10}}$.
b. Déduis-en le module et un argument de $1 + e^{i\frac{\pi}{5}}$.
c. Justifie que le nombre de perle du type T_1 est 5.
- 3) Calcule le nombre de perle du type T_2 .

PROBLEME 2

La ligne (Γ) est obtenue à partir d'un carré ABCD du plan (P) orienté tel que $\frac{\pi}{2}$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ et $AB=1$; S_1 étant la réflexion d'axe (AB), r_1 la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$, (Γ) est l'image par $r_1 \circ s_1$ de l'ensemble (Γ_1) des points M du plan (P) tels que $MA^2 + 4MB^2 - MC^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} MN^2$ où N est l'image de M par l'affinité orthogonale d'axe la droite (AB) et de rapport 3.

4) a) Construis le point E, barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 4) et (C, -1).

b) Justifie que $EA^2 + 4EB^2 - EC^2 = -\frac{1}{2}$.

c) Justifie qu'un point M du plan appartient à (Γ_1) si et seulement si $\frac{ME}{MN} = \frac{1}{4}$.

d) Déduis-en la nature de (Γ_1) .

5) Soit s la réflexion d'axe (CD).

a) Détermine la droite (Δ) telle que $r_1 = s_2 \circ s$ où s_2 est la réflexion d'axe (Δ) .

b) Justifie que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AD}$.

c) Déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de $r_1 \circ s_1$.

6) a) Justifie que (Γ) est une ellipse.

b) Préciser les sommets de (Γ) .

c) Construis (Γ) .

PROBLEME 3

La ligne (Γ') est obtenue à l'aide de la courbe (Γ_2) dans le plan (P) muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$; la courbe (Γ_2) est la représentation graphique de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{e^x + x}$.

7) a. Etudie les variations de la fonction $u(x) = e^x + x$.

b. Justifie que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α .

c. Justifie que $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$.

d. Etudie le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .

8) a. Etudie les variations de f .

b. Construis la courbe (Γ') représentant la fonction de g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x) + f(|x|) = 0.$$

BAC C BENIN 2015

DUREE : 4 heures

Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.

Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.

Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

Contexte : Souvenirs d'un stage en GRVC

Assiba étudiante en agronomie, a effectué un stage dans un groupement régional à vocation coopérative (GRVC) qui produit des huiles végétales. Plusieurs équipes de femmes participent aux activités dont le stockage des huiles dans les cuves spéciales. Si les N femmes de ce GRVC se constituent en équipes de 6 pour remplir les cuves, il en reste 4 pour s'occuper de diverses activités d'entretien ; mais pour qu'elles forment des équipes de 11 en nombre suffisant, elles ont recours aux services de 9 stagiaires. Cette intégration des stagiaires aux équipes offre à Assiba l'occasion d'étudier l'évolution du bénéfice de la coopérative.

Pour élaborer son rapport de stage, Assiba se fait aider de son jeune frère Gawé, élève en classe terminale C à qui elle confie la détermination de l'entier naturel N avec $(120 < N < 240)$, l'étude des caractéristiques des cuves ainsi que l'évolution des bénéfices engrangés par le GRVC.

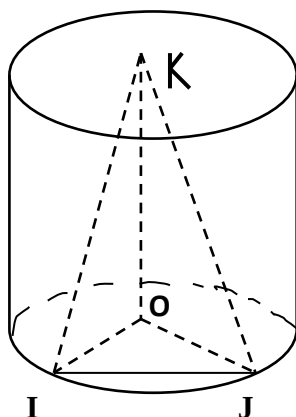
Tache : tu es invité(e) à trouver une réponse aux préoccupations de Assiba en aidant Gawé à résoudre les trois problèmes suivants.

Problème 1

- 1.a) Justifie que N vérifie le système : $\begin{cases} N \equiv 4[6] \\ N \equiv 2[11] \end{cases}$.
- b) Déduire-en l'existence de deux entiers naturels p et q tels que $N = 6q + 4$ et $11p - 6q = 2$.
- 2.a) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $11x - 6y = 2$.
- b) Déduis-en la valeur de N .
- c) Vérifie que N s'écrit $\overline{262}$ en base 8.

Problème 2

L'une des cuves servant à conserver l'huile a la forme d'un cylindre ayant à l'intérieur une partie tétraédrique $KOIJ$, une ouverture et deux robinets R_1 et R_2 . Le point O est le centre du disque de base sur lequel repose le cylindre ; le triangle OIJ est isocèle et rectangle en O ; le segment $[OK]$ est la hauteur du cylindre ; $OI = 1\text{m}$ et $OK = 2\text{m}$.



Le robinet R_1 est placé au point A tel que $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OI} + \frac{\sqrt{3}}{2} \overrightarrow{OJ} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OK}$.

L'ouverture sur la base supérieure est délimitée par l'ensemble (r) des points M du plan rapporté au repère $(K; \vec{OI}, \vec{OJ})$ tels que : $2ME^2 - 4MF^2 + 2MG^2 - 4MH^2 = -5$ avec EFGH un carré de centre K et $KG = 1$.

Gawé munit l'espace du repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que : $\vec{i} = \vec{OI}$, $\vec{j} = \vec{OJ}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2} \vec{OK}$.

3. Détermine les coordonnées du point A.
4. Le robinet R_2 est placé au point B image du point A par l'application $s_1 \circ s_2$ où s_1 est la réflexion de plan (KOJ).
 - a) Justifie que $s_1 \circ s_2$ est demi-tour dont tu préciseras l'axe (Δ).
 - b) Détermine les coordonnées du point B.
5. La partie tétraédrique contient un liquide de refroidissement et l'huile est stockée dans la partie restante du cylindre.
Calcule le volume d'huile que l'on peut stocker dans la cuve.
6. a) Justifie que K est barycentre des points pondérés (E, 2) ; (F, -4) (G, 2) et (H, -4).
b) Détermine l'ensemble (Γ).

Problème 3

Une étude a permis de savoir qu'en fonction du nombre d'années x d'existence de ce GRVC, le bénéfice réalisé en millions de francs CFA est donné par : $f(x) = e^{\frac{2x-1}{x}} - x$; avec $x > 0$.

7. Démontre que f admet un prolongement par continuité en 0.
On note g ce prolongement par continuité, et on note ($\mathcal{C}$) la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
8.
 - a) Démontre que g est continue sur $[0; +\infty[$.
 - b) Etudie la dérivabilité de g à droite en O et donne une interprétation géométrique du résultat.
 - c) Calcule $g'(x)$ pour tout x élément de $]0, +\infty[$.
9.
 - a) Etudie le sens de variation de g' sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
 - b) Démontre que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g'(x) = -1$.
 - c) Dresse le tableau des variations de g' .
 - d) Démontre que l'équation $g'(x) = 0$ admet deux solutions α et β telles que $0,1 < \alpha < 0,2$ et $2,1 < \beta < 2,2$.
 - e) Détermine le signe de $g'(x)$ pour tout x élément de $]0, +\infty[$.
- 10.)
 - a) Etudie les variations de g .
 - b) Démontre que $f(\alpha) = \alpha^2 - \alpha$ et $f(\beta) = \beta^2 - \beta$.
Déduis- en un encadrement de chacun des réels $f(\alpha)$ et $f(\beta)$.
 - c) Trace la courbe ($\mathcal{C}$) sur l'intervalle $[0; 7]$.
11. Précise l'année au cours de laquelle la coopérative réalise son bénéfice maximum ainsi que ce bénéfice.

BAC C BENIN 2016**DUREE : 4 heures***Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.**Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.**Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.***Contexte : Planification de la phase opérationnelle d'un projet agricole.**

Pour accéder au crédit mis en place pour l'entrepreneuriat des jeunes, Soton un jeune diplômé sans emploi a décidé de monter un projet de culture du jasmin, un arbuste à fleurs dont la senteur très appréciée est recherchée dans la fabrication de produits cosmétiques. Il prévoit dans son projet, la confection de plaques métalliques pour clôturer le lieu d'implantation de la culture. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\Omega ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le sol est représenté par le plan (Q) passant par O (0 ; 4 ; 0) et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Les plaques sont assimilables aux plans (P) et (P') tels que (P) a pour équation $x - y + z - 3 = 0$ et $S_{(P)} \circ S_{(P')} = t_{\vec{u}}$; avec $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $S_{(P)}$ et $S_{(P')}$ les réflexions de plans (P) et (P') respectivement, et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$. En vue de l'arrosage, un raccord est placé dans le plan de repère (O ; $\vec{e}_1, \vec{e}_2$) tel que $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i} + 2\vec{j})$ et $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{70}}(6\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k})$ et suivant un itinéraire qui coïncide avec une portion de la courbe (C) représentative des variations d'une fonction numérique f de variable réelle x . Le traitement des jeunes plants de jasmin consiste en une pulvérisation avec un produit chimique contenu dans un autre raccord muni de robinets qui sera placé suivant un itinéraire qui coïncide dans le plans (Q) avec une portion d'une courbe (τ).

Sovissi, élève en classe de terminale scientifique, a pris connaissance du projet de son frère aîné Soton et s'interroge sur certains aspects techniques notamment le système d'irrigation et de traitement phytosanitaire des plants.

Tâche : Tu es invité (e) à répondre aux préoccupations de Sovissi en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1

- 1) a- Détermine une équation cartésienne du plan (Q).
b-Prouve que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires suivant une droite (Δ) dont tu détermineras un système d'équations cartésiennes.
- 2) Détermine une représentation paramétrique du plan (P').
- 3) a-Démontre que (O ; $\vec{e}_1, \vec{e}_2$) est un repère orthonormé du plan (Q).
b-Détermine dans le repère (O ; $\vec{e}_1, \vec{e}_2$), l'expression analytique de la restriction h au plan (Q) de la réflexion $S_{(P)}$.

Problème 2

En réalité f est la fonction de IR vers IR définie par : $f(x) = \frac{x}{2^{|x|} + 1}$. La courbe

(τ) est l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan (Q) vérifiant l'égalité :

$1 + x - y + (3 + x) \times 2^{|y+2|} = 0$ obtenue à l'aide de la transformation du plan $\varphi = S \circ t$; où S est la symétrie orthogonale d'axe la droite (Δ') : $y = x$ et t la translation de vecteur non nul $\vec{v}$.

- 4) a- Détermine l'ensemble de définition de la fonction f .
b- Prouve qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ pour tracer la courbe (C) .
- 5) g est la fonction définie sur $]-\infty ; 0]$ par : $g(x) = 1 + 2^x + x \ln 2$.
a- Étudie la variation de la fonction g .
b- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]-\infty ; 0]$, une solution α telle que $-1,9 < \alpha < -1,8$.
c- Déduis-en le signe de $g(x)$ sur $]-\infty ; 0]$.
- 6) a- Calcule la limite de f en $-\infty$.
b- Étudie la dérivabilité de f à gauche en 0 et donne une interprétation géométrique du résultat.
c- Étudie les variations de la fonction f sur $]-\infty ; 0]$.
d- Construire la courbe (C) dans le repère $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
- 7) a- Détermine une équation de l'image (C') de (C) par la translation t de vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
b- Déduis-en que $(\tau) = \varphi[(C)]$.
c- Démontre que φ est une symétrie glissée dont tu préciseras les éléments caractéristiques.
- 8) Construis (τ) dans le repère $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Problème 3

On considère la suite numérique $(u_n), n \in \mathbb{N}^*$ de terme général :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2} dx.$$

On estime que le produit chimique destiné au traitement des jeunes plants de jasmin éliminera à la $n^{\text{ème}}$ semaine de traitement u_n kilogrammes d'insectes et de parasites. La pulvérisation et l'arrosage des plants se font à des intervalles de temps réguliers, soit toutes les T_1 heures pour la pulvérisation et toutes les T_2 heures pour l'arrosage.

On suppose que $T_2 < T_1 < 48$ et que dans $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$, les classes $\overline{T_1}$ et $\overline{T_2}$ sont solutions de l'équation (E) : $x^2 + \overline{23}x + \overline{98} = \overline{0}$.

9)

- a) Justifie que $(\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps.
- b) Développe et réduis $(x - \overline{36})(x - \overline{42})$ dans $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$.
- c) Résous dans $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$ l'équation (E).
- d) Déduis-en la prochaine date à laquelle les plants ont été simultanément arrosés et pulvérisés, les robinets ayant été mis en marche le 14 juin 2015 à 6h.

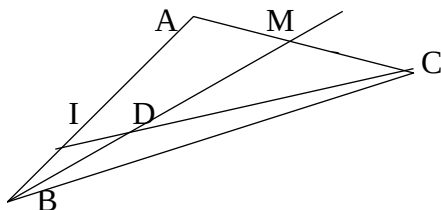
10)

- a) Justifie que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de termes positifs.
- b) Etudie le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- c) Déduis-en que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.
- d) Démontre que pour tout x élément de $[0 ; 1]$, $\frac{x^n}{3} \leq \frac{x^n}{1+x+x^2} \leq x^n$.
- e) Déduis-en la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

P

artie IV :

Corrigés détaillés et commentés des activités d'application et d'approfondissement des notions du cours de chacune des séquences d'apprentissage inscrites dans les programmes des classes Terminales C, D et E plus les corrigés des sujets de Baccalauréat série C de 2002 à 2016.

SA n°1 : Configurations de l'espace**Séquence n°1 : Calcul vectoriel****Activité 1****1. Plaçons les points I et D****b) Démontrons que les points B, D et M sont alignés.**

On a :

- $\vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AB} = \frac{2}{1+2}\vec{AB}$,
donc $I = \text{bar}\{(A,1); (B,2)\}$
- $\vec{CD} = \frac{3}{4}\vec{CI} = \frac{3}{1+3}\vec{CI}$, donc $D = \text{bar}\{(C,1); (I,3)\}$

Or $I = \text{bar}\{(A,1); (B,2)\}$, d'après le théorème des barycentres partiels, on a :

$D = \text{bar}\{(A,1); (B,2); (C,1)\}$. Comme $M = \text{bar}\{(A,1); (C,1)\}$, alors

$D = \text{bar}\{(M,2); (B,2)\}$.

On conclut que les points B, D et M sont alignés.

2) Démontrons que les droites (AJ), (BK) et (CL) sont concourantes en un point

On a :

- $\vec{AL} = \frac{1}{3}\vec{AB}$, donc $L = \text{bar}\{(A,2); (B,1)\}$, (1)
- $\vec{CJ} = \frac{1}{4}\vec{CB}$, donc $J = \text{bar}\{(C,3); (B,1)\}$, (2)
- $\vec{CK} = \frac{2}{5}\vec{CA}$, donc $K = \text{bar}\{(C,3); (A,2)\}$, (3)

Soit $G = \text{bar}\{(A,2); (B,1); (C,3)\}$. (4)

(1) et (4) donnent : $G = \text{bar}\{(L,3); (C,3)\}$, on en déduit que $G \in (CL)$. (a)

(2) et (4) donnent : $G = \text{bar}\{(J,4); (A,2)\}$, on en déduit que $G \in (AJ)$. (b)

(3) et (4) donnent : $G = \text{bar}\{(B,1); (K,5)\}$, on en déduit que $G \in (BK)$. (c)

De (a), (b) et (c), on conclut que les droites (AJ), (BK) et (CL) sont concourantes au point G où $G = \text{bar}\{(A,2); (B,1); (C,3)\}$.

3) Déterminons les coordonnées de ce point dans la base $(\vec{AB}; \vec{AC})$.

Dans cette base, on a : $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$. Soit $G(x_G; y_G)$.

$$\text{On a : } \begin{cases} x_G = \frac{2(0)+1+3(0)}{2+1+3} \\ y_G = \frac{2(0)+0+3(1)}{2+1+3} \end{cases}$$

Soit

$$G\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$$

Activité 2**1.a) Traduisons les données en termes de barycentre**

Avec les données de l'activité, on déduit que :

$G = \text{bar}\{(A,1); (B,1); (C,1)\}$.

$I = \text{bar}\{(A,1); (B,1)\}$; $J = \text{bar}\{(B,1); (C,1)\}$.

$K = \text{bar}\{(C,1); (D,3)\}$.

$H = \text{bar}\{(A,1); (B,1); (C,1); (D,3)\}$.

$P = \text{bar}\{(D,3); (A,1)\}$.

b) Montrons que le point H appartient à la droite (IK).

De la question précédente, on déduit que : $H = \text{bar}\{(I,2); (K,4)\}$, d'où $H \in (IK)$.

c) Montrons que les droites (IK), (JP) et (DG) sont concourantes en un point à préciser.

De 1.a), on déduit que :

- $H = \overline{\{(G,3);(D,3)\}}$, donc $H \in (DG)$, (1)
- $H = \overline{\{(J,2);(P,4)\}}$, donc $H \in (JP)$, (2)

On sait de plus que $H \in (IK)$, (3).

De (1), (2) et (3), on conclut que les droites **(IK), (JP) et (DG) sont concourantes en H.**

2.a) Coordonnées des points G, I, J, K et P

On a :

- $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
soit $\boxed{G(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0)}$

- $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Il en résulte
que $\boxed{I(\frac{1}{2}; 0; 0)}$

$\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CJ} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. On en déduit que
 $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, d'où $J(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$

- $\overrightarrow{CK} + 3\overrightarrow{DK} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$,
donc $\boxed{K(0; \frac{1}{4}; \frac{3}{4})}$

- $\overrightarrow{DP} + 3\overrightarrow{AP} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$, soit
 $\boxed{P(0; 0; \frac{3}{4})}$

b) Déterminons les coordonnées du point H.

On a :

$$\begin{cases} x_H = \frac{x_A + x_B + x_C + 3x_D}{6} = \frac{1}{6} \\ y_H = \frac{y_A + y_B + y_C + 3y_D}{6} = \frac{1}{6} \\ z_H = \frac{z_A + z_B + z_C + 3z_D}{6} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soit $\boxed{H(\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{2})}$

Activité 4

1) Déterminons et construisons l'ensemble des points M du plan tels que :

a) $\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\| = 9$

G étant le centre de gravité du triangle ABC, alors on a : $G = \overline{\{(A,1);(B,1);(C,1)\}}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{MG}$; soit $\|3\overrightarrow{MG}\| = 9$

$\Rightarrow MG = 3$, l'ensemble cherché est le cercle de centre G et de rayon MG. (construire)

b) $\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\| \leq 9$

On trouve $MG \leq 3$ puis on déduit que l'ensemble recherché est le disque de centre G et de rayon MG. (construire)

2) Déterminons l'ensemble des points M de l'espace tels que :

a) $\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\| = 12$

On trouve $MG = 4$; l'ensemble cherché donc est la sphère de centre G et de rayon $r = MG = 4$. (construire)

b) $\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\| \leq 12$.

On trouve $MG \leq 4$. L'ensemble cherché est la boule de centre G et de rayon $r = MG$.

3) Déterminons la ligne de niveau 38 de l'application f

$$f(M) = -2AM^2 + BM^2 + CM^2$$

La somme des coefficients est nulle, donc

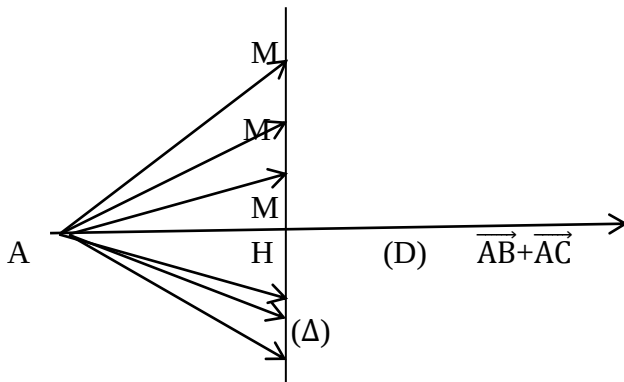
$$f(M) = f(A) - 2\overrightarrow{AM} \cdot \varphi(A) \text{ avec}$$

$\varphi(M) = -2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$. Nous trouvons ainsi :

$$f(M) = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\text{Soit } f(M) = 98 - 2\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

$$\text{Ainsi, } f(M) = 38 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 30.$$



Soit H projeté orthogonal de M sur la droite (D) passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. On a : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$. Donc $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u}$. Or $(HM) \perp (D) \Rightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0$. Donc $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 30$
 $\Rightarrow AH = \frac{30}{\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|}$

On a :

$$\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|^2 = AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 + 2AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$$

$$= 49 + 49 + 2 \times 49 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 49.$$

Ainsi, on a : $AH = \frac{30}{7}$.

Nous pouvons conclure que **l'ensemble cherché est la droite (Δ) passant par H et orthogonale à la droite (D) passant par A et dirigée par $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ avec $AH = \frac{30}{7}$.**

Dans l'espace, cet ensemble **est le plan passant par H et orthogonal à la droite (D) passant par A et dirigée par $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ avec $AH = \frac{30}{7}$.**

NB : Dans le cas où un quelconque angle n'est donné, on ne peut pas calculer AH. Dans ces conditions, il faut préciser la distance algébrique $\overrightarrow{AH}$ en fonction d'une autre distance algébrique.

Notez que vous pourrez dans les exercices typiques, utiliser le **théorème d'Alkashi** énoncé en Seconde, pour pouvoir s'en sortir !!!

4.a) Calculons AG et BG.

$AG = \frac{2}{3}AP$. On trouve d'après la propriété de Pythagore que $AP = 3\sqrt{5}$, ce qui permet de dire que **$AG = 2\sqrt{5}$.**

On a $BG = \sqrt{BP^2 + GP^2}$. On trouve **$BG = 3$.**

b) Déterminons le lieu géométrique de M quand $g(M) = 65$

$$g(M) = AM^2 + BM^2 + CM^2$$

La somme des coefficients étant non nulle, alors $g(M) = 3MG^2 + AG^2 + BG^2 + CG^2 = 3MG^2 + 38$.

Ainsi, $g(M) = 65 \Leftrightarrow MG^2 = 9 \Leftrightarrow MG = 3$.

L'ensemble cherché est le cercle de centre G et de rayon $r = 3$ (dans le plan) et la sphère de centre G et de rayon $r = 3$, (dans l'espace).

5) Déterminons l'ensemble des points M de l'espace tels que :

a) $\|3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\| = \|\overrightarrow{2MC} - \overrightarrow{BM}\|$

Soit $P = \text{bar}\{(A, 3); (B, 1)\}$ et

$Q = \text{bar}\{(C, 2); (B, -1)\}$. On a : $\|4\overrightarrow{MP}\| = \|\overrightarrow{MQ}\|$
 $\Rightarrow \frac{MQ}{MP} = 4$.

L'ensemble cherché est le cercle de diamètre [IJ] où $I = \text{bar}\{(Q, 1); (P, 4)\}$ et $J = \text{bar}\{(Q, 1); (P, -4)\}$.

b) $\|3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}\| \leq \|\overrightarrow{2MC} - \overrightarrow{BM}\|$.

On trouve $\frac{MQ}{MP} \leq 4$.

En conclusion, l'ensemble cherché est le **disque de diamètre [IJ]** (dans le plan) et la **sphère de diamètre [IJ]** (dans l'espace) où $I = \text{bar}\{(Q, 1); (P, 4)\}$ et $J = \text{bar}\{(Q, 1); (P, -4)\}$.

Activité 5

1) Démontrons que

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MI^2 + MJ^2 + MK^2 + ML^2 = 2k^2.$$

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{ME} = k^2.$$

On a : $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2} (ME^2 + MF^2 - EF^2)$. Comme

I est milieu de [EF], alors $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} =$

$$\frac{1}{2} (2MI^2 + IE^2 + IF^2 - EF^2).$$

Soit $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = MI^2 - \frac{k^2}{4}$. On trouve de même

$$\text{que : } \overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MG} = MJ^2 - \frac{k^2}{4} ; \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MH} = MK^2 - \frac{k^2}{4} ;$$

$$\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{ME} = ML^2 - \frac{k^2}{4}.$$

Ainsi, $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MI^2 + MJ^2 + MK^2 + ML^2 - k^2 = k^2$

$$\text{D'où } MI^2 + MJ^2 + MK^2 + ML^2 = 2k^2.$$

2. Justification

O est le centre de EFGH, donc O est l'isobarycentre des points E, F, G et H. Cela nous amène à écrire que :

$$\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LH} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JF} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OK} = \vec{0} \quad (\text{Car } \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{IE} = \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{LH} + \overrightarrow{JF} = \vec{0}).$$

D'où O est l'isobarycentre des points I, J, K et L.

3) Démontrons que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MO^2 = \frac{k^2}{4}$.

$$\text{On a : } M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MI^2 + MJ^2 + MK^2 + ML^2 = 2k^2.$$

$$\text{Posons : } f(M) = MI^2 + MJ^2 + MK^2 + ML^2$$

On a : $O = \text{bar}\{(I,1);(J,1);(K,1);(L,1)\}$, donc

$$f(M) = 4MO^2 + OI^2 + OJ^2 + OK^2 + OL^2$$

$$f(M) = 4MO^2 + k^2$$

$$\text{Ainsi, } f(M) = 2k^2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{MO^2 = \frac{k^2}{4}}$$

d'où le résultat.

4) Caractérisons (Γ) .

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MO^2 = \frac{k^2}{4}$, d'où (Γ) est le cercle de centre O et de rayon $r = \frac{k}{2}$.

Activité 6

1.a) Déterminons l'ensemble R des réels a pour lesquels G_a existe.

G_a existe si $a + 1 + 1 + a \neq 0$ ie si on a : $a \neq 0$. Soit $R = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Déterminons l'ensemble des points G_a lorsque a décrit R.

Si a décrit R, on a :

$$a\overrightarrow{AG_a} + \overrightarrow{BG_a} + \overrightarrow{CG_a} + a\overrightarrow{DG_a} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG_a} = \frac{1}{2a+2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2a+2} \overrightarrow{AC} + \frac{a}{2a+2} \overrightarrow{AD}$$

$\overrightarrow{AG_a}$ est ainsi écrit comme une combinaison

linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Ceci

indique que les vecteurs $\overrightarrow{AG_a}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$

sont coplanaires. Donc les points G_a

appartiennent au plan (ABC) défini par les points A, B, C et D.

Conclusion : l'ensemble des points G_a lorsque a décrit R est le plan (ABC).

2.) la nature et les éléments caractéristiques de f_a .

$$f_a(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = a\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + a\overrightarrow{MD}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + a\overrightarrow{MD}$$

- Si $a = -2$, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$

$$\text{Posons : } \vec{u} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$$

$\vec{u}$ est fixe, on conclut que f_{-2} est la

translation de vecteur de translation

$$\vec{u} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}.$$

- Si $a = 0$, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Soit I milieu de [BC]. On a $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI}$.

I est fixe, nous pouvons conclure que f_0 est la **symétrie de centre I**.

- Si $a \neq \{0; -2\}$, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + a\overrightarrow{MD}$

$$\text{Soit } P = \text{bar}\{(B,1);(C,1);(D,a)\}.$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{MP} = (2+a)\overrightarrow{MP}.$$

f est une transformation du plan.

3°) Détermine l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$a)(E_1) : \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\| = 4c^2$$

Cette équation implique :

$$\|4\vec{MG}_1\| = 4c^2 \Rightarrow \vec{MG}_1 = c^2, \text{ d'où } (E_1) \text{ est la sphère de centre } G_1.$$

$$b)(E_2) : \|\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} + \vec{MD}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\|$$

On trouve $\vec{MG}_1 = \frac{AB}{2}$, (E_2) est la **sphère de centre G_1 et de rayon $r = \frac{AB}{2}$** .

c) (Γ) des points M de l'espace tels que : $\|\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} + \vec{AD}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{AD}\|$
 $\Rightarrow \|\vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD}\| = \|\vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\|$
 Soit $K = \text{bar}\{(B,1); (C,1); (D,-1)\}$ et $P = \text{bar}\{(B,1); (C,1); (D,1)\}$. On a :
 $\frac{MK}{MP} = 3$; l'ensemble cherché est la **sphère de diamètre [NJ] où $N = \text{bar}\{(K,1); (P,3)\}$ et $J = \text{bar}\{(K,1); (P,-3)\}$** .

d) (E_3) des points M de l'espace tels que :
 $(\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} + \vec{MD}) \cdot (\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}) = 2c^2$

$$\text{On trouve } \vec{BA} \cdot \vec{MG}_1 = \frac{c^2}{4}$$

Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB). On a : $\vec{MG}_1 = \vec{MH} + \vec{HG}_1$. Comme

$$(\vec{MH}) \perp (\vec{AB}), \text{ alors } \vec{BA} \cdot \vec{MG}_1 = \vec{BA} \cdot \vec{HG}_1 = \frac{c^2}{4}$$

$$\Rightarrow \vec{HG}_1 = \frac{c^2}{4AB}$$

$$\text{Soit } \vec{HG}_1 = \frac{c}{4}$$

L'ensemble (E_3) recherché est le **plan passant par H et orthogonal à la droite (AB) tel que $\vec{HG}_1 = \frac{c}{4}$** .

e) Donnons la nature de $(E_1) \cap (E_3)$

(E_1) est la sphère de centre G_1 et de rayon $r = c^2 > \frac{c}{4}$, donc $(E_1) \cap (E_3)$ est un cercle.

Activité 7**1) Déterminons l'ensemble (E)**

$$\text{Soit } G = \text{bar}\{(A,x); (B,8); (C,2)\}$$

G existe $\Leftrightarrow x + 8 + 2 \neq 0$ ie $x \neq -10$. Soit

$$(E) = \mathbb{R} \setminus \{-10\}$$

2) Déterminons l'ensemble des barycentres obtenus lorsque x décrit (E).

$$\text{Si } x \text{ décrit } (E), \text{ alors on a : } x\vec{AG} + 8\vec{BG} + 2\vec{CG} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AG} = \frac{8}{x+10}\vec{AB} + \frac{2}{x+10}\vec{AC}$$

On en déduit que G appartient au plan (ABC). L'ensemble des barycentres obtenus lorsque x décrit (E) est le **plan (ABC)**.

3.a) Déterminons puis construisons G

$$\text{Pour } x = -2, \vec{AG} = \vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$$

Dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$, on a **$G(1; \frac{1}{4})$** .

(construire G)

b) Déterminons la surface de niveau k^2 de l'application f

$$f(M) = 3MA^2 - 2MB^2 - MC^2.$$

La somme des coefficients étant nulle, alors :

$$f(M) = f(A) + \phi(A) \text{ avec } \phi(M) = 3\vec{MA} - 2\vec{MB} - \vec{MC}.$$

$$\text{On trouve } f(M) = -3k^2 - 2\vec{AM} \cdot (-2\vec{AB} - 2\vec{AC}).$$

$$\text{Ainsi, } f(M) = k^2 \Leftrightarrow -\vec{AM} \cdot (-2\vec{AB} - 2\vec{AC}) = 2k^2$$

Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (D) passant par A et dirigée par $\vec{u} = -2\vec{AB} - 2\vec{AC}$. On a $(\vec{MH}) \perp (\vec{D})$, donc $-\vec{AM} \cdot \vec{u} = \vec{HA} \cdot \vec{u} = 2k^2 \Rightarrow$

$$HA = \frac{2k^2}{\| -2\vec{AB} - 2\vec{AC} \|}$$

$$\text{On calcule et on trouve } \| -2\vec{AB} - 2\vec{AC} \| = k\sqrt{7}$$

$$\text{Ainsi, } HA = \frac{2k}{\sqrt{7}}$$

La surface de niveau k^2 de f du plan est la **droite (Δ) passant par H et orthogonale à**

(D) passant par A et dirigée par $\vec{u} = -2\vec{AB} - 2\vec{AC}$ avec $\vec{HA} = \frac{2\vec{k}}{\sqrt{7}}$.

c) Déterminons l'ensemble des points M de l'espace tels que :
 $-2MA^2 + 8MB^2 + 2MC^2 = k^2$.

Soit $g(M) = -2MA^2 + 8MB^2 + 2MC^2$.

La somme des coefficients étant non nulle, alors $g(M) = 8MG^2 + g(G)$.

$$g(M) = k^2 \Leftrightarrow GM^2 = \frac{k^2 + 2GA^2 - 8GB^2 + 2GC^2}{8}$$

Calculons : GA, GB, GC

$$\text{On a : } \vec{AG} = \vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC} \Rightarrow AG^2 = AB^2 +$$

$$\frac{AC^2}{16} + \frac{1}{2}\vec{AB} \cdot \vec{AC}, \text{ soit } AG^2 = \frac{21k^2}{16}$$

$$\vec{AG} = \vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC} \Rightarrow \vec{BG} = \frac{1}{4}\vec{AC}, \text{ donc } BG^2 = \frac{k^2}{16}$$

$$\vec{AG} = \vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC} \Rightarrow \vec{CG} = \vec{AB} - \frac{3}{4}\vec{AC}, \text{ donc}$$

$$CG^2 = AB^2 + \frac{9}{16}AC^2 - \frac{3}{2}\vec{AC} \cdot \vec{AB}, \text{ soit } CG^2 = \frac{13k^2}{16}$$

$$\text{Ainsi, on a : } GM^2 = \frac{3k^2}{16} \Rightarrow GM = \frac{k\sqrt{3}}{16}$$

L'ensemble (E) est la sphère de centre G et de rayon $r = \frac{k\sqrt{3}}{16}$.

Activité 8

1) Représentons les points A, B, C, le milieu I de [BC] et construisons G_1 et G_{-1} .

$G_m = \text{bar}\{(A; m^2+1); (B; m); (C; -m)\}$. On en déduit que $G_1 = \text{bar}\{(A; 2); (B; 1); (C; -1)\}$ et $G_{-1} = \text{bar}\{(A; 2); (B; -1); (C; 1)\}$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} & 2\vec{AG}_1 + \vec{BG}_1 - \vec{CG}_1 = \vec{0} \\ & \Rightarrow \vec{AG}_1 = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2\vec{AG}_{-1} - \vec{BG}_{-1} + \vec{CG}_{-1} = \vec{0} \\ & \Rightarrow \vec{AG}_{-1} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} \end{aligned}$$

A partir de ces relations, on construit G_1 et G_{-1} .

2.a) Démonstration

$$\begin{aligned} \text{On a : } (m^2+1)\vec{AG}_m + m\vec{BG}_m - m\vec{CG}_m &= \vec{0} \\ \Rightarrow (m^2+1)\vec{AG}_m + m\vec{BC} + m\vec{CG}_m - m\vec{CG}_m &= \vec{0} \\ \Rightarrow (m^2+1)\vec{AG}_m + m\vec{BC} &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \boxed{\vec{AG}_m = -\frac{m}{m^2+1}\vec{BC}}$$

b) Dressons le tableau de variation de la fonction f

f est définie, continue et dérivable sur J et on a :

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}, \forall x \in J.$$

Pour tout $x \in J$, $x^2 - 1 \leq 0$, donc $f'(x) < 0$ car $(x^2 + 1)^2 > 0 \forall x$.

Il en résulte que f est strictement décroissante sur J.

On a : $f(-1) = \frac{1}{2}$ et $f(1) = \frac{1}{2}$. On en déduit le tableau de variation ci-contre :

x	-1	1
f'(x)	0	0
f(x)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

c) Dédution

De ce qui précède, on a : $\forall x \in J, -\frac{x}{x^2+1}$

$\in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, donc si m décrit J, $-\frac{m}{m^2+1} \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. Ainsi, pour tout m, $\vec{AG}_m$ est

colinéaire à $\vec{BC}$. On en déduit que quand m décrit J, l'ensemble des points G_m est la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{BC}$.

3.a) Déterminons l'ensemble E

$$(E) : \|\vec{2AM} + \vec{BM} - \vec{CM}\| = \|\vec{2AM} - \vec{BM} + \vec{CM}\|.$$

On trouve $MG_1 = MG_{-1}$, (E) est la sphère de diamètre G_1G_{-1} .

b) Déterminons l'ensemble F

$$(F) : \|\overrightarrow{2AM} + \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{2AM} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\|$$

$$\Rightarrow \|2 \overrightarrow{MG_1}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|$$

Soit I le milieu de [BC]. On a : $\|2 \overrightarrow{MG_1}\| =$

$$\|\overrightarrow{2AI}\| \Rightarrow MG_1 = AI.$$

(F) est par conséquent la **sphère de centre G_1 et de rayon $r=AI$.**

4.a) Calcul des coordonnées de G_{-1} et de G_1

On calcule et on trouve $G_1(1; 0; 1)$ et $G_{-1}(-1; 0; 4)$.

b) Démontrons que les ensembles E et F sont sécants suivant un cercle

G_1 est le centre de la sphère (F). En même temps, G_1 appartient à la sphère (E). Une partie de la sphère (E) est alors plongée dans la sphère (F) ; d'où elles sont sécantes.

Montrons que $(E) \cap (F)$ est un cercle

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{2AM} + \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{2AM} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\| \\ \|\overrightarrow{2AM} + \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{2AM} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{2AM} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{2AM} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\|$$

$\Rightarrow MG_{-1} = AI$ d'où $(E) \cap (F)$ est le cercle de centre G_{-1} et de rayon $r=AI$.

c) Déterminons le rayon du cercle d'intersection de E et F.

$r=AI$. On calcule la distance AI et on trouve **$r=\sqrt{5}$.**

Activité 9**1.a) Justifions que les points A, B et C déterminent un plan (P)**

On a : $\overrightarrow{AB}(1; -1; -1)$ et $\overrightarrow{AC}(-3; 1; 1)$
 $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, donc les points **A, B et C ne sont pas alignés**. On conclut qu'ils définissent un plan $(P)=(ABC)$.

b) Déterminons une équation cartésienne du plan (P).

$A(2; -1; 1) \in (P)$. Un vecteur normal au plan (P) est $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

$$M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 0(x-2) + 2(y+1) - 2(z-1) = 0$$

$$\text{Soit } \underline{\underline{(P) : y - z + 2 = 0.}}$$

a) Justifions l'existence de G_m

$$G_m = \text{bar}\{(A; 1-3m); (B; 2m); (C; m)\}.$$

La somme des coefficients affectant les points A, B et C est non nulle. D'où G_m existe $\forall m$.

b) Exprimons en fonction de m les coordonnées (x; y; z) de G_m

On trouve :

$$G_m \begin{cases} x = 2 - m \\ y = -1 - m \\ z = 1 - m \end{cases}$$

c) Dédution

Pour tous points $G_m(x; y; z)$ de l'espace, l'ensemble des points G_m vérifie :

$$\begin{cases} x = 2 - m \\ y = -1 - m \\ z = 1 - m \end{cases}; \text{ on en déduit que l'ensemble}$$

des points G_m est la droite (Δ) de repère **$(A; \vec{u})$ avec $A(2; -1; 1)$ et $\vec{u}(-1; -1; -1)$.**

a) Démontrons que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires

$$(Q) : x + y + z = 0$$

Soit $\vec{n}'$ un vecteur normal à (Q). On a :

$$\vec{n}'(1; 1; 1).$$

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 1(0) + 1(1) + 1(-1) = 0, \text{ donc}$$

$$\underline{\underline{(P) \perp (Q).}}$$

b) Représentation paramétrique de (D).

Soit $(P) \cap (Q) = (D)$

$$\text{On a } (D) : \begin{cases} y - z + 2 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Posons : $z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\text{On a : } \begin{cases} y - \alpha = -2 \\ x + y + \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \alpha - 2 \\ x = -2\alpha + 2 \end{cases}$$

$$\text{Soit } (D) : \begin{cases} x = -2\alpha + 2 \\ y = \alpha - 2 \\ z = \alpha \end{cases} ; (\alpha \in \mathbb{R})$$

c) Etudions la position relative des droites (Δ) et (D).

Un vecteur directeur de (D) est $\vec{v}(-2; 1; 1)$ et $\vec{u}(-1; -1; -1)$ celui de (Δ).

$$T(0; -1; 1) \in (D) \text{ et } \begin{cases} K(1; -2; 0) \\ A(2; -1; 1) \end{cases} \in (\Delta)$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{TK}(1; -1; -1) \text{ et } \overrightarrow{TA}(2; 0; 0)$$

Calculons : $(\vec{u} \wedge \overrightarrow{TK}) \cdot \overrightarrow{TA}$

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{TK} = -2\vec{j} + 2\vec{k} \text{ et}$$

$$(\vec{u} \wedge \overrightarrow{TK}) \cdot \overrightarrow{TA} = 0(2) + (-2)(0) + 0(2) = 0$$

$(\vec{u} \wedge \overrightarrow{TK}) \cdot \overrightarrow{TA} = 0$, on en déduit que (Δ) et (D) sont coplanaires.

Par ailleurs, elles ne sont pas parallèles car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

On en déduit qu'elles sont sécantes.

Vérifions si elles sont perpendiculaires.

On calcule et on trouve $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, preuve que (Δ) et (D) sont perpendiculaires.

Conclusion : les droites (Δ) et (D) sont perpendiculaires.

Activité 10**1) Déterminons les coordonnées du point I.**

On trouve $I(-1; 2; 0)$

2) Démontrons que (D) est une droite dont on donnera un repère.

$$(D) : (2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 5\overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{CA} = \vec{0} ; \text{ soit } \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

On en déduit que (D) est la droite de repère (I ; $\overrightarrow{CA}$) avec $I(-1; 2; 0)$ et $\overrightarrow{CA}(-2; -2; 1)$.

a) Démontrons que (Δ) et (D) sont strictement parallèles

$$(\Delta) : \begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = 2 - 2\alpha \\ z = -2 + \alpha \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R}). \text{ Un vecteur}$$

directeur de (Δ) est $\vec{u}(-2; -2; 1)$. On

remarque que $\vec{u} = \overrightarrow{CA}$, donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont

colinéaires, ce qui atteste que (Δ) et (D) sont parallèles. (1)

Par ailleurs, $I(-1; 2; 0) \in (D)$. Vérifions si $I \in (\Delta)$.

$$I \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = -1 - 2\alpha \\ y_I = 2 - 2\alpha \\ z_I = -2 + \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -1 - 2\alpha \\ 2 = 2 - 2\alpha \\ 0 = -2 + \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 0 \\ \alpha = 2 \end{cases} . \text{ Ceci est une}$$

absurdité car α devrait être unique. On en déduit que $I \notin (\Delta)$. (2)

De (1) et (2), on conclut que (Δ) et (D) sont strictement parallèles.

c) Equation cartésienne du plan (P)

$$K(-1; 2; 2) \in (\Delta) \text{ et } \overrightarrow{IK}(0; 0; -2)$$

Un vecteur normal à (P) est $\overrightarrow{IK} \wedge \overrightarrow{CA}$. On a :

$$\overrightarrow{IK} \wedge \overrightarrow{CA} = -4\vec{i} + 4\vec{j}$$

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

$$M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{IK} \wedge \overrightarrow{CA} = 0$$

$$\Leftrightarrow -4(x + 1) + 4(y - 2) + 0(z + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x + 4y - 4 - 8 = 0$$

$$\text{Soit } (P) : -x + y - 3.$$

Donnons une représentation paramétrique du plan (P).

$$\text{On a } (P) : \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -2 + t - 2t' \end{cases} (t; t') \in \mathbb{R}^2.$$

4.a) Démontrons que (Q) est perpendiculaire à (P).

$(Q) : x + y = 0$. Soit $\vec{n}(1; 1; 0)$ un vecteur normal à (Q).

$$\vec{n} \cdot (\vec{IK} \wedge \vec{CA}) = 1(-4) + 1(4) + 0(0) = 0$$

D'où (Q) et (P) sont perpendiculaires.

b) Calculons les distances $d(H; (P))$ et $d(H; (Q))$

$$d(H; (P)) = \frac{|-1+2-3|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} ul ; \text{ soit } \underline{d(H; (P)) = \sqrt{2} ul}$$

$$d(H; (Q)) = \frac{|1+2|}{\sqrt{(1)^2+1^2}} ul ; \text{ soit } \underline{d(H; (Q)) = \frac{3\sqrt{2}}{2} ul}$$

ul est l'unité de longueur.

c) Dédution

(NB : Faire un schéma pour mieux voir).

D'après la propriété de Pythagore, on a :

$$[d(H; (\Delta'))]^2 = [d(H; (Q))]^2 + [d(H; (P))]^2$$

$$\text{On trouve } d(H; (\Delta')) = \sqrt{\frac{13}{2}} ul$$

Activité 11**1) Démontrons que les points A, B, C déterminent un plan (P)**

$$\text{On a : } \vec{AB}(2; -8; -2) \text{ et } \vec{AC}(3; 0; 1)$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = -8\vec{i} - 8\vec{j} + 24\vec{k}$$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$, donc les points A, B et C déterminent un plan (P).

Equation cartésienne du plan (P)

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

$$M \in (P) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -8(x+1) - 8(y-2) + 24(z-1) = 0$$

$$\text{Soit } \underline{(P) : x + y - 3z + 2 = 0}$$

2. Position relative de (P) et (P')

(P') est dirigé par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$

Donc **$(P') : z = 0$**

On remarque que les vecteurs $\vec{k}(0; 0; 1)$ et $\vec{n}(1; 1; -3)$ respectivement normaux à (P') et à (P) ne sont pas colinéaires. On conclut que (P) et (P') sont sécants puis non perpendiculaires.

Repère cartésien de (Δ)

On a : $(\Delta) = (P) \cap (P')$

$$(\Delta) : \begin{cases} x + y - 3z + 2 = 0 & (1) \\ z = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \text{ dans } (1) \text{ donne : } \begin{cases} x + y = -2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Posons : $y = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\text{On a : } \begin{cases} x = -\alpha - 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Soit } (\Delta) : \begin{cases} x = -\alpha - 2 \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

On en déduit **qu'un repère de (Δ) est $(K; \vec{u})$ avec $K(-2; 0; 0)$ et $\vec{u}(-1; 1; 0)$.**

b) Justification

$$D(0; 1; -1) \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -\alpha - 2 \\ 1 = \alpha \\ 0 = 0 \end{cases} . \text{ On est en}$$

présence d'une absurdité, (α devrait être unique).

D'où $D \notin (\Delta)$.

3. a) Vérifions que (D) et (P) sont perpendiculaires

Un vecteur directeur de (D) est $\vec{v}(-2; -2; 6)$.

On remarque que $\vec{v} = -2\vec{n}$ avec $\vec{n}(1; 1; -3)$ un vecteur normal à (P).

En conséquence, **(D) est orthogonale à (P).**

b) Coordonnées de H

On a : $\{H\} = (D) \cap (P)$ avec $H(x_H; y_H; z_H)$.

On a :

$$\begin{cases} x_H = 1 - 2t & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_H = 2 - 2t & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_H = -1 + 6t & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_H + y_H - 3z_H + 2 = 0 & (4) \end{cases}$$

(1), (2) et (3) dans (4) nous donne $t = \frac{4}{11}$

$$\text{Ainsi, on a : } \begin{cases} x_H = 1 - 2\left(\frac{4}{11}\right) = \frac{3}{11} \\ y_H = 2 - 2\left(\frac{4}{11}\right) = \frac{14}{11} \\ z_H = -1 + 6\left(\frac{4}{11}\right) = \frac{13}{11} \end{cases}$$

Soit $\boxed{H\left(\frac{3}{11}; \frac{14}{11}; \frac{13}{11}\right)}$

c) Dédisons-en que (D) et (Q) sont strictement parallèles.

(P) et (Q) sont perpendiculaires. Or (D) est perpendiculaire à (P). On en déduit que (D) est parallèle à (Q).

$H \in (D)$ et $(P) \cap (Q) = (\Delta)$. (D) étant parallèle à (Q), alors si (D) est contenue dans le plan (Q), le point H devrait appartenir à la droite (Δ).

Tel n'est pas le cas car $z_H \neq 0$, donc $H \notin (\Delta)$. Il en résulte que (D) n'est pas dans le plan (Q).

Par conséquent, (D) et (Q) sont strictement parallèles.

d) Démontrons que les droites (D) et (Δ) sont non coplanaires.

(D) : (T ; $\vec{v}$) avec T(1 ; 2 ; -1) et $\vec{v}(-2; -2; 6)$

(Δ) : (K ; $\vec{u}$) avec K(-2 ; 0 ; 0) et $\vec{u}(-1 ; 1 ; 0)$

$R(-3; 1; 0) \in (\Delta)$. On a : $\overrightarrow{TK}(-3; -2; 1)$ et $\overrightarrow{TR}(-4; -1; -1)$.

(D) et (Δ) sont coplanaires $\Leftrightarrow (\vec{v} \wedge \overrightarrow{TK}) \cdot \overrightarrow{TR}$ est non nul.

Calculons : $(\vec{v} \wedge \overrightarrow{TK}) \cdot \overrightarrow{TR}$

$$\vec{v} \wedge \overrightarrow{TK} = 10\vec{i} - 16\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$(\vec{v} \wedge \overrightarrow{TK}) \cdot \overrightarrow{TR} = -26 \neq 0,$$

On conclut que (D) et (Δ) sont non coplanaires.

4.a) Ecrivons une équation cartésienne du plan (Q).

(D) // (Q). Soit (D') une droite de (Q) parallèle à (D). Supposons que (D') passe par K. On a : $(D') \cap (\Delta) = \{K\}$. On en déduit une

représentation paramétrique de (D') à partir de laquelle on déduit un point de (D').

Soit $P(-4; -2; 6) \in (D')$. Les points K, P et R sont trois points non alignés du plan (Q).

A partir de ces trois points, on déduit une équation cartésienne du plan (Q) et on trouve :

$$\boxed{(Q) : 3x + 3y + z + 6 = 0}$$

b) Calculer les distances $d(D ; (P))$ et $d(D ; (Q))$

$$\bullet \quad d(D ; (P)) = \frac{|0+1-3(-1)+2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-3)^2}}$$

$$\text{Soit } d(D ; (P)) = \frac{6}{\sqrt{11}} ul$$

$$\bullet \quad d(D ; (Q)) = \frac{|3(0)+3(1)+1(-1)+6|}{\sqrt{3^2+3^2+1^2}}$$

$$\text{Soit } d(D ; (Q)) = \frac{8}{\sqrt{19}} ul$$

Dédisons $d(D ; (\Delta))$

$$D(D ; (\Delta)) = \sqrt{[d(D ; (P))]^2 + [d(D ; (Q))]^2}$$

$$\text{On trouve : } d(D ; (\Delta)) = \sqrt{\frac{1388}{209}} ul$$

5.) Déterminons (E)

$$(E) : d(M ; (P)) = \sqrt{11}$$

(E) est le plan passant par F et parallèle au plan (P) tel que $d(F ; (P)) = \sqrt{11}$.

Activité 12

1. Coordonnées des points D, C et I

On a : $D(0 ; 1 ; 0)$

$$\bullet \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \quad (\text{car } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD})$$

Donc $C(1 ; 1 ; 0)$

$$\bullet \quad \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

Donc $I(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

2) Justifions que le plan (P) a pour équation $x - y + z = 0$.

Les points A, C et I définissent le plan (P).

On a : $\overrightarrow{AC}(1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{AI}(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

$$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

$$M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AI}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x - y + z = 0}, \text{ d'où le résultat.}$$

3. Coordonnées de S

Une représentation paramétrique de (Δ) est :

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \frac{1}{6} + \alpha \\ z = \frac{-5}{6} + \alpha \end{cases}; (\alpha \in \mathbb{R})$$

Soit $S(x'; y'; z')$

$$\text{On a : } \begin{cases} x' = 1 + \alpha & (1) \\ y' = \frac{1}{6} + \alpha & (2) \\ z' = \frac{-5}{6} + \alpha & (3) \\ x' - y' + z' = 0 & (4) \end{cases}$$

(1), (2), (3) dans (4) donne $\alpha = 0$.

Par suite, on a : $S(1; \frac{1}{6}; \frac{1}{6})$.

4) Calculons l'aire de la surface de séparation.

(NB : faire un schéma pour mieux voir)

L'aire de la surface de séparation est l'aire du triangle ACI.

$$A(ACI) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AI}\| \cdot ua$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} ua. \text{ Or } ul = 1m, \text{ donc } ua = (1m)^2 = 1m^2$$

$$\text{D'où } A(ACI) = \frac{\sqrt{3}}{4} ua.$$

5.a) Calculons le volume du compartiment en forme du tétraèdre ACDI.

$$V(ACDI) = \frac{A(ACI) \times DI}{3} \cdot uv$$

On trouve $V(ACDI) = \frac{\sqrt{6}}{24} m^3$.

b) Déduisons-en le volume du second compartiment.

Le second compartiment est ABCIE. Soit V le volume de la pyramide.

$$\text{On a : } V = V(ACDI) + V(ABCIE)$$

$$\Rightarrow V(ABCIE) = V - V(ACDI).$$

Calculons V

La pyramide ABCDE peut être découpée en deux tétraèdres ABCE et ACDE.

$$\text{Donc } V = V(ABCE) + V(ACDE)$$

La pyramide étant régulière, alors on a :

$$V(ABCE) = V(ACDE)$$

$$\text{D'où } V = 2 V(ABCE)$$

$$\text{On a : } V(ABCE) = \frac{1}{6} \|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AE}\|. \text{ On}$$

$$\text{trouve } V(ABCE) = \frac{1}{6} m^3$$

$$\text{Soit } V = \frac{1}{3} m^3.$$

On obtient finalement :

$$V(ABCIE) = \frac{8 - \sqrt{6}}{24} m^3$$

Séquence 2 : Applications de l'espace

Activité 1

1.a) Déterminons l'image A' du point A

$$\text{On a : } \begin{cases} x_{A'} = \frac{1}{3}(2x_A + y_A - z_A - 3) \\ y_{A'} = \frac{1}{3}(x_A + 2y_A + z_A + 3) \\ x_{A'} = \frac{1}{3}(-x_A + y_A + 2z_A - 3) \end{cases}$$

On trouve $A'(-2; 1; 0)$.

b) Déterminons l'ensemble des antécédents de A' par p.

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

$$p(M)=A' \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = \frac{1}{3}(2x + y - z - 3) \\ 1 = \frac{1}{3}(x + 2y + z + 3) \\ 0 = \frac{1}{3}(-x + y + 2z - 3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ x + 2y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + 2z = 3 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

Posons : $y = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\text{On trouve : } \begin{cases} x = -\alpha - 1 \\ y = \alpha \\ z = -\alpha + 1 \end{cases}$$

L'ensemble des antécédents de A' est la droite (D) passant par $B(-1; 0; 1)$ ou par $A(1; -2; 3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(-1; 1; -1)$.

2) Démontrons que l'ensemble des points invariants par p est un plan (P).

$$P(M)=M \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z - 3 = 3x \\ x + 2y + z + 3 = 3y \\ -x + y + 2y - 3 = 3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z - 3 = 0 \\ x - y + z + 3 = 0 \\ -x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Les trois lignes de ce système sont équivalentes.

On a donc : $x - y + z + 3 = 0$.

L'ensemble des points invariants par p est alors le plan (P) : $x - y + z + 3 = 0$.

3. a) Démontrons que $M' \in (P)$.

Soit $M'(x'; y'; z')$

$$p(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x + y - z - 3) \\ y' = \frac{1}{3}(x + 2y + z + 3) \\ z' = \frac{1}{3}(-x + y + 2z - 3) \end{cases}$$

$$M' \in (P) \Leftrightarrow x' - y' + z' + 3 = 0$$

Calculons : $x' - y' + z' + 3$

Remplaçons les expressions de x', y' et de z' dans $x' - y' + z' + 3$.

$$\text{On a : } x' - y' + z' + 3 = \frac{1}{3}(2x + y - z - 3) - \frac{1}{3}(x + 2y + z + 3) + \frac{1}{3}(-x + y + 2z - 3) + 3.$$

On effectue le calcul et on trouve :

$$x' - y' + z' + 3 = 0; \text{ d'où } M' \in (P).$$

b) Démontrons que si $M \notin (P)$, la droite (MM') est orthogonale à (P).

Si $M \notin (P)$, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est non nul.

$$\text{On a : } \overrightarrow{MM'}(x' - x; y' - y; z' - z)$$

$$\begin{cases} x' - x = \frac{1}{3}(-x + y - z - 3) \\ y' - y = \frac{1}{3}(x - y + z + 3) \\ z' - z = \frac{1}{3}(-x + y - z - 3) \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, on a : } \overrightarrow{MM'} \begin{cases} \frac{1}{3}(-x + y - z - 3) \\ \frac{1}{3}(x - y + z + 3) \\ \frac{1}{3}(-x + y - z - 3) \end{cases}$$

$\vec{n}(1; -1; 1)$ est un vecteur normal à (P) et $\vec{n}$ est colinéaire à $\overrightarrow{MM'}$, ce qui prouve que $(MM') \perp (P)$.

En conclusion, pour tout point M n'appartenant pas à (P), on a : $(MM') \perp (P)$.

4. Nature de p

De tout ce qui précède, p laisse invariant le plan (P) et si $p(M)=M'$, on a $M' \in (P)$ et $(MM') \perp (P)$. Comme de plus l'ensemble des antécédents d'un point est une droite, alors on

conclut que **p** est la **projection orthogonale sur le plan (P)**.

Retenons :

- ☞ L'ensemble des antécédents d'un point par une projection sur une droite est une **droite dans le plan et un plan dans l'espace**.
- ☞ L'ensemble des antécédents d'un point par une projection sur un plan **est une droite**.

Activité 2

1)Equation cartésienne de (P)

1^{ère} méthode

(P) a pour repère (B ; $\vec{u}$; $\vec{v}$) avec B(1; -1; 4) ; $\vec{u}(2; 0; -1)$ et $\vec{v}(-1; 3; 1)$.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}.$$

Soit M(x; y; z) un point de l'espace.

$$M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x - 1) - (y + 1) + 6(z - 4) = 0$$

$$\text{Soit (P) : } 3x - y + 6z - 28 = 0.$$

2^{ème} méthode

$$\text{On a (P) : } \begin{cases} x = 1 + 2t - t' \\ y = -1 + 3t' \\ z = 4 - t + t' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2t - t' = x - 1 & (1) \\ 3t' = y + 1 & (2) \\ -t + t' = z - 4 & (3) \end{cases}$$

$$(1)+(3) \text{ donne } t = x - 1 + z - 4$$

$$(4) \text{ et } (2) \text{ donnent : } \begin{cases} t = x - 1 + z - 4 \\ t' = \frac{1}{3}(y + 1) \end{cases}$$

En remplaçant t et t' dans $x = 1 + 2t - t'$, on obtient : **(P) : $3x - y + 6z - 28 = 0$** .

2.Coordonnées de A'

Soit A'(x'; y'; z')

$$p(A)=A' \Leftrightarrow \begin{cases} (AA') \perp (P) \\ A' \in (P) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'} = k(\vec{u} \wedge \vec{v}) ; k \in \mathbb{R} \\ A' \in (P) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = 3k - 1 & (1) \\ y' = 2 - k & (2) \\ z' = 1 + 6k & (3) \end{cases}$$

$$3x' - y' + 6z' - 28 = 0 \quad (4)$$

(1), (2) et (3) dans (4) donne :

$$3(3k - 1) - (2 - k) + 6(1 + 6k) - 28 = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{27}{46}$$

$$\text{Ainsi, on a : } \begin{cases} x' = 3 \times \frac{27}{46} - 1 \\ y' = 2 - \frac{27}{46} \\ z' = 1 + 6 \times \frac{27}{46} \end{cases}$$

$$\text{Soit } A'(\frac{35}{46}; \frac{65}{46}; \frac{208}{46}).$$

3)Déterminons une représentation paramétrique de l'ensemble des antécédents de A' par p.

L'ensemble des antécédents de A' par p est la droite (Δ) de repère (A ; $\overrightarrow{AA'}$) avec $\overrightarrow{AA'}(\frac{81}{46}; -\frac{27}{46}; \frac{162}{46})$.

Une représentation paramétrique de (Δ) est :

$$\begin{cases} x = -1 + \frac{81}{46}\alpha \\ y = 2 - \frac{27}{46}\alpha \\ z = 1 + \frac{162}{46}\alpha \end{cases} ; (\alpha \in \mathbb{R}).$$

4.a) Représentation paramétrique de (D)

Une représentation paramétrique de (D) est :

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}).$$

b)Coordonnées de B'

$$p(B)=B' \Leftrightarrow \begin{cases} (BB') \perp (D) \\ B' \in (D) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BB'} \cdot \vec{u} = 0 \\ B' \in (D) \end{cases}$$

Soit $B'(x'; y'; z')$

$$\overrightarrow{BB'} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow x' - y' - 2z' - 1 = 0$$

$$\text{Ainsi, on a : } \begin{cases} x' = -1 + t \\ y' = 2 - t \\ z' = 1 - 2t \\ x' - y' - 2z' - 1 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant les 3 premières lignes dans la dernière, on trouve $t = 1$.

Par suite, on a : **$B(0; 1; -1)$** .

c) Donnons une équation cartésienne de l'ensemble des antécédents de A' par p

- Dans le plan, cet ensemble est la droite (BB') . Sa représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2 - 2\beta \\ y = 3 - 2\beta; (\beta \in \mathbb{R}). \\ z = -1 \end{cases}$$

A partir de cette représentation paramétrique, on déduit un système d'équations cartésiennes de la droite (BB') . Il suffit de considérer la 1^{ère} et la 2^{ème} ligne pour trouver une équation linéaire par élimination de β . On forme par la suite le système d'équations cartésiennes avec la troisième ligne.

- Dans l'espace, l'ensemble des antécédents de A' par p est le plan passant par B et orthogonal à D. Il a donc pour vecteur normal $\vec{u}$. On en déduit l'équation cartésienne : **$x - y - 2z - 1 = 0$** .

a) Etudions la position relative de (Q) par rapport à (P)

$\vec{n}(1; 1; 1)$ est un vecteur normal à (Q). Ce vecteur n'est pas colinéaire à $\vec{u} \wedge \vec{v}(3; -1; 6)$ normal à (P). On en déduit que (P) et (Q) ne sont pas parallèles. Comme $\vec{n} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 8 \neq 0$, alors (Q) n'est pas orthogonal à (P).

En conclusion, (P) et (Q) sont sécants.

Représentation paramétrique de (Q)

En posant $z = t$ et $y = t'$, on trouve :

$$(Q) : \begin{cases} x = -t - t' + 3 \\ y = t' \\ z = t \end{cases} ; (t, t') \in \mathbb{R}^2.$$

b) Déterminons l'expression analytique de la projection orthogonale sur (Q).

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace et $M'(x'; y'; z')$ son image par p.

$$p(M) = M'$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (MM') \perp (Q) \\ M' \in (Q) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} = k\vec{n} \\ M' \in (Q) \end{cases} ; k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x' - x = k(1) \\ y' - y = k(1) \\ z' - z = k(1) \\ x' + y' + z' - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = k + x \\ y' = k + y \\ z' = k + z \\ x' + y' + z' - 3 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant les 3 premières lignes dans la 4^{ème}, on trouve $k = \frac{3-x-y-z}{3}$. En remplaçant k dans x', y' et z' , on obtient :

$$(p) : \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x - y - z + 3) \\ y' = \frac{1}{3}(-x + 2y - z + 3) \\ z' = \frac{1}{3}(-x - y + 2z + 3) \end{cases}$$

6) Représentation paramétrique de (D_1)

$(P) \cap (Q) = (D_1)$, on a donc :

$$(D_1) : \begin{cases} 3x - y + 6z - 28 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

En posant $z = \alpha$, on obtient :

$$(D_1) : \begin{cases} x = \frac{31}{4} - \frac{7}{4}\alpha \\ y = -\frac{19}{4} + \frac{3}{4}\alpha \\ z = \alpha \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R})$$

Expression de la projection orthogonale p' sur la droite (D_1)

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace et $M'(x'; y'; z')$ son image par p' .

$$\text{On a : } p'(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} (MM') \perp (D_1) \\ M' \in (D_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{v} = 0 \\ M' \in (D_1) \end{cases} \text{ avec } \vec{v}(-\frac{7}{4}; \frac{3}{4}; 1).$$

$$\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{v} = -\frac{7}{4}x + \frac{3}{4}y + z + \frac{7}{4}x' - \frac{3}{4}y' - z'$$

Ainsi, on a :

$$\begin{cases} x' = \frac{31}{4} - \frac{7}{4}\alpha \\ y' = -\frac{19}{4} + \frac{3}{4}\alpha \\ z' = \alpha \\ -\frac{7}{4}x + \frac{3}{4}y + z + \frac{7}{4}x' - \frac{3}{4}y' - z' = 0 \end{cases}$$

En remplaçant les 3 premières lignes dans la 4^{ème}, on obtient $\alpha = \frac{80-14x+6y+8z}{37}$

On a donc :

$$(p') : \begin{cases} x' = \frac{1}{148}(98x - 42y - 56z + 587) \\ y' = \frac{1}{148}(-42x + 18y + 24z + 943) \\ z' = \frac{1}{37}(-14x + 6y + 8z + 80) \end{cases}$$

Activité 3

1.Expression analytique de h_0

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace et $M'(x'; y'; z')$ son image par h_0 .

$$h_0(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3x + (1-3) \times 2 \\ y' = 3y + (1-3) \times 0 \\ z' = 3z + (1-3) \times (-1) \end{cases}$$

Soit
$$h_0 : \begin{cases} x' = 3x - 4 \\ y' = 3y \\ z' = 3z + 2 \end{cases}$$

2) Donnons l'expression analytique de l'homothétie $h_1(B; \frac{1}{2})$, $h_2(C; 2)$ et $h_3(D; -4)$.

- $h_1(B; \frac{1}{2})(M)=M' \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + (1 - \frac{1}{2}) \times 1 \\ y' = \frac{1}{2}y + (1 - \frac{1}{2}) \times (-1) \\ z' = \frac{1}{2}z + (1 - \frac{1}{2}) \times 0 \end{cases}$$

Soit

$$h_1 : \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \\ z' = \frac{1}{2}z \end{cases}$$

- $h_2(C; 2)(M)=M' \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x' = 2x + (1-2) \times (-1) \\ y' = 2y + (1-2) \times 0 \\ z' = 2z + (1-2) \times 1 \end{cases}$$

Soit

$$h_2 : \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y \\ z' = 2z - 1 \end{cases}$$

- $h_3(D; -4)(M)=M' \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x' = -4x + (1+4) \times 0 \\ y' = -4y + (1+4) \times 1 \\ z' = -4z + (1+4) \times (-1) \end{cases}$$

Soit

$$h_3 : \begin{cases} x' = -4x \\ y' = -4y + 5 \\ z' = -4z - 5 \end{cases}$$

3.Expression analytique de $h_1 \circ h_3$

$$h_1 \circ h_3 = h_1[h_3(M)] = h_1(M')$$

Ainsi, on a :

$$h_1 \circ h_3 : \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(-4x) + \frac{1}{2} \\ y' = \frac{1}{2}(-4y + 5) - \frac{1}{2} \\ z' = \frac{1}{2}(-4z - 5) \end{cases}$$

Soit

$$h_1 \circ h_3 : \begin{cases} x' = -2x + \frac{1}{2} \\ y' = -2y + 2 \\ z' = -2z - \frac{5}{2} \end{cases}$$

Éléments caractéristiques de $h_1 \circ h_3$

Soit $\Omega(a; b; c)$. On a :

$$\begin{cases} (1+2)a = \frac{1}{2} \\ (1+2)b = \frac{1}{2} \\ (1+2)c = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = \frac{2}{3} \\ c = -\frac{5}{6} \end{cases}$$

$h_1 \circ h_3$ est l'homothétie de centre $\Omega(\frac{1}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{5}{6})$ et de rapport $k = -2$.

4) Déterminons l'expression analytique de $h_2 \circ h_1$

$$h_2 \circ h_1 : \begin{cases} x' = 2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) + 1 \\ y' = 2\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right) \\ z' = 2\left(\frac{1}{2}z\right) - 1 \end{cases}$$

Soit

$$h_2 \circ h_1 : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \\ z' = z - 1 \end{cases}$$

Éléments caractéristiques de $h_2 \circ h_1$

L'expression analytique de $h_2 \circ h_1$ est sous la

forme $\begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \\ z' = kz + r \end{cases}$ avec $k = 1$. On en déduit

que $h_2 \circ h_1$ est la translation de vecteur de translation $\vec{u}(2; -1; -1)$.

5. a) Donnons la nature et les éléments caractéristiques de h_{ot} .

$$h_{ot} \text{ donne : } \begin{cases} x' = -4x + 8 \\ y' = -4y + 1 \\ z' = -4z - 9 \end{cases}$$

On en déduit que h_{ot} est l'homothétie de centre $I(\frac{8}{5}; \frac{1}{5}; -\frac{9}{5})$ et de rapport $k = -4$.

b) Donnons la nature et les éléments caractéristiques de t_{oh} .

$$t_{oh} \text{ donne : } \begin{cases} x' = -4x - 2 \\ y' = -4y + 6 \\ z' = -4z - 4 \end{cases}$$

On en déduit que t_{oh} est l'homothétie de centre $H(-\frac{2}{5}; \frac{6}{5}; -\frac{4}{5})$ et de rapport $k = -4$.

Activité 4

1) Donnons l'expression analytique de la projection p orthogonale sur (P)

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace et $M'(x'; y'; z')$ son image par p.

En posant les conditions mathématiques qui régissent p, on trouve :

$$p : \begin{cases} x' = \frac{1}{7}(5x - 3y - z - 2) \\ y' = \frac{1}{14}(-6x + 5y - 3z - 6) \\ z' = \frac{1}{14}(-2x - 3y + 13z - 2) \end{cases}$$

Coordonnées de H'

$p(H) = H'$. On trouve :

$$H'(0; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}).$$

2.a) Vérifions que (P) et (P') sont parallèles.

Les vecteurs $\vec{n}(2; 3; 1)$ et $\vec{n}'(2; 3; 1)$ sont respectivement normaux aux plans (P) et (P').

On remarque que $\vec{n} = \vec{n}'$, d'où (P) // (P').

b) Dédution

Le point $K(0; 0; 2) \in (P')$. Soit K' l'image de K par p . On a : $K'(-\frac{4}{7}; -\frac{6}{7}; \frac{12}{7})$

(P) étant parallèle à (P') , alors il existe **une translation de vecteur** $\overrightarrow{KK'}(-\frac{4}{7}; -\frac{6}{7}; \frac{12}{7})$ qui transforme (P) en (P') .

3.a) Représentation paramétrique de l'ensemble des antécédents (Δ) de H' par p

L'ensemble des antécédents de H' par p est la droite (Δ) passant par H et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{HH'}(-1; -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$. On en déduit une représentation paramétrique de (Δ) :

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = -\frac{3}{2}t + 1 \\ z = -\frac{1}{2}t \end{cases}; (t \in \mathbb{R}).$$

b) Expression analytique de p'

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace et $M'(x'; y'; z')$ son image par p' .

En posant les conditions mathématiques qui planent sur p' , on obtient :

$$p' : \begin{cases} x' = \frac{1}{7}(2x + 3y + z + 12) \\ y' = \frac{1}{14}(6x + 9y + 3z - 1) \\ z' = \frac{1}{14}(x + 3y + z - 5) \end{cases}$$

4.a) Coordonnées de H''

$p(H)=H'$. On calcule et on trouve :

$$H''(\frac{16}{7}; 1; -\frac{1}{14}).$$

Montrons que l'équation cartésienne du plan (Q) est : $\frac{3}{4}x - \frac{25}{14}y + \frac{27}{7}z + \frac{29}{28} = 0$

$$\overrightarrow{HH'}(-1; -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}) \text{ et } \overrightarrow{HH''}(\frac{9}{7}; 0; -\frac{1}{14})$$

$\overrightarrow{HH'} \wedge \overrightarrow{HH''} = \frac{3}{8}\vec{i} - \frac{25}{28}\vec{j} + \frac{27}{14}\vec{k}$ est un vecteur normal à (Q) .

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

$$M \in (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot (\overrightarrow{HH'} \wedge \overrightarrow{HH''}) = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{8}(x-1) - \frac{25}{8}(y-1) + \frac{27}{14}z = 0$$

Soit $(Q) : \frac{3}{4}x - \frac{25}{14}y + \frac{27}{7}z + \frac{29}{28} = 0$; d'où le résultat.

b) Prouvons que $(\Delta) \subset (Q)$.

(Δ) passe par H et H' donc $(\Delta) \subset (Q)$ car H et H' appartiennent à (Q) .

5) Déterminons l'intersection du plan (P) , (Q) et du plan (R)

$$(P) \cap (Q) \cap (R) : \begin{cases} 2x + 3y + z + 2 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \\ \frac{3}{4}x - \frac{25}{14}y + \frac{27}{7}z + \frac{29}{28} = 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système par la méthode du pivot de Gauss, on trouve : $x = -\frac{187}{171}$;

$$y = \frac{12}{171} \text{ et } z = -\frac{4}{171}$$

D'où $(P) \cap (Q) \cap (R) = \{G\}$ avec

$$G(-\frac{187}{171}; \frac{12}{171}; -\frac{4}{171})$$

6. Démontrons que f est une translation

$$f : \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MH} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{ME}$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MH} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{BD} ; \text{ soit}$$

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{BD}$$

On conclut que f est une translation de vecteur de translation $\overrightarrow{BD}(-1; 1; 0)$.

b) Donnons la nature et les éléments caractéristiques de $\text{to}h_1$

$$h_1(H' ; |x_{H''}|) = h_1(H' ; \frac{16}{7})$$

$$t \circ h_1 \text{ donne : } \begin{cases} x' = \frac{16}{7}x - 1 \\ y' = \frac{16}{7}y + \frac{23}{14} \\ z' = \frac{16}{7}z + \frac{9}{14} \end{cases}$$

$t \circ h_1$ est l'homothétie de centre $I(\frac{7}{9}; -\frac{161}{126}; -\frac{1}{2})$

et de rapport $k = \frac{16}{7}$.

7) Donnons la nature et les éléments

caractéristiques de $h_3^{-1} \circ t \circ h_1 \circ h_2 \circ t^{-1}$

$$h_3^{-1} \circ t \circ h_1 \circ h_2 \circ t^{-1} = h_3^{-1}[t \circ h_1 \circ h_2 \circ t^{-1}]$$

$$t \circ h_1 \circ h_2 \circ t^{-1} \text{ donne : } \begin{cases} x' = -\frac{8}{7}x + \frac{279}{49} \\ y' = -\frac{8}{7}y + \frac{87}{14} \\ z' = -\frac{8}{7}z + \frac{22}{49} \end{cases}$$

$$h_3(O; -\frac{8}{7}) \Rightarrow h_3^{-1}(O; -\frac{7}{8})$$

On trouve donc $h_3^{-1} \circ t \circ h_1 \circ h_2 \circ t^{-1}$:

$$\begin{cases} x' = x - \frac{279}{56} \\ y' = y - \frac{87}{16} \\ z' = z - \frac{11}{28} \end{cases} ; \text{ il s'agit donc de la translation}$$

de vecteur $\vec{u}(-\frac{279}{56}; -\frac{87}{16}; -\frac{11}{28})$.

Activité 5

1) Déterminons l'expression analytique de la réflexion S de plan (P).

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace et $M'(x'; y'; z')$ son image par S. Soit I le milieu de $[MM']$.

$\vec{n}(2; -1; 1)$ un vecteur normal à (P).

$$S(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} (MM') \perp (P) \\ I \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} = k\vec{n} \\ I \in (P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2k + x \\ y' = -k + y \\ z' = k + 3 \\ x + x' - \frac{y+y'}{2} + \frac{z+z'}{2} = 1 \end{cases}$$

Les trois premières lignes dans la quatrième nous donne $k = \frac{-2x+y-z+1}{3}$.

Ainsi, on trouve l'expression analytique de S :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x + 2y - 2z + 2) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + 2y + z - 1) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + y + 2z + 1) \end{cases}$$

2) Démontrons que g est un demi-tour dont on précisera l'axe

- Déterminons l'ensemble des points invariants par g.

$$g(M)=M \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases}$$

Ce système est un système d'équations cartésiennes de la droite (Δ) de repère ($A; \vec{u}$) où $A(1; -1; 2)$ et $\vec{u}(-1; 1; 1)$. (1)

- Montrons que $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0$.

$$\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = x - y - z - x' + y' + z'$$

En remplaçant x', y' et z' par leurs expressions, on trouve après calculs $x - y - z - x' + y' + z' = 0$.

Soit $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0$. (2)

- Montrons que J milieu de $[MM']$ appartient à (Δ).

$$\text{On a } (\Delta) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases} \text{ et } J(\frac{x+x'}{2}; \frac{y+y'}{2}; \frac{z+z'}{2})$$

$$J \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x + x' = 2 - 2t \\ y + y' = -2 + 2t \\ z + z' = 4 + 2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2-x-x'}{2} \\ t = \frac{y+y'+2}{2} \\ t = \frac{z+z'-4}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3}(-x + y + z) \\ t = \frac{1}{3}(-x + y + z) \\ t = \frac{1}{3}(-x + y + z) \end{cases}$$

t existe et est unique. On en déduit que $J \in (\Delta)$ (3).

De (1), (2) et (3), on conclut que **g est un demi-tour d'axe (Δ) de repère ($A; \vec{u}$) où $A(1; -1; 2)$ et $\vec{u}(-1; 1; 1)$.**

3. Démontrons que f est une réflexion de plan à préciser.

- Déterminons l'ensemble des points invariants par f.

$$f(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \\ -2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des points invariants par f est donc le plan (Q) d'équation :

$$-2x + y - z + 1 = 0 \quad (1)$$

- Montrons que $(MM') \perp (Q)$.

Soit $\vec{n}(2; -1; 1)$ un vecteur normal à (Q)

$$(MM') \perp (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = k\vec{n}; k \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2k + x \\ y' = -k + y \\ z' = k + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{x' - x}{2} \\ k = y - y' \\ k = z - z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{3}(-2x + y - z + 1) \\ k = \frac{1}{3}(-2x + y - z + 1) \\ k = \frac{1}{3}(-2x + y - z + 1) \end{cases}$$

k existe et est unique, donc $(MM') \perp (Q)$ (2)

- Montrons que le milieu I de MM' appartient à (Q).

$$I\left(\frac{x+x'}{2}; \frac{y+y'}{2}; \frac{z+z'}{2}\right) \in (Q) \Leftrightarrow x + x' - \frac{y+y'}{2} + \frac{z+z'}{2} - 1 = 0$$

En remplaçant x' , y' et z' par leurs

expressions, on trouve que $x + x' - \frac{y+y'}{2} +$

$$\frac{z+z'}{2} - 1 = 0 \text{ et donc } I \in (Q) \quad (3).$$

De (1), (2) et (3), on conclut que **f est une réflexion de plan (Q) d'équation:**

$$-2x + y - z + 1 = 0.$$

4) Déterminons l'expression analytique du demi-tour S_{Δ} d'axe (Δ)

$$(\Delta) : \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

($t \in \mathbb{R}$)

Soit $\vec{u}(-1; 1; 1)$ un vecteur directeur de (Δ) et soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace et $M'(x'; y'; z')$ son image par S_{Δ} . Posons H le milieu de $[MM']$

$$S_{\Delta}(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} (MM') \perp (\Delta) \\ M' \in (\Delta) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0 \\ H \in (\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x' = 2 - 2t - x \\ y' = -2 + 2t - y \\ z' = 4 + 2t - z \\ -x' + y' + z' + x - y - z = 0 \end{cases}$$

En introduisant les trois premières lignes du système dans la quatrième, on obtient :

$$t = \frac{1}{3}(-x + y + z).$$

Ainsi, on trouve

$$S_{\Delta} : \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x - 2y - 2z + 6) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2z - 6) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + 2y - z + 12) \end{cases}$$

Activité 6**1. Coordonnées de G**

On calcule et on trouve **G(1 ; 1 ; 1)**.

Démontrons que $(OG) \perp (IJK)$

On a : $\vec{OG}(1; 1; 1)$; $\vec{IJ}(-3; 3; 0)$; $\vec{IK}(-3; 0; 3)$

$$\vec{IJ} \wedge \vec{IK} = 9\vec{i} + 9\vec{j} + 9\vec{k}, \text{ soit } \vec{IJ} \wedge \vec{IK} = 9\vec{OG}$$

D'où $(OG) \perp (IJK)$.

2. Image de O par $S_{(IJK)}$

Il faut déterminer l'expression analytique de $S_{(IJK)}$. Pour cela, on peut d'abord déterminer une équation cartésienne du plan (IJK). On fait par la suite les calculs des coordonnées et on trouve :

$$\underline{\underline{O'(2; 2; 2)}}.$$

3. Image des points O, I, J et K.

Déterminer l'expression analytique du demi-tour d'axe (OG). On pourra d'abord déterminer une représentation paramétrique de la droite (OG).

Remplacer par la suite les coordonnées de O, I, J et K dans l'expression analytique et trouver : $\mathbf{O}'=\mathbf{O}$, $\mathbf{I}'(-1; 2; 2)$; $\mathbf{J}'(2; -1; 2)$ et $\mathbf{K}'(2; 2; -1)$.

4.a)Image O' et H' de O et H par S_(P)

En suivant les mêmes indications que précédemment, on trouve **$\mathbf{O}'(2; -1; 1)$ et $\mathbf{H}'(1; 3; 1)$** .

b)Démontrons que les droites (OH) et (O'H) sont sécantes en un point de (P)

Une représentation paramétrique de (OH) est :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}).$$

Une représentation paramétrique de (O'H') est :

$$\begin{cases} x = -\alpha + 2 \\ y = 4\alpha - 1 \\ z = 1 \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R}).$$

(OH) et (O'H') sont sécantes si leur intersection est réduite à un singleton dont les coordonnées vérifient simultanément la représentation paramétrique de (OH) et celle

de (O'H'). Le système $\begin{cases} 3t = -\alpha + 2 \\ 2t = 4\alpha - 1 \\ 2t = 1 \end{cases}$ devrait

alors avoir un unique couple de solution $(t; \alpha)$.

En résolvant ce système, on trouve

$(t; \alpha) = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ qui montre que (OH) et (O'H')

sont sécantes au point $\mathbf{P}(\frac{3}{2}; 1; 1)$.

5.a)Déterminons les images O' et A' des points O et A par le demi-tour d'axe (D)

L'expression analytique de $S_{(D)}$ est :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-2x - y - 2z - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(-x - 2y + 2z + 6) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + 2y + z - 6) \end{cases}$$

On trouve $\mathbf{O}'(-2; 2; -2)$ et

$\mathbf{A}'(-\frac{10}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{7}{3})$.

b)Donnons un système d'équations cartésiennes de la droite (O'A').

Une représentation paramétrique de la droite

$$(O'A') \text{ est : } \begin{cases} x = -\frac{4}{3}t - 2 & (1) \\ y = -\frac{8}{3}t + 2 & (2) \\ z = -\frac{1}{3}t - 2 & (3) \end{cases}$$

$-2 \times (1) + (2)$ donne : $-2x + y = 6$

$(1) - 4 \times (3)$ donne : $x + 4z - 6 = 0$

$(2) - 8 \times (3)$ donne : $y - 8z - 18 = 0$

Ainsi (O'A') a pour système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} -2x + y - 6 = 0 \\ x + 4z - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{ou bien :}$$

$$\begin{cases} -2x + y - 6 = 0 \\ y - 8z - 18 = 0 \end{cases} \quad \text{ou bien :}$$

$$\begin{cases} x + 4z - 6 = 0 \\ y - 8z - 18 = 0 \end{cases}$$

SA n°2 : Organisation des données

Séquence 1 : Système d'équations

Activité 1

1-Résolution du système

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 6 & (1) \\ x + y - z = 1 & (2) \\ x + 5y - z = 9 & (3) \end{cases}$$

On déduit de l'équation ① que $y = 2x - 2z - 6$.
 6. On remplace y par $2x - 2z - 6$ dans les équations ② et ③. On obtient :

$$\begin{cases} y = 2x - 2z - 6 \\ 3x - 3z = 7 \\ -9x + 9z = -21 \end{cases}$$

Le système $\begin{cases} 3x - 3z = 7 \\ -9x + 9z = -21 \end{cases}$ a pour solutions tous les couples $(x ; y)$ de nombres réels tels que : $3x - 3z = 7$.

On donne à l'une des inconnues une valeur abstraite, par exemple $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

On a :

$$\begin{cases} x = \frac{7}{3} + \alpha \\ y = -\frac{3}{4} \\ z = \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

Donc, l'ensemble des triplets de solutions de (Σ_2) est :

$$\left\{ \left(\frac{7}{3} + \alpha ; -\frac{3}{4} ; \alpha \right), \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

2-a) Représentation de l'ensemble (E)

Dans un repère, on construit la droite $x + 2y = 6$ à partir de laquelle on délimite le demi-plan $x + y \geq 6$. On en fait de même pour $5x + 4y \leq 40$ et on fait par la suite leur intersection.

b-i)

Soit F la fonction définie par $F(x ; y) = x + y$.

$F(x ; y)$ sera maximale lorsque la droite (D_1) d'équation $x + y = k$ passera par A , le point d'intersection des droites d'équations $5x + 4y = 40$ et $y = 7$.

On a $A(2 ; 4 ; 7)$; donc :

$$F_{\max}(x ; y) = 9,4.$$

ii)

La fonction F sera maximale en nombres entiers en trois points de la zone hachurée

$(2 ; 7) ; (3 ; 6) ; (4 ; 5)$. Pour chacun de ces points, on a :

$$F(x ; y) = 9.$$

iii)

Soit G la fonction définie par $G(x ; y) = 2x + y$. $G(x ; y)$ sera maximale lorsque la droite (D_2) d'équation $2x + y = k$ passera par le point $B(8 ; 0)$; donc :

$$G_{\max}(x ; y) = 16.$$

$G(x ; y)$ sera minimale lorsque la droite (D_2) d'équation $2x + y = k$ passera par le point $C(3 ; 0)$; donc :

$$G_{\min}(x ; y) = 3.$$

Activité 2

1-a) Nombre de fruits de chaque variétés

Les données permettent de former le système suivant dans lequel a , b et c désignent respectivement le nombre de bananes, de mangues et d'ananas

$$\begin{cases} a + b + c = 12 \\ 5a + 12b + 16c = 128 \end{cases} \implies \begin{cases} a + b + c = 12 \\ 7b + 11c = 68 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$(a ; b ; c) \in \mathbb{N}^3$$

Ainsi, Barbara a acheté 4 bananes, 5 mangues et 3 ananas.

b)

Dans l'ordre c, a, b , on a : 3, 4, 5. Ils sont par conséquent des entiers consécutifs.

2.) Résolution du système

Le système équivaut à :

$$\begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x - my = \sqrt{2} - 1 \\ x - (\sqrt{2} + 1)y = m \end{cases}$$

Nous allons résoudre ce système en utilisant la méthode de **CRAMER**.

On a :

$$D = m - 1$$

$$D_x = m^2 - 1 \text{ et } D_y = (\sqrt{2} - 1)(m - 1)$$

- Si $m \neq 1$, $S = \{(m + 1; \sqrt{2} - 1)\}$
- Si $m = 1$, $S = \{(1 + \sqrt{2} + 1)\lambda; \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

NB : On peut également utiliser les méthodes de substitution, de combinaison ou de comparaison et aboutir aux mêmes conclusions.

Activité 3

1-a)

Résolution du système

$$\begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & \textcircled{1} \\ 5x + y + z = 3 & \textcircled{2} \\ 3x + y - 2z = -1 & \textcircled{3} \end{cases}$$

- On élimine x dans $\textcircled{2}$ et dans $\textcircled{3}$, par combinaison de chacune de ces équations avec (E_1) . On obtient :

$$\begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \\ -28y - 36z = 12 \leftarrow 5 \times \textcircled{1} - \textcircled{2} \\ -16y - 19z = 10 \leftarrow 3 \times \textcircled{1} - \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & \textcircled{1} \\ -7y - 9z = 3 & \textcircled{2}' \\ -16y - 19z = 10 & \textcircled{3}' \end{cases}$$

- On élimine y dans $\textcircled{3}'$ par combinaison de $\textcircled{2}'$ et $\textcircled{3}'$. On obtient

$$(E_1) : \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \\ -7y - 9z = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

- Il reste à résoudre ce système « triangulaire ». On obtient en

commençant par la dernière équation puis en remontant $z = 2$, $y = -3$ et $x = 2$. Donc le système (E_1) a un unique triplet solution $(2; -3; 2)$.

1-b)

Solution de (T)

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ et } \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

Ainsi (T) donne :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x-2|}} - \frac{20}{y} + 14\sqrt{3z} = 3 \\ \frac{5}{\sqrt{|x-2|}} + \frac{12}{y} + 2\sqrt{3z} = 3 \\ \frac{3}{\sqrt{|x-2|}} + \frac{4}{y} - 4\sqrt{3z} = -1 \end{cases}$$

Posons : $X = \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}$; $Y = \frac{4}{y}$ et $Z = 2\sqrt{3z}$.

(T) est équivalent à :

$$\begin{cases} X - 5Y - 7Z = 3 \\ 5X + 3Y + Z = 3 \\ 3X + Y - 2Z = -1 \end{cases}$$

On déduit de ce qui précède que $X = 2$; $Y = -3$; $Z = 2$.

- $X = 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{|x-2|}} = 2 \Rightarrow \frac{1}{|x-2|} = 4 \Rightarrow |x-2| = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = \frac{1}{4} \\ \text{ou} \\ x - 2 = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{4} \\ \text{ou} \\ x = \frac{7}{4} \end{cases}$$

- $Y = -3 \Rightarrow \frac{4}{y} = -3 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}$

- $Z = 2 \Rightarrow 2\sqrt{3z} = 2 \Rightarrow z = \frac{1}{3}$

Ainsi, l'ensemble solution de (T) est :

$$\left\{ \left(\frac{9}{4}; -\frac{4}{3}; \frac{1}{3} \right); \left(\frac{7}{4}; -\frac{4}{3}; \frac{1}{3} \right) \right\}$$

2-

Réolvons (R)

$$(R) : \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 3y - 3z = 0 \text{ (Absurde)} \\ 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

(R) n'admet donc pas de solutions réelles.

3-

Preuve

$$(\delta') : \begin{cases} x + 2y + 5z = 4 \\ x + y + 2z = 6 \\ 2x + 3y + 7z = 10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 4 \\ y + 3z = -2 \\ y + 3z = -2 \end{cases}$$

$$\text{Donc } (\delta') : \begin{cases} x + 2y + 5z = 4 \\ y + 3z = -2 \end{cases}$$

Posons : $z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

On déduit que $y = -2 - 3\alpha$ et $x = 8 + 11\alpha$.

L'ensemble solution est donc $\{(3 + 11\alpha) ; (-2 - 3\alpha) ; \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$. C'est la preuve que (δ') admet une infinité de solution.

Activité 4

1-

Formons le système

- 1^{er} jour :

$$x + 2y + 4z + 4t = 4800 \text{ f}$$

- 2^e jour :

$$2x + 3y + 4z + t = 6800 \text{ f}$$

- 3^e jour :

$$3x + 4y + z + 2t = 7200 \text{ f}$$

- 4^e jour :

$$4x + y + 2z + 3t = 5200 \text{ f}$$

Ainsi, on forme le système :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 4800 \\ 2x + 3y + 4z + t = 6800 \\ 3x + 4y + z + 2t = 7200 \\ 4x + y + 2z + 3t = 5200 \end{cases}$$

2-

En résolvant ce système par la méthode du pivot de Gauss, on obtient le système triangulaire :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 4800 \\ y + 2z + 7t = 2800 \\ 4z - zt = 1600 \\ 40t = 4000 \end{cases}$$

On déduit que $t = 100 \text{ f}$, $z = 500 \text{ f}$, $y = 1100 \text{ f}$, et $x = 700 \text{ f}$.

Ainsi, Sonia vend la banane à 700 f, l'ananas à 1100 f, la mangue à 500 f et le raisin à 100 f.

Activité 5**1-Traduisons les données sous forme d'équations.**

On a : $f(x) = ax^3 - bx^2 - cx + d$.

- $f(x) = \frac{31}{6} \Rightarrow -a - b + c + d = \frac{31}{6}$
- $\frac{31}{6}$ est un maximum de f , donc $f'(-1) = 0$.
 f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3ax^2 - 2bx - c$. $f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b - c = 0$.
- $(\mathcal{C})$ admet une demi-tangente horizontale en $M(2 ; y)$, donc $f'(2) = 0$
 $\Rightarrow 12a - 4b - c = 0$.
- $(\mathcal{C})$ passe par $A(1 ; \frac{11}{6})$ donc $f(1) = \frac{11}{6}$
 $\Rightarrow a - b - c + d = \frac{11}{6}$

Ainsi, on forme le système :

$$\begin{cases} -a - b + c + d = \frac{31}{6} \\ a - b - c + d = \frac{11}{6} \\ 3a + 2b - c = 0 \\ 12a - 4b - c = 0 \end{cases}$$

2-

Retrouvons le code oublié

Résolvons le système précédent.

Il est équivalent à:

$$\begin{cases} -a - b + c + d = \frac{31}{6} \\ -2b + 2d = 7 \\ -b + 2c + 3d = \frac{31}{2} \\ -16b + 11c + 12d = 62 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a - b + c + d = \frac{31}{6} \\ c + d = 6 \\ 11c - 4d = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a - b + c + d = \frac{31}{6} \\ c + d = 6 \\ 15d = 60 \end{cases}$$

Ainsi, on trouve $d = 4$, $c = 2$, $b = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{4}{3}$.Soit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$.Le code oublié est : **cx dy**

$$x = 3a = 3 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$y = 2b = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

Ainsi, le code oublié est : **cx dy = 2141**.

3-

$$g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 4$$

On remarque que $g(x) = -f(x)$. De tout ce qui précède, $f'(x) = x^2 - x - 2, \forall x \in \mathbb{R}$. $f'(-1) = 0$ et $f'(2) = 0$, donc

$$\underline{\underline{f'(x) = (x + 1)(x - 2)}}$$

- $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[, f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty; -1]$ et $[2; +\infty[$.
- $\forall x \in]-1; 2[, f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur l'intervalle $[-1; 2]$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$$

$$f(1) = \frac{31}{6} \text{ et } f(2) = \frac{2}{3}$$

Tableau de variation

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{31}{6}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - 2 + \frac{4}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

On conclut que $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$, et respectivement au voisinage de $-\infty$.

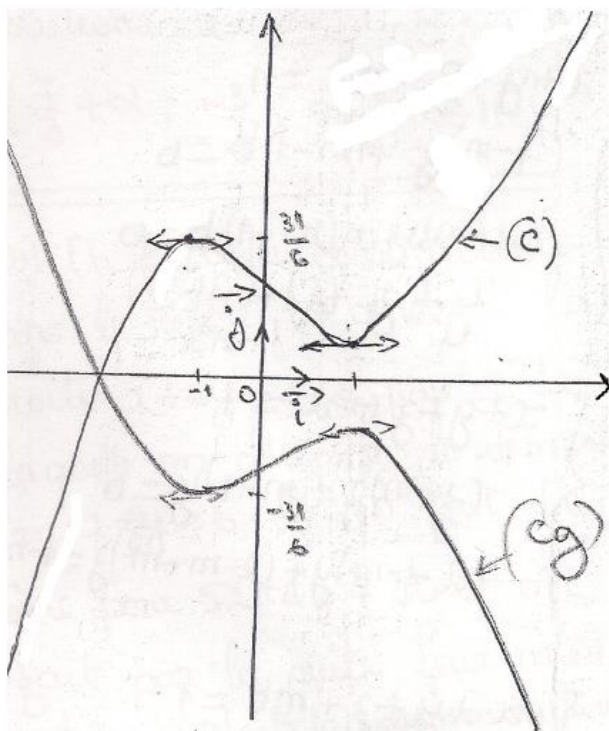
Points remarquables

- $f(0) = 4$, donc $(\mathcal{C}) \cap (oy) = B(0; 4)$.
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$ avec $\alpha \in]-\infty; -1[$.

Nous pouvons encadrer α avec la méthode de dichotomie ou de balayage. Mais, nous tracerons juste la courbe sans localiser avec précision α .

$(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Tracé des courbes



Activité 6

Réolvons le système

Nous avons dit que la résolution du système serait plus facile pour un pivot plus simple. C'est pourquoi nous allons inverser les lignes du système pour obtenir un pivot $p = 1$. Ainsi, on a :

$$\begin{cases} x + y + z + mt = 1 \\ x + y + mz + t = 1 \\ x + my + z + t = 1 \\ xm + y + z + t = 1 \end{cases}$$

Le système équivaut à :

$$\begin{cases} x + y + z + mt = 1 \\ (1 - m)z + (m - 1)t = 0 \\ (1 - m)z + (m - 1)t = 0 \\ y + z + (1 + m)t = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + mt = 1 \\ (1 - m)z + (m - 1)y = 0 \\ (1 - m)y + (2 - m - m^2)z = 1 - m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z + mt = 1 \\ (1 - m)z + (m - 1)y = 0 \\ (m^2 + 2m - 3)z = 1 - m \end{cases}$$

1^{er} cas : $m^2 + 2m - 3 = 0$ et $1 - m \neq 0$

$$m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3 \text{ ou } m = 1.$$

Pour $m = -3$, $1 - m = 4 \neq 0$.

Dans ce cas, sur la dernière ligne du système on a : $0 = 4$ (Absurde). On conclut que pour $m = 3$, l'équation n'admet pas de solutions.

2^e cas : $m^2 + 2m - 3 = 0$ et $1 - m = 0$

Dans ce cas, on a : $m = 1$. Le système revient à : $x + y + z + t = 1$

Posons : $t = \alpha$; $z = \beta$; $y = \delta$, $(\alpha; \beta; \delta) \in \mathbb{R}^3$.

On a : $x = 1 - \alpha - \beta - \delta$.

Ainsi, l'ensemble solution est :

$$\{(1 - \alpha - \beta - \delta; \delta; \beta; \alpha); (\alpha; \beta; \delta) \in \mathbb{R}^3\}$$

3^e cas : $m^2 + 2m - 3 \neq 0$

Dans ce cas, on a :

$$z = \frac{1 - m}{m^2 + 2m - 3} = -\frac{1}{m + 3}$$

$$y = -\frac{1}{m + 3}$$

$$(1 - m)y + (m - 1)t = 0 \Rightarrow$$

$$t = -\frac{1}{m + 3}$$

$$\text{Enfin, } x = \frac{2m + 5}{m + 3}$$

L'ensemble solution donne :

$$\left\{ \frac{2m + 5}{m + 3}; -\frac{1}{m + 3}; -\frac{1}{m + 3}; -\frac{1}{m + 3} \right\}$$

Séquence 2 : Arithmétique**Activité 1****1.a) Démontrons que $(\mathbb{R}; *)$ est un groupe abélien.**

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, a * b = a + b - 1$

Soit k un nombre réel.

On a :

$$\begin{aligned} k * (a * b) &= k + (a * b) - 1 \\ &= k + a + b - 1 - 1 = k + a + b - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (k * a) * b &= (k * a) + b - 1 \\ &= (k + a - 1) + b - 1 = k + a + b - 2 \end{aligned}$$

On a donc $k * (a * b) = (k * a) * b$, pour tous réels a, b et k .

La loi $*$ est donc associative (1)

Supposons e un élément neutre pour la loi $*$.

On a : $a * e = a$

Or $a * e = a + e - 1$,

Donc $a * e = a$ si $e = 1$.

1 est donc un élément neutre pour la loi $*$ (2).

Etant donné que $a * b = a + b - 1$, alors

$$b * a = b + a - 1.$$

Comme $a + b - 1 = b + a - 1$, alors

$$b * a = a * b.$$

On en déduit que la loi $*$ est commutative (3).

De (1), (2) et (3), on conclut que $(\mathbb{R}; *)$ est un groupe abélien.

b) Vérification

On a : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

De plus, $\mathbb{Z} \neq \emptyset$, (car $0 \in \mathbb{Z}$)

Il reste donc à voir que si tout élément de $\mathbb{Z}$ a son symétrique pour cette loi dans $\mathbb{Z}$.

Soit δ le symétrique de a pour la loi $*$.

1 étant l'élément neutre de cette loi, alors δ vérifie : $a * \delta = -a^2$

$$\text{Or } a * b = a + b - 1$$

$$\text{Donc } a * \delta = -a^2 \text{ si } a + \delta = -a^2 - 1$$

$$\Rightarrow \delta = -a^2 - a + 1 \in \mathbb{Z}.$$

Tout élément de $\mathbb{Z}$ admet son symétrique pour cette loi dans $\mathbb{Z}$.

On conclut que $(\mathbb{Z}; *)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}; *)$.

2.a) Preuve

☞ On a :

$$\bullet x \overline{\alpha} (a \overline{\alpha} b) = x(\sqrt{2}(a \overline{\alpha} b) - 6)$$

$$= \sqrt{2}x(ab\sqrt{2} - 6a) - 6x$$

$$\bullet (x \overline{\alpha} a) \alpha b = (x \overline{\alpha} a)(\sqrt{2}b - 6)$$

$$= x(\sqrt{2}a - 6)(\sqrt{2}b - 6)$$

On remarque que $x \overline{\alpha} (a \overline{\alpha} b) \neq (x \overline{\alpha} a) \alpha b$

La loi $\overline{\alpha}$ n'est donc pas associative.

On peut déjà tirer notre conclusion que $(\mathbb{R}; \overline{\alpha})$ ne peut être un groupe.

Mais amusons-nous à voir le comportement de la loi quant à l'existence d'un élément neutre et quant à sa commutativité.

☞ Soit e un élément neutre pour cette loi.

$$\text{On a : } x \overline{\alpha} e = x \text{ et } x \overline{\alpha} e = \sqrt{2}xe - 6x$$

$$\text{Donc } \sqrt{2}xe - 6x = x$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}a - 6 = 1$$

$$\Rightarrow e = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

Cette loi admet donc un élément neutre $e = \frac{6}{\sqrt{2}}$

$$\text{☞ Par ailleurs, } x \overline{\alpha} y = x(\sqrt{2}y - 6)$$

$$\text{et } y \overline{\alpha} x = y(\sqrt{2}x - 6) \neq x \overline{\alpha} y$$

La loi n'est pas commutative. D'où $(\mathbb{R}; \overline{\alpha})$ n'est pas un groupe.

3.a) Preuve

$(\mathbb{R}; +)$ est un groupe abélien. De plus, la loi $+$ dans $\mathbb{R}$ est associative.

Reste à voir si :

$$a * (x + y) = (a * x) + (a * y)$$

$$\text{On a : } a * (x + y) = a + x + y - 1 *$$

$$\text{Et } (a + x) * (a + y) = a + x + a + y - 1$$

$$= 2a + x + y - 1 *$$

On n'a pas l'égalité, donc $(\mathbb{R}; +, *)$ n'est pas un anneau.

b & c) $(\mathbb{R}; +, *)$ n'étant pas un anneau, alors il ne peut être commutatif ni unitaire.

4) Montrons que $\mathbb{Z}$ est archimédien.

Soit x et y deux entiers relatifs tels que $x \neq 0$.

❖ Supposons que $x \geq 1$.

- Si $y \geq 0$, il suffit de prendre $n = y$ pour voir que $nx \geq y$.
- Si $y < 0$, il suffit de prendre $n = 0$ pour trouver que $nx \geq y$.

❖ Supposons que $x \leq -1$

On a : $-x \geq 1$. Donc il existe un entier relatif k tel que $k(-x) \geq y$. Prenons par exemple $n = -k$.

On a : $nx = -kx \geq y$

Donc $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ tel que y ou $x \neq 0$.

Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $nx \geq y$.

Par conséquent, $\mathbb{Z}$ est archimédien.

5.a) Démontrer que $\forall \delta \in \mathbb{R}, \delta \times 0 = 0$.

Soit x un nombre réel.

$(\mathbb{R}, +)$ étant un groupe, tout élément de $\mathbb{R}$ a son symétrique pour la loi $+$. Soit $-x$ le symétrique de x dans $(\mathbb{R}, +)$.

On a : $x - x = 0$

Ainsi, $\delta \times 0 = \delta(x - x) = \delta x - \delta x$

$-\delta x$ est le symétrique de δx dans $(\mathbb{R}, +)$, donc $\delta x - \delta x = 0$.

D'où $\forall \delta \in \mathbb{R}, \delta \times 0 = 0$.

b) Prouvons que pour tout nombre réel δ , on a : $\delta + 0 = \delta$

Posons : $\delta + 0 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

$\delta + 0 = \alpha \Rightarrow \delta - \alpha = 0$.

On en déduit que $-\alpha$ est le symétrique de δ dans $(\mathbb{R}, +)$.

Comme $-\delta$ est le symétrique de δ dans $(\mathbb{R}, +)$, alors on a :

$-\delta = -\alpha \Rightarrow \alpha = \delta$.

Or $\alpha = \delta + 0$, d'où $\forall \delta \in \mathbb{R}, \delta + 0 = \delta$

Prouvons que $\delta \times 1 = \delta$.

Posons : $\delta \times 1 = x, x \in \mathbb{R}$

$\delta \times 1 = x \Rightarrow x \times \delta^{-1} = 1$

On en déduit que δ^{-1} est l'inverse de x .

Or δ^{-1} est l'inverse de δ , donc $x = \delta$.

Comme $x = \delta \times 1$, alors $\delta \times 1 = \delta$.

Activité 2

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul :

$$2) \quad 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soit P_n cette proposition.

♣ Pour $n = 3$, $1+2+3 = 6$ et $\frac{3(3+1)}{2} = 6$

La proposition est donc vraie au rang 3.

♣ Supposons que P_n est vraie et démontrons que P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ donc}$$

$$1+2+3+\dots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1),$$

$$= \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}, \text{ donc } P_{n+1} \text{ est vraie.}$$

En conclusion, P_n est vraie.

$$3) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Soit P_n cette proposition

♣ Pour $n = 1$, $\frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$

Et $1^2 = 1$, donc P_1 est vraie.

♣ Supposons que P_n est vraie et démontrons que P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ donc}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}, \text{ (développer et}$$

$$\text{factoriser) } = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Donc la P_{n+1} est vraie.

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n$ est vraie.

$$3) \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{[(n+1)(n+2)]^2}{4}$$

♣ P_n est vraie au rang $n = 1$.

♣ Supposons que P_n est vraie et démontrons que P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{[(n+1)(n+2)]^2}{4}, \text{ donc :}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{[(n+1)(n+2)]^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= \frac{[(n+2)(n+3)]^2}{4}, \text{ donc } P_{n+1} \text{ est vraie.}$$

En conclusion, P_n est vraie.

$$4) \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Soit P_n cette proposition.

♣ Au premier rang, P_n est vraie.

♣ Admettons que P_n est vraie et démontrons que P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \text{ donc}$$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2) =$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}, \text{ donc } P_{n+1} \text{ est vraie.}$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie.

Remarque :

On peut aussi remarquer que :

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n (k^2 + k) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k$$

Ensuite, on pourra remplacer

$\sum_{k=1}^n k^2$ et $\sum_{k=1}^n k$ par leurs expressions à l'aide des résultats des questions 1 et 2.

$$5) \sum_{k=1}^n k(n-k) = \frac{n(n-1)n(n+1)}{6}$$

Nous allons faire directement cette démonstration.

Soit P_n cette proposition.

$$P_n = 1 \times (n-1) + 2(n-2) + 3(n-3) + \dots +$$

$$(n-1)[n-(n-1)] + n(n-n) = (n+2n+3n$$

$$+ \dots + n \times n) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$

$$= n(1+2+3+\dots+n) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2).$$

On a de ce qui précède :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On en déduit que :

$$P_n = \frac{n^2(n+1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie.

Remarque :

On peut aussi remarquer que :

$$\sum_{k=1}^n k(n-k) = \sum_{k=1}^n (nk - k^2) = n \cdot \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2$$

Ensuite, on pourra remplacer

$\sum_{k=1}^n k^2$ et $\sum_{k=1}^n k$ par leurs expressions à l'aide des résultats des questions 1 et 2.

Activité 3

1) Résolvons dans $\mathbb{N}^2$ le système : $\begin{cases} xy \leq 4x \\ x + y = 8 \end{cases}$

Le système à résoudre est équivalent à :

$$\begin{cases} x(y-4) \leq 0 & (1) \\ x+y=8 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(y-4) \leq 0 & (1) \\ x+y=8 & (2) \end{cases}$$

De (1), on déduit que $x \leq 0$ et $y-4 \geq 0$ ou

$x \geq 0$ et $y-4 \leq 0$.

♣ Soit $x \leq 0$ et $y \geq 4$.

$x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0$, donc $y = 8$.

On retient le couple $(x; y) = (0; 8)$

♣ Soit $x \geq 0$ et $y \leq 4$.

On déduit dans $\mathbb{N}^2$ les couples $(x; y)$:

$(4; 4); (5; 3); (6; 2); (7; 1)$ et $(8; 0)$.

L'ensemble solution S est donc :

$S = \{(0; 8); (4; 4); (5; 3); (6; 2); (7; 1); (8; 0)\}.$

a°) Vérifions que $\delta = \overline{423}^5 - 66$

$$\text{On a : } \begin{cases} \delta = 23k + 1 \\ \delta = 17k + 3 \end{cases} \Rightarrow k = 2.$$

Donc $\delta = 47$.

$$\overline{423}^5 = 4 \times 5^2 + 2 \times 5 + 3 = 113$$

$$113 - 66 = 47, \text{ donc } \delta = \overline{423}^5 - 66.$$

b°) Ecrivons δ en base 9.

$$\begin{array}{r|l} 9 & 47 \\ \hline & 2 \text{ } 5 \end{array} \text{ donc } 47 = \overline{52}^9$$

D'où $\delta = \overline{52}^9$.

c) Démontrons que $a=2958$ et $r=8$

$$\text{On a : } \begin{cases} a = 50q + r \\ a + q + r = 3025 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = a - 50q & (1) \\ r = 3025 - a - q & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \text{ donne : } r = \frac{3025 - 51q}{2}$$

$$\text{Or } 0 \leq r < q$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{3025 - 51q}{2} < q$$

$$\Rightarrow 51q \leq 3025 - 53q$$

$$\text{Donc } q \in \{58; 59\}$$

$$\text{Pour } q = 58, r = 33,5 \notin \mathbb{N}.$$

$$\text{Pour } q = 59, r = 8 \in \mathbb{N}.$$

Nous retenons que $q = 59$ et $r = 8$ et on trouve bien $a = 2958$.

Activité 4**1.a) Représentation des chiffres**

♣ 4 représente le dernier quotient (inférieur à α) des divisions euclidiennes successives de N par α .

♣ 2 représente le reste de la première division euclidienne de N par α .

b) Dédution

De ce qui précède, pour que l'écriture $\overline{432}^\alpha$ ait un sens, il faudrait que les chiffres 4, 3 et 2 soient strictement inférieurs à 4. On en déduit que l'écriture $\overline{432}^4$ n'a mathématiquement pas de sens. En clair, si l'on écrit $\overline{432}^4$, cela signifie que 4 est le dernier quotient non divisible par 4 des divisions de N par 4 ; ce qui est absurde car 4 divise 4.

c) Déterminons l'écriture décimale de N dans la base α

$$\text{Pour } \alpha > 4, N = 4a^2 + 3a + 2$$

Ecrivons $\overline{432}^5$ dans la base 8 et 25 sans le ramener dans le système décimal.

$$\begin{aligned} \bullet \overline{432}^5 &= 4 \times 5^2 + 3 \times 5 + 2 \\ &= 100 + 15 + 2 = (100 - 36) + 51 + 2 \\ &= 64 + (51 - 3) + 3 + 2 = 64 + 48 + 5 \end{aligned}$$

$$= 1 \times 8^2 + 6 \times 8 + 5$$

$$\text{D'où } \overline{432}^5 = \overline{165}^8$$

$$\overline{432}^5 = 4 \times 25 + 17$$

$$\text{D'où } \overline{432}^5 = \overline{4\rho}^{25} \text{ avec } \rho = 17.$$

d) Déterminons le montant.

N prend sa valeur minimale si α est le plus petit possible.

La plus petite valeur de α est 5, d'où le plus petit N est $\xi = \overline{432}^5 = 117$.

On déduit que le petit déjeuner de Bello est 1170F.

2) a) Les racines de f .

$$\xi = \overline{432}^5 = 117$$

$$\overline{531}^6 = 5 \times 6^2 + 2 \times 6 + 1 = 193$$

$$\overline{\text{FOA8}}^{16} = 15 \times 16^3 + 10 \times 16 + 8 = 61608$$

$$\text{Donc } f(x) = 117x^2 + 2x - 61415$$

L'équation $f(x) = 0$ a pour discriminant :

$$\Delta = 28742224$$

On déduit que

$$x \approx -22.92 \text{ ou } x \approx 22.90.$$

b) Coefficient β

On a :

$$\frac{\varphi - 2\psi}{\overline{567}^8} = \frac{-22.98 - 2(22.90)}{5 \times 8^2 + 8 \times 6 + 7} \approx -0.1834$$

En résolvant le système donné par la méthode du pivot de Gauss, on obtient :

$$t = 2, y = -3, z = 2.$$

$$\min(t; -y; z) = 2 \text{ et } \max(|y|; |z|) = 3.$$

$$\text{Donc } \beta \approx -0.1834 + 4 + \sqrt{3}.$$

$$\text{Soit } \beta \approx 5,55.$$

c) Résolution du système.

On a :

$$\begin{cases} 2k \geq 5,55m \\ k + 5m = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq 2,775m \\ k + 5m = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k \geq 3m \\ k + 5m = 2 \end{cases} \text{ (car } k \in \mathbb{Z})$$

On déduit que $2 - 5m \geq 3m$

$$\Rightarrow m \leq \frac{1}{4} \Rightarrow m \leq 0 \text{ (car } m \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Posons : } m = t, t \in \mathbb{Z} - \{\mathbb{N}^*\}$$

On a donc : $k = 2 - 5t$

L'ensemble solution est donc :

$$(k; m) = (2 - 5t; t), t \in \mathbb{Z} - \{\mathbb{N}^*\}.$$

3) Déterminons la base

Soit a cette base.

$$\text{On a : } \overline{620}^a - \overline{231}^a = \overline{356}^a$$

$$\Rightarrow 6a^2 + 2a - 2a^2 - 3a - 1 = 3a^2 + 5a + 6$$

$$\Rightarrow a^2 - 6a - 7 = 0$$

$$\Delta = 64.$$

$$\Rightarrow a = -1 \text{ ou } a = 7.$$

Comme $a \in \mathbb{N}$, alors on retient $a = 7$.

$$\text{Ainsi, on a : } \overline{620}^7 - \overline{231}^7 = \overline{356}^7$$

4) Déterminons le reste r.

$$\overline{BAC}^{16} = 16^2 \times 11 + 10 \times 16 + 12 = 2988$$

$$2988 = 597 \times 5 + 3.$$

Le reste de la division euclidienne de $\overline{BAC}^{16}$ par 5 est donc 3.

5.a) Preuve

$$\overline{BACC}^{2017} = B \times 2017^3 + A \times 2017^2 + C \times 2017 + C$$

$$\overline{BACD}^{2017} = B \times 2017^3 + A \times 2017^2 + C \times 2017 + D$$

$$\Rightarrow \overline{BACD}^{2017} - \overline{BACC}^{2017} = D - C = 13 - 12 = 1$$

$$\text{D'où } \overline{BACD}^{2017} = 1 + \overline{BACC}^{2017}$$

b) Preuve

$(\xi + \varphi - 2\psi)^2$ étant une constante alors

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n + (\xi + \varphi - 2\psi)^2}{\overline{BACD}^n + \overline{BACC}^n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{\overline{BACD}^n + \overline{BACC}^n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{22n^3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{22n^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Activité 5

1. Preuve

$$\rightarrow 108625 = 9875 \times 11,$$

D'où 11 divise 108625

$\rightarrow$ On a : $5 - 2 + 6 - 8 + 0 - 1 = 0$, 0 est multiple de 11, d'où 11 divise 108625.

2) Déterminons le nombre de multiples de 9 compris entre -700 et 700.

Les multiples de 9 sont sous la forme $9k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$-700 \leq 9k \leq 700 \Rightarrow -77,77 \leq k \leq 77,77$$

$$\Rightarrow -77 \leq k \leq 77 \text{ (car } k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow k = 2 \times 77 + 1 = 155$$

Soit au total 155 multiples de 9 compris entre 700 et -700.

3) Déterminons l'ensemble des diviseurs de 80.

$$80 = 10 \times 8$$

♠ Les diviseurs positifs de 10 sont : 1, 2, 5 et 10.

♠ Les diviseurs positifs de 8 sont : 1, 2, 4 et 8.

Les diviseurs positifs de 80 sont donc :

$$(1 + 2 + 5 + 10)(1 + 2 + 4 + 8) = 1; 2; 4; 8; 2; 4; 8; 16; 5; 10; 20; 40; 10; 20; 40; 80.$$

On conclut que :

$$\mathcal{D}(80) = \{-1; -2; -4; -5; -8; -10; -16; -20; -40; -80; 1; 2; 4; 5; 8; 10; 16; 20; 40; 80\}.$$

4) Déterminons x et y

$$\text{On a : } 12 = 1 \times 12 = 4 \times 3 = 2 \times 6$$

$$\text{Ainsi, } x^2 - y^2 = 12 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 12$$

$$(x; y) \in \mathbb{N}^2 \Rightarrow x - y < x + y$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 6 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Des trois systèmes, seul le système $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$

admet dans $\mathbb{N}^2$ le couple $(4; 2)$.

Nous pouvons retenir que $x^2 - y^2 = 12 \Leftrightarrow$

$$(x; y) = (4; 2).$$

5.) La somme $6+0+3+7+2 = 18$ est multiple de 9, d'où 60372 est divisible par 9.

6.a) Donnons suivant les valeurs de n le reste de la division euclidienne de $n+2$ par 2.

• Si n est paire, on a : $n = 2k, k \in \mathbb{Z}$, donc $n + 2 = 2(k + 1) = 2q$ avec $q = k + 1 \in \mathbb{Z}$.
Donc le reste de la division euclidienne de $n+2$ par 2 dans ce cas est 0.

• Si n est impair, on a : $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$, donc $n + 2 = 2k + 3 = 2(k+1) + 1 = 2q + 1$ avec $q = k + 1 \in \mathbb{Z}$.

On déduit que le reste de la division euclidienne de $n + 2$ par 2 dans ce cas est 1.

b) Prouvons que $n^2 - 2n + 1$ est divisible par $n - 1$.

$$n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2 \\ \Rightarrow \frac{n^2 - 2n + 1}{n - 1} = n - 1 \in \mathbb{Z}.$$

D'où $n^2 - 2n + 1$ est divisible par $n - 1$.

c) Démontrons que $n^3 - 4n^2 + n + 6$ est divisible par $n - 2$, par $n - 3$ et par $n + 1$.

La division euclidienne de $n^3 - 4n^2 + n + 6$ par $n - 2$, par $n - 3$ et par $n + 1$ permet d'établir que : $n^3 - 4n^2 + n + 6 = (n - 2)(n - 3)(n + 1)$

On en déduit que $n^3 - 4n^2 + n + 6$ est divisible par $n - 2$, par $n - 3$ et par $n + 1$.

7.a) Démonstration

Un entier naturel n est soit pair ou impair.

♣ Si n est pair, $n = 2k, k \in \mathbb{IN}$

Dans ce cas, $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k + 1)$

On a $k(2k + 1) \in \mathbb{IN}$, donc pour tout entier naturel n pair, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.

♣ Si n est impair, on a : $n = 2k + 1, k \in \mathbb{IN}$.

Dans ce cas, $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2}$

$\frac{n(n+1)}{2} = (k + 1)(2k + 1) \in \mathbb{IN}$.

Là encore $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.

En définitive, pour tout entier naturel n , $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.

b) Preuve

$$n^2 + 3n + 2 = (n + 1)(n + 2)$$

♠ Il est clair que si n est pair, $n+2$ est pair et donc est divisible par 2. Par suite, $(n+1)(n+2)$ ie $n^2 + 3n + 2$ est divisible par 2.

♠ De même, si n est impair, $n+1$ est pair et donc est divisible par 2 ; donc $(n+1)(n+2)$ ie $n^2 + 3n + 2$ est divisible par 2.

En conclusion, pour tout entier naturel n , $n^2 + 3n + 2$ est divisible par 2.

Activité 6

1.) Démontrons que la relation est une relation équivalente.

$$\clubsuit x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - x = 0 \times n$$

Donc $x \equiv x[n]$

La relation est donc réflexive (1).

♣ Soit x et y des entiers relatifs tels que

$$x \equiv y[n].$$

$$x \equiv y[n] \Leftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow y - x \in n\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow y \equiv x[n],$$

donc la relation est symétrique (2).

♣ Soit x, y et z des entiers relatifs tels que :

$$x \equiv y[n] \text{ et } y \equiv z[n].$$

A-t-on $x \equiv z[n]$?

$$x \equiv y[n] \Leftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}$$

$$y \equiv z[n] \Leftrightarrow y - z \in n\mathbb{Z}$$

Or $x - z = (x - y) + (y - z)$ et $x - y$ puis $y - z$ appartiennent à $n\mathbb{Z}$.

Donc $x - z \in n\mathbb{Z}$ et par conséquent, $x \equiv z[n]$

La relation est alors transitive (3).

De (1), (2) et (3), on déduit que la relation est équivalente.

2.) Démonstration

y divise x , donc $x = ky, k \in \mathbb{Z}$.

On a : $a \equiv b[x]$, donc $a - b = k'x, k' \in \mathbb{Z}$.

Or $x = ky$, donc $a - b = kk'y$

$$\Rightarrow a \equiv b[y] \text{ car } kk' \in \mathbb{Z}.$$

3.a) Démontrons que $2^{64k} \equiv 1[5]$

$$2 \equiv 2[5] ; 2^2 \equiv 4[5] ; 2^3 \equiv 3[5] ; 2^4 \equiv 1[5]$$

$$\text{Donc } 2^{4 \times 16} \equiv 1^{16}[5], \Rightarrow 2^{64k} \equiv 1^k[5],$$

$\forall k \in \mathbb{IN}$.

Soit $2^{64k} \equiv 1[5], \forall k \in \mathbb{IN}$.

b) Dédudisons les entiers n

$$2^{n+1} - 1 \equiv 0[5] \Rightarrow 2^{n+1} \equiv 1[5]$$

$$\text{Or } 2^4 \equiv 1[5] \text{ et } 2^{4k} \equiv 1[5]$$

$$\text{Donc } n + 1 = 4k$$

$$\text{Soit } \underline{n = 4k - 1, k \in \mathbb{N}}.$$

4. Déterminons α

$$C_\alpha^2 = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}$$

$$C_\alpha^2 \equiv 0[10] \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha = 20k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow k = \frac{\alpha^2 - \alpha}{20}$$

$$\text{On a : } 0 < \alpha \leq 9 \text{ et seul pour } \alpha = 5, k = 1 \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{D'où } C_\alpha^2 \equiv 0[10] \Leftrightarrow \underline{\alpha = 5}.$$

Activité 7**1. Résolvons les équations.**

$$\text{a) } 15 \times 3^n \equiv 3[7]$$

$$\text{On a } 15 \equiv 1[7], \text{ donc } 15 \times 3^n \equiv 3[7] \Leftrightarrow$$

$$3^n \equiv 3[7] \Leftrightarrow 3^{n-1} \equiv 1[7]$$

$$\text{On a : } 3 \equiv 3[7] ; 3^2 \equiv 2[7] ; 3^3 \equiv 6[7] ;$$

$$3^4 \equiv 4[7] ; 3^5 \equiv 5[7] ; 3^6 \equiv 1[7]$$

$$\text{Donc } 3^{6k} \equiv 1[7], \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Nous pouvons déduire que } 3^{n-1} \equiv 1[7] \Leftrightarrow$$

$$n = 6k + 1, k \in \mathbb{N}.$$

$$\text{En conclusion, } 15 \times 3^n \equiv 3[7] \Leftrightarrow$$

$$\underline{n = 6k + 1, k \in \mathbb{N}}.$$

$$\text{b) } n \times 7^{2n} + 4n - 1 \equiv 0[8]$$

$$n \times 7^{2n} + 4n - 1 \equiv 0[8] \Leftrightarrow n(7^{2n} + 4) \equiv 1[8]$$

$$\text{On a } 7 \equiv 7[8] \text{ et } 7^2 \equiv 1[8], \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N},$$

$$7^{2n} \equiv 1[8], \text{ alors } 7^{2n} + 4 \equiv 5[8]$$

$$\text{Ainsi, } n(7^{2n} + 4) \equiv 1[8] \Leftrightarrow n \equiv 5[8].$$

$$\text{D'où les entiers naturels } n \text{ cherchés sont } \underline{8k+5, k \in \mathbb{N}}.$$

2.a) Déterminons le reste de la division euclidienne de 7^{2014} par 9.

$$7 \equiv 7[9] ; 7^2 \equiv 4[9] ; 7^3 \equiv 1[9]$$

$$2014 = 671 \times 3 + 1, \text{ donc } 7^{3 \times 671} \equiv 1[9]$$

$$\Rightarrow 7^{2013+1} \equiv 7[9]$$

$$\text{Soit } 7^{2014} \equiv 7[9] ; \text{ d'où } 7 \text{ est le reste de la division euclidienne de } 7^{2014} \text{ par } 9.$$

b) Déterminons suivant les valeurs de n le reste de la division euclidienne de 7^n par 10.

$$\text{On remarque que } 7^4 \equiv 1[10], \text{ donc } \forall k \in \mathbb{N}, 7^{4k} \equiv 1[10],$$

$$\text{On déduit que } 7^{4k+1} \equiv 7[10], 7^{4k+2} \equiv 9[10], 7^{4k+3} \equiv 3[10].$$

$$\text{On a : } \forall n \in \mathbb{N}, n \text{ est soit égal à } 4k \text{ ou } 4k+1 \text{ ou } 4k+2 \text{ ou } 4k+3 \text{ avec } k \in \mathbb{N}.$$

$$\text{On retient que les restes de la division euclidienne de } 7^n \text{ par } 10 \text{ pour } n = 4k+1 \text{ ou } n = 4k+2 \text{ ou } n = 4k+3 \text{ ou } n = 4k \text{ sont respectivement : } 7 ; 9 ; 3 \text{ et } 1.$$

c) Déterminons dans le système décimal, suivant les valeurs de n le chiffre des unités de $N = \sum_{k=0}^n 7^k$

Le chiffre des unités de N est le reste de la division euclidienne de N par 10.

(par exemple, le chiffre des unités de 21 et 15 sont 1 et 5. Au fait, $21 = 10 \times 2 + 1$ et $15 = 1 \times 10 + 5$)

Les chiffres des unités de N sont donc les réels tels que : $N \equiv \alpha[10]$.

$$\text{On a : } N = \frac{7^{n+1} - 1}{6}$$

$$\bullet \text{ Si } n = 4k - 1, N \equiv 0[10]$$

$$\bullet \text{ Si } n = 4k, N \equiv 1[10]$$

$$\bullet \text{ Si } n = 4k + 1, N \equiv 8[10]$$

$$\bullet \text{ Si } n = 4k + 2, N \equiv 7[10]$$

En conclusion, si n prend respectivement les valeurs $4k - 1, 4k, 4k + 1$ et $4k + 2$, les chiffres des unités de N sont 0, 1, 8 et 7.

3.a) Reste de la division euclidienne

$$\text{On a : } 5^0 \equiv 1[3] ; 5^1 \equiv 2[3] ; 5^2 \equiv 1[3]$$

$$\clubsuit \text{ Si } n = 2k, (k \in \mathbb{N}), \text{ on a : } 5^{2k} \equiv 1[3]$$

$$\text{Donc } \underline{5^n \equiv 1[3]}.$$

$$\clubsuit \text{ Si } n = 4k + 1, (k \in \mathbb{N}), \text{ on a :}$$

$$5^{2k} \times 5 \equiv 1 \times 5[3]$$

$$\text{Soit } \underline{5^n \equiv 2[3]}.$$

b) Dédudisons-en les entiers naturels n pour lesquels $5^{n-17} - 1$ est divisible par 3.

On a : $5^{n-17} - 1 \equiv 0[3]$

$\Rightarrow 5^{n-17} \equiv 1[3]$

Or $5^{2k} \equiv 1[3]$

Donc **$n = 2k + 17, k \in \mathbb{N}$** .

4) Résolvons dans $\mathbb{N}$ l'équation $\overline{724ab} \equiv 0[9]$

$\overline{724ab} \equiv 0[9] \Leftrightarrow \overline{724ab} = 9k, k \in \mathbb{N}$.

$\overline{724ab} = 7 + 2 + 4 + a + b = 9 + 4 + a + b$

Ainsi, $\overline{724ab} = 9k \Leftrightarrow 9 + 4 + a + b = 9k$

$\Leftrightarrow a + b + 4 = 9(k - 1)$

$\Leftrightarrow a + b + 4 \equiv 0[9]$

Ainsi, résoudre, $\overline{724ab} \equiv 0[9]$ revient à résoudre l'équation $a + b + 4 \equiv 0[9]$.

Il est clair que a et b sont des entiers décimaux.

Donc, $0 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b \leq 9$.

☞ Si $a = 0, b = 5$

☞ Si $a = 1, b = 4$

☞ Si $a = 2, b = 3$

☞ Si $a = 3, b = 2$

☞ Si $a = 4, b = 1$

☞ Si $a = 5, b = 0$

☞ Si $a = 6, b = 8$

☞ Si $a = 7, b = 7$

☞ Si $a = 8, b = 6$

☞ Si $a = 9, b = 5$

L'ensemble solution est l'ensemble des couples $(a; b) = \{(0; 5), (2; 3), (3; 2), (4; 1), (5; 0), (6; 8), (7; 7), (8; 6), (9; 5)\}$

5.) Déterminons a et b

♣ $\overline{28a75b}$ est divisible par 3 si la somme $2+8+a+7+5+b$ est multiple de 3 ie si $a + b + 22 \equiv 0[3]$.

♣ $\overline{28a75b}$ est divisible par 11 si $b - 5 + 7 - a + 8 - 2$ multiple de 11 ie si $-a + b + 8 \equiv 0[11]$.

Ainsi, $\overline{28a75b}$ est divisible par 3 et par 11 si et seulement si : $\begin{cases} a + b + 22 \equiv 0[3] \\ -a + b + 8 \equiv 0[11] \end{cases}$

Il est clair que a et b sont des nombres décimaux.

➔ Soit $a + b + 22 \equiv 0[3]$

• $a = 0 \Rightarrow b = 2$ ou 5 ou 8 .

• $a = 1 \Rightarrow b = 1$ ou 4 ou 7 .

• $a = 2 \Rightarrow b = 0$ ou 3 ou 6 ou 9 .

• $a = 3 \Rightarrow b = 2$ ou 5 ou 8 .

• $a = 4 \Rightarrow b = 1$ ou 4 ou 7 .

• $a = 5 \Rightarrow b = 0$ ou 3 ou 6 ou 9 .

• $a = 6 \Rightarrow b = 2$ ou 5 ou 8 .

• $a = 7 \Rightarrow b = 1$ ou 4 ou 7 .

• $a = 8 \Rightarrow b = 0$ ou 3 ou 6 ou 9 .

• $a = 9 \Rightarrow b = 2$ ou 5 ou 8 .

➔ De façon analogue, on résout l'équation $-a + b + 8 \equiv 0[11]$.

Par la suite, on fait l'intersection des couples $(a; b)$ solutions, trouvés ; ce qui permet de trouver l'ensemble solution :

$\{(1; 4), (3; 5), (4; 7), (8; 0)\}$.

6.) Déterminons $(x; y)$

$\overline{xyxxxxy}^3$ a de sens si :

$\begin{cases} 0 \leq x < 3 \\ 0 \leq y < 3 \end{cases}; (x; y) \in \mathbb{N}^2$.

De plus, on a : $1 \leq x \leq y$, donc $\begin{cases} x \in \{1; 2\} \\ y \in \{1; 2\} \end{cases}$

On déduit les **couples**

$(x; y) = \{(1; 1); (1; 2), (2; 2)\}$.

Activité 8

1) Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 \equiv -2[6]$

On a : $-2 \equiv 4[6]$, donc $x^2 \equiv -2[6] \Leftrightarrow$

$x^2 \equiv 4[6] \Leftrightarrow x^2 \equiv 2^2[6] \Leftrightarrow x \equiv 2[6]$

Donc $x = 6k + 2, k \in \mathbb{Z}$.

NB : on peut également faire le tableau qui indique le reste des divisions euclidiennes de x^2 par 6 pour dégager x .

2) Résolvons dans $\mathbb{Z}$: $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$

$x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7] \Leftrightarrow x^2 - 3x \equiv -4[7]$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x \equiv 3[7]$ (car $-4 \equiv 3[7]$)

$\Leftrightarrow x(x - 3) \equiv 3[7]$

$\Leftrightarrow x(x - 3) \equiv 10[7]$

$\Leftrightarrow x(x - 3) \equiv 5(5 - 3)[7]$

$\Leftrightarrow x \equiv 5[7]$

Soit $x = 7k + 5, k \in \mathbb{Z}$.

Autre méthode

Nous avons 7 cas :

Le tableau ci-contre indique le reste de la division euclidienne de $x^2 - 3x + 4$ par 7.

x	0	1	2	3	4	5	6
r	4	2	2	4	1	0	1

On en déduit que les solutions de l'équation sont les entiers x de la forme :

$$x = 7k + 5, k \in \mathbb{Z}.$$

4) Etablissons les tableaux

$$\clubsuit x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \{\dot{0}; \dot{1}; \dot{2}; \dot{3};\}$$

+	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{3}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$

$\times$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$

On a :

$$\clubsuit x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \{\dot{0}; \dot{1}; \dot{2}; \dot{3}; \dot{4}\}$$

On établit de façon analogue les deux tableaux.

4.) Réolvons :

a) $5x + \dot{3} = \dot{7}$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$$\text{On a : } 7 \equiv 1[3] ; 5 \equiv 2[3] \text{ et } 3 \equiv 0[3]$$

$$\text{Donc } 5x + \dot{3} = \dot{7} \Leftrightarrow \dot{2}x + \dot{0} = \dot{1}$$

$$\Leftrightarrow \dot{2}x = \dot{1}$$

$$\Leftrightarrow x = \dot{2}$$

L'ensemble solution est $\{\dot{2}\}$.

b) $x^2 + x + \dot{6} = \dot{0}$ dans $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})$.

$$x^2 + x + \dot{6} = \dot{0} \Leftrightarrow x^2 + x = -\dot{6}$$

Or $-6 \equiv 7[13]$, donc cette équation équivaut à : $x^2 + x = \dot{7}$.

$$\Leftrightarrow x(x + 1) = \dot{7}, (\text{ car } \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \text{ est un corps})$$

$$\text{On a : } \dot{7} = \dot{1} \times \dot{7} = \dot{4} \times \dot{5} = \dot{3} \times \dot{11} = \dot{8} \times \dot{9}$$

Comme x et $x + 1$ sont consécutifs, alors

$$x(x + 1) = \dot{7} \Leftrightarrow x = \dot{4} \text{ et } x + 1 = \dot{5} \text{ ou}$$

$$x = \dot{8} \text{ et } x + 1 = \dot{9}$$

L'ensemble solution est donc : $\{\dot{4}; \dot{8}\}$.

NB : Pour trouver la décomposition de $\dot{7}$ comme nous l'avons fait dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, il suffit d'ajouter chaque fois 13 à 7 et d'envisager les chiffres dont le produit dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ peut donner cette somme. Ces chiffres représentent les classes dont le produit donne $\dot{7}$.

Autre méthode

On peut également faire un tableau. Mais pour des ensembles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, où n est élevé, cette méthode montrerait ses limites.

Posons : $\rho = x^2 + x + \dot{6}$

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{7}$	$\dot{8}$	$\dot{9}$	$\dot{10}$	$\dot{11}$	$\dot{12}$
ρ	$\dot{6}$	$\dot{8}$	$\dot{12}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{10}$	$\dot{9}$	$\dot{10}$	$\dot{0}$	$\dot{5}$	$\dot{12}$	$\dot{8}$	$\dot{6}$

On déduit également que l'ensemble solution est $\{\dot{4}; \dot{8}\}$.

c) $3x^2 + \dot{6}x + \dot{5} = \dot{0}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$$3x^2 + \dot{6}x + \dot{5} = \dot{0} \Leftrightarrow \dot{2}x^2 + \dot{4}x + \dot{1} = \dot{0}$$

$$\Leftrightarrow \dot{2}x^2 + \dot{4}x + \dot{1} = \dot{0}$$

$$\Leftrightarrow \dot{2}x^2 + \dot{4}x = -\dot{1}$$

$$\Leftrightarrow \dot{2}x^2 + \dot{4}x = \dot{6}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \dot{2}x = \dot{3}$$

$$\Leftrightarrow x(x + 2) = \dot{3} \text{ (car } \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \text{ est un corps)}$$

On a : $\dot{3} = \dot{1} \times \dot{3} = \dot{5} \times \dot{2} = \dot{8} \times \dot{3} = \dot{6} \times \dot{4}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

$$\text{On déduit que } x(x + 2) = \dot{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dot{1} \\ x + 2 = \dot{3} \end{cases} \text{ ou}$$

$$\begin{cases} x = \dot{4} \\ x + 2 = \dot{6} \end{cases}$$

L'ensemble solution est donc $\{\dot{4}; \dot{1}\}$.

5) Résolvons le système :

$$\begin{cases} \dot{2}x - \dot{4}y = \dot{2} \\ x + \dot{5}y = \dot{2} \end{cases} \text{ dans } (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2.$$

Nous allons raisonner par combinaison linéaire, mais comme $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ contient des diviseurs de 0, il est plus prudent de ne raisonner que par implications, quitte à effectuer les vérifications ensuite.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ x + 5y = 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ 2x + 4y = 4 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 4 \\ 4x = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -2y = 4 \\ 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y = 4 \\ 4x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \in \{1; 4\} \\ x \in \{0; 3\} \end{cases}$$

D'où quatre « candidats » : $(0; 1)$; $(0; 4)$; $(3; 1)$; $(3; 4)$.

Substitutions les valeurs « possibles » à x et y dans les égalités $2x - 4y = 2$ et $x + 5y = 2$.

→ $(0; 1)$: $2 \times 0 - 4 \times 1 = 2$, mais $0 + 5 \times 1 \neq 2$, donc $(0; 1)$ n'est pas solution

→ $(0; 4)$: $2 \times 0 - 4 \times 4 = 2$ et $0 + 5 \times 4 = 2$ donc $(0; 4)$ est solution.

On vérifiera de même que $(3; 1)$ est solution et que $(3; 4)$ ne l'est pas.

D'où $S = \{(0; 4); (3; 1)\}$.

Activité 9

1.a) Déterminons suivant les valeurs de x le reste de la division euclidienne de $x^2 - x + 1$ par 7

Le tableau ci-contre nous donne les restes r de la division suivant les valeurs de x :

x	0	1	2	3	4	5	6
r	1	2	3	0	6	0	3

Déduction

On a : $x^2 - x \equiv 0[7] \Rightarrow x^2 - x + 1 \equiv 1[7]$

On déduit du tableau que

$x = 7k$ ou $x = 7k + 1$.

b) Reste de la division

Posons : $987 = x$

On a : $x \equiv 0[7] \Rightarrow x^2 \equiv 0[7]$, donc

$x^2 - x \equiv 0[7] \Rightarrow x^2 - x + 1 \equiv 1[7]$,

D'où le reste est 1.

NB : on peut également remarquer directement que $987 = 7k$ (avec $k = 141$), pour déduire de la question a) que le reste est 1.

2.) Démonstration

On a : $3^2 \equiv 2[7]$

$\Rightarrow 3^{2x} \equiv 2^x[7]$

$\Rightarrow 3^{2x+1} \equiv 3 \times 2^x[7]$ (1)

Par ailleurs, $2 \equiv 2[7]$, donc on a :

$2^{x+2} \equiv 2^{x+2}[7]$ c'est-à-dire

$2^{x+2} \equiv 4 \times 2^x[7]$ (2)

(1) + (2) donne :

$3^{2x+1} + 2^{x+2} \equiv (3 \times 2^x + 4 \times 2^x)[7]$

Soit $3^{2x+1} + 2^{x+2} \equiv 7 \times 2^x[7]$

Ainsi, démontrer que $3^{2x+1} + 2^{x+2} \equiv 0[7]$

revient à démontrer que $7 \times 2^x \equiv 0[7]$, pour tout entier naturel x .

Il est clair que pour tout entier naturel x , 2^x est un entier naturel. Comme la division euclidienne de 7×2^x par 7 a pour reste 0 et pour quotient 2^x , alors on déduit que 7×2^x est divisible par 7 dans $\mathbb{N}$, (puisque 2^x est de plus un entier naturel).

Il en résulte que $7 \times 2^x \equiv 0[7]$; par suite, $3^{2x+1} + 2^{x+2} \equiv 0[7]$ pour tout entier naturel x . D'où le résultat.

3.) Démonstration

Nous pouvons opérer un raisonnement par récurrence. Mais nous remarquons que :

$5^0 \equiv 1[11]$; $5^1 \equiv 5[11]$; $5^2 \equiv 3[11]$

$\Rightarrow 5^{2m} \equiv 3^m[11]$;

D'où $5^{2m} - 3^m \equiv 0[11]$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

4.a) Démontrons que $x^5 - x$ est divisible par 5 $\forall x \in \mathbb{N}$.

Il faut faire le tableau qui indique le reste r de la division euclidienne de $x^5 - x$ par 5. Dans chaque cas, on trouvera $r = 0$ et on conclut que $x^5 - x$ est divisible par 5 $\forall x \in \mathbb{N}$.

b) Dédisons –en tous les entiers naturels n pour lesquels $(x^5 - x)^{\frac{n^2+3n+2}{2}} - n^3 + 3$ soit divisible par 5, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

On a $n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$.

$(n+1)$ et $(n+2)$ sont deux entiers naturels consécutifs. Par conséquent, $(n+1)(n+2)$ ie $n^2 + 3n + 2$ est divisible par 2.

Alors $\frac{n^2 + 3n + 2}{2}$ est un entier naturel.

Puisque $x^5 - x$ est divisible par 5 et comme $\frac{n^2 + 3n + 2}{2}$ est un entier naturel $\forall n \in \mathbb{N}$, alors

$(x^5 - x) \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$ est divisible par 5.

En conséquence, $(x^5 - x) \frac{n^2 + 3n + 2}{2} - n^3 + 3$ est divisible par 5 si et seulement si $-n^3 + 3$ est divisible par 5, ie $-n^3 + 3 \equiv 0[5]$

$$\Leftrightarrow n^3 \equiv 3[5]$$

$$\Leftrightarrow n^3 \equiv 8[5] \text{ (car } 3 \equiv 8[5])$$

$$\Leftrightarrow n^3 \equiv 2^3[5]$$

$$\Leftrightarrow n \equiv 2[5]$$

D'où les entiers naturels cherchés sont de la forme $n = 5k + 2, k \in \mathbb{N}$.

Activité 10

1.) Déterminons x pour que $N \equiv 0[6]$

On a : $N = \overline{25x3}^{13}$

$$N = (2 \times 13^3) + (15 \times 13^2) + (13x) + (3 \times 1)$$

N est divisible par 6 si et seulement si $N \equiv 0[6]$.

Cherchons les restes de 13, 13^2 , 13^3 dans la division par 6.

$$13 \equiv 1[6] ; 13^2 \equiv 1[6] ; 13^3 \equiv 1[6]$$

(en fait, $\forall k \in \mathbb{N}, 13^k \equiv 1[6]$)

$$\text{Donc } N \equiv (2 \times 1) + (5 \times 1) + (x \times 1) + (3 \times 1)[6]$$

$$N \equiv (4 + x)[6]$$

D'où 6 divise N si $x \in \{2; 8\}$ car $x \in \{0, 1, 2, \dots, 12\}$

Les x sont donc $x \in \{2; 8\}$.

NB : on peut donner l'écriture simplifiée de N pour déterminer x .

$$\text{On a : } N = 13x + 5242$$

$$N \equiv 0[6] \Leftrightarrow 13x + 5242 \equiv 0[6]$$

$$\Leftrightarrow x \equiv 2[6] \Leftrightarrow x = 6k + 2$$

Comme $x \in \{0, 1, 2, \dots, 12\}$, alors $x \in \{2; 8\}$.

2) Déterminons x pour que $N \equiv 0[4]$

$13 \equiv 1[4]$ et donc $13^k \equiv 1[4], \forall k \in \mathbb{N}$, d'où 4 divise N si $x \in \{2, 6, 10\}$.

NB : on peut également faire un tableau.

3.) Déterminons x pour que $N \equiv 0[24]$

On serait tenté de dire que N sera divisible par 24 si, et seulement si, il est divisible par 4 et divisible par 6, seulement ceci est faux. (12 est divisible par 4 et par 6 mais pas par 24 !) car 6 et 4 ne sont pas premiers entre eux.

Ce qui est vrai, c'est que si N est divisible par 24, alors il est divisible par 4 et par 6 puisque 4 et 6 sont des diviseurs de 24.

Ainsi, 24 divise N si $N \equiv 0[6]$ et $N \equiv 0[4]$

$$\Leftrightarrow x \in \{2; 8\} \cap \{2; 6; 10\}$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Vérifions si $N = \overline{2523}^{13}$ est divisible par 24.

$$\overline{2523}^{13} = (2 \times 13^3) + (5 \times 13^2) + (2 \times 13 + 3 \times 1)$$

Comme $13 \equiv 13[24] ; 13^2 \equiv 169[24] \equiv 1[24] ; 13^3 \equiv 13[24]$, alors :

$$N \equiv (2 \times 13) + (5 \times 1) + (2 \times 13) + (3 \times 1)[24] \\ \equiv 60[24] \equiv 12[24]$$

Donc N n'est pas divisible par 24.

En conséquence, il n'existe pas de x pour que N soit divisible par 24.

Activité 13

1.a) Démonstration

On a : $564 = 271 \times 2 + 22$, donc $\text{pgcd}(564 ; 271) = \text{pgcd}(271 ; 22)$

Or $271 = 22 \times 12 + 7$, donc $\text{pgcd}(271 ; 22) = \text{pgcd}(22 ; 7)$

Comme de plus $22 = 7 \times 3 + 1$, alors

$$\text{pgcd}(22 ; 7) = \text{pgcd}(7 ; 1) = 1.$$

En conclusion, les nombres 564 et 271 sont premiers entre eux car $\text{pgcd}(564 ; 271) = 1$.

b) Déduisons a et b

Utilisons les divisions euclidiennes précédentes, de la dernière à la première.

On a :

$$\begin{aligned}
 1 &= 22 \times 7 \times (-3) \\
 &= 22 + (271 - 22 \times 12) \times (-3) \\
 &= 271 \times (-3) + 22 \times 37 \\
 &= 271 \times (-3) + (564 - 271 \times 2) \times 37 \\
 1 &= 564 \times 37 + 271 \times (-77)
 \end{aligned}$$

On peut donc prendre $(a; b) = (37; -77)$.

2.) Résolvons E_0

$$(E_0) : 564x + 271y = 0$$

$$564x = -271y$$

-271 divise $564x$ et est premier avec 564 , donc d'après le théorème de Gauss, -271 divise x . Il existe alors un entier relatif k tel que : $x = -271k$. On en déduit que $y = 564k$.

Réciproquement, pour tout entier relatif k , le couple $(-271k; 564k)$ est solution de (E_0)

L'ensemble solution de (E_0) est donc :

$$\{(-271k; 564k), k \in \mathbb{Z}\}.$$

3.a) Trouvons $(x_0; y_0)$

D'après la question 1.b), on déduit le couple $(x_0; y_0) = (37; -77)$.

b) Solutions de (E)

$$(E) : 564x + 271y = 1$$

On a les solutions de $564x + 271y = 0$

Ainsi, on a : $564x + 271y + 564x_0 + 271y_0 = 1$.

$$\Rightarrow 564(x + x_0) + 271(y + y_0) = 1$$

On en déduit que les couples $(x + x_0; y + y_0)$ sont solutions de (E) avec $(x; y)$ solution de (E_0) .

L'ensemble solution de (E) est donc :

$$\{(-271k + 37; 564k - 77), k \in \mathbb{Z}\}.$$

4.a) Justification

$\text{pgcd}(564; 271) = 1$ et 1 divise 3 , par conséquent, l'équation $564x + 271y = 3$ admet de solution.

b) Détermination des points.

$$\text{On a : } 564 \times 37 + 271 \times (-77) = 1$$

$$\Rightarrow 3 \times 564 \times 37 + 271 \times 3 \times (-77) = 3$$

$$\Rightarrow 564 \times 111 + 271 \times (-231) = 3$$

$$\Rightarrow 564\alpha + 271\beta = 3 \text{ avec } (\alpha; \beta) = (111; -231).$$

Ainsi, une solution particulière de cette équation est le couple $(\alpha; \beta) = (111; -231)$.

On en déduit que les solutions de cette équation sont les couples $(x; y) =$

$$\{(-271k + 111; 564k - 231), k \in \mathbb{Z}\}.$$

En conclusion, les points à coordonnées entières de (D) sont les points A_k dont les coordonnées sont les couples $(x; y)$, solutions de l'équation $564x + 271y = 3$.

Activité 15

1.) Démonstration

Avec le théorème de Bézout,

$\text{pgcd}(2m + 1; 3m + 1) = 1$ s'il existe deux entiers x et y tels que : $x(2m + 1) + y(3m + 1) = 1$.

On remarque que : $3(2m + 1) - 2(3m + 1) = 1$, donc x et y existent et $(x; y) = (3; -2)$

D'où $\forall m \in \mathbb{Z}, \text{pgcd}(2m + 1; 3m + 1) = 1$.

2.a) Résolution dans $\mathbb{Z}$

Le couple $(x_0; y_0) = (2; 0)$ est une solution particulière de cette équation.

$$\text{Ainsi, } 3x - 4y = 6 \Leftrightarrow 3x - 4y = 3x_0 - 4y_0$$

$$\Leftrightarrow 3(x - x_0) = 4(y - y_0)$$

$$\Leftrightarrow 3(x - 2) = 4y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4k + 2 \\ y = 3k \end{cases} \text{ (car } \text{pgcd}(3; 4) = 1).$$

L'ensemble solution est donc :

$$\{(4k + 2; 3k), k \in \mathbb{Z}\}.$$

b) Résolution des systèmes

$$i) \begin{cases} x \equiv 0 \text{ [11]} \\ x \equiv -1 \text{ [25]} \end{cases}$$

Ce système équivaut à :

$$\begin{cases} x = 11p \\ x = 25q - 1 \end{cases} (p; q) \in \mathbb{Z}^2$$

$$\Leftrightarrow 11p = 25q - 1$$

$$\Leftrightarrow 25q - 11p = 1$$

Une solution particulière de cette équation est le couple $(q; p) = (4; 9)$.

Ainsi, $25q - 11p = 1 \Leftrightarrow 25(q - 4) = 11(p - 9)$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} q = 11k + 4 \\ p = 25k + 9 \end{cases} ; (k \in \mathbb{Z}), \text{ car } \text{pgcd}(25; 11) = 1.$

Ainsi, on a : $x = 11p = 275k + 99$

L'ensemble solution est donc :

$$\boxed{\{275k + 99, k \in \mathbb{Z}\}}$$

ii) $\begin{cases} x \equiv 2 [4] \\ x \equiv 0 [3] \end{cases}$

Le système équivaut à : $\begin{cases} x \equiv 6 [4] \\ x \equiv 0 [3] \end{cases}$

$$\Leftrightarrow 4p + 6 = 3p; (p; q) \in \mathbb{Z}^2$$

$$\Leftrightarrow 3q - 4p = 6$$

D'après la question 2.a), on déduit que

$$(q; p) = (3k + 2; 3k)$$

On a : $x = 4p + 6$

D'où $\boxed{x = 12k + 6, k \in \mathbb{Z}}$

iii) $\begin{cases} x \equiv 3 [5] \\ x \equiv -1 [12] \end{cases}$

On résout de façon analogue à i) et ii) ce système.

iii) : $\begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ y \equiv x^2 [8] \end{cases}$

En s'inspirant de la question 2.a), ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} x = 4k + 2 \\ y = 3k \\ y \equiv x^2 [8] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4k + 2 \\ y = 3k \\ 3k \equiv (4k + 2)^2 [8] \end{cases}$$

Réolvons : $3k \equiv (4k + 2)^2 [8]$

Cette équation équivaut à :

$$16k^2 + 13k + 4 \equiv 0 [8]$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
r	4	1	6	3	0	4	2	3

Les solutions sont :

$$k = 8p + 4, p \in \mathbb{Z}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{cases} x = 4(8p + 4) + 2 \\ y = 3(8p + 4) \end{cases}$$

L'ensemble solution est donc :

$$\boxed{\{(32p + 18; 24p + 12), p \in \mathbb{Z}\}}$$

3.) Démonstration

On remarque que $5(7m + 3) - 7(5m + 2) = 1$

Donc $7m + 3$ et $5m + 2$ sont premiers entre eux et alors $\text{pgcd}(7m + 3; 5m + 2) = 1$.

Par conséquent, $\frac{7m+3}{5m+2}$ est irréductible.

4.) Déterminons les entiers relatifs m

Pour tous entiers relatifs différents de -2 , le reste de la division euclidienne de $2m - 1$ par $m + 2$ est -5 , donc $m + 2$ divise $2m - 1$ si $m + 2$ divise -5 .

On trouve $\underline{m \in \{-7; -3; -1; 3\}}$.

Activité 16

1.) Résolution dans $\mathbb{IN}^2$

a) $\begin{cases} \text{PGCD}(x; y) = 354 \\ x + y = 5664 \end{cases}$

Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} \text{pgcd}(x; y) = 354 \text{pgcd}(x'; y') \\ x = 34x' \\ y = 34y' \\ \text{pgcd}(x'; y') = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{pgcd}(x'; y') = 1 \\ x' + y' = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x'; y') \in \{(1; 15), (15; 1), (3; 13), (13; 3), (5; 11), (11; 5), (7; 9), (9; 7)\}$$

On en déduit que les couples $(x; y)$ cherchés sont :

$$\{(354; 5310), (5310; 354); (1062; 4602), (4602; 1062), (1770; 3894); (3894; 1770), (2478; 3186); (3186; 2478)\}.$$

b) $\begin{cases} \text{PGCD}(x; y) = 2 \\ x \times y = 252 \end{cases}$

Le système équivalent à :

$$\begin{cases} \text{pgcd}(x'; y') = 1 \\ x = 2x' \\ y = 2y' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{pgcd}(x'; y') = 1 \\ x' y' = 63 \end{cases}$$

$$\text{On a : } 63 = 3 \times 21 = 7 \times 9$$

Comme x' et y' sont premiers entre eux, alors

$$(x'; y') = (7; 9) \text{ ou } (x'; y') = (9; 7).$$

On en déduit que les couples $(x; y)$ solutions sont :

$$\{(14; 18), (18; 14)\}.$$

$$\text{c) } \begin{cases} \text{PPCM}(x; y) = 168 \\ x \times y = 1008 \end{cases}$$

$$\text{On a : } \text{pgcd}(x; y) = \frac{1008}{168} = 6$$

Le système est donc équivalent à :

$$\begin{cases} \text{pgcd}(x; y) = 6 \\ x \times y = 1008 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6x' \\ y = 6y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{pgcd}(x'; y') = 1 \\ x' \times y' = 28 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x'; y') \in \{(1; 28), (28; 1), (4; 7), (7; 4)\}$$

Les couples $(x; y)$ solutions sont donc :

$$\{(6; 168); (168; 6); (24; 42), (42; 24)\}.$$

$$\text{d) } \begin{cases} \text{PPCM}(x; y) = 504 \\ x + y = 135 \end{cases}$$

$$\text{Soit } \delta = \text{pgcd}(x; y)$$

$$\text{On a : } x = \delta x' \text{ et } y = \delta y' \text{ avec}$$

$$\text{pgcd}(x'; y') = 1$$

$$\delta(x' + y') = 135 = 3 \times 45 = 9 \times 15 = 27 \times 5$$

δ est un diviseur à 135 et à 504. On en déduit que $\delta \in \{3; 9\}$.

$$\begin{aligned} \text{Par ailleurs, } \text{ppcm}(x; y) &= \text{ppcm}(\delta x'; \delta y') \\ &= \delta \text{ppcm}(x'; y') = \delta x' y' \text{ (car } x' \text{ et } y' \text{ sont premiers entre eux.)} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, on a : } \delta x' y' = 504.$$

Avec les valeurs possibles de δ , le système est donc équivalent à :

$$\begin{cases} x' y' = 168 \\ x' + y' = 45 \end{cases} \quad (1) \text{ ou } \begin{cases} x' y' = 56 \\ x' + y' = 15 \end{cases} \quad (2)$$

Seul le système (2) admet de solutions dans $\mathbb{N}^2$ et donc $\delta = 9$.

$$\text{On a : } (x'; y') = \{(8; 7); (7; 8)\}.$$

On en déduit que l'ensemble solution est l'ensemble des couples

$$(x; y) = \{(63; 72); (72; 63)\}.$$

2.a) Résolution de (E')

$$(E') : 2x - 3y = 0$$

$$2x - 3y = 0 \Leftrightarrow 2x = 3y$$

2 divise 3y et 2 et 3 sont premiers entre eux, donc 2 divise y. Alors, il existe un entier relatif k tel que : $y = 2k$. On en déduit que $x = 3k$.

Réciproquement, le couple $(3k; 2k)$ est solution de (E').

En conclusion, les solutions de (E') sont : $\{(3k; 2k), k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Résolvons (E)

Le couple $(x_0; y_0) = (3; 1)$ est solution de (E).

$$\text{On a : } 2x - 3y = 3 \Leftrightarrow 2x - 3y = 2x_0 - 3y_0$$

$$\Leftrightarrow 2(x - x_0) = 3(y - y_0)$$

$$\Leftrightarrow x = 3k + x_0 \text{ et } y = 2k + y_0$$

$$(\text{car } \text{pgcd}(2; 3) = 1)$$

L'ensemble solution est donc :

$$\{(3 + 3k; 1 + 2k), k \in \mathbb{Z}\}.$$

3.a) Déterminons (a ; b)

$$\text{On a : } 2\mu \leq 11 \text{ et } 3\delta \leq 11 ; \text{ soit } \begin{cases} \mu \leq 5,5 \\ \delta \leq 3,67 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\} \\ \delta \in \{0; 1; 2; 3\} \end{cases}$$

Comme $2\mu + 3\delta = 11$, on déduit que $\mu = 4$ et $\delta = 1$.

$$\text{Ainsi, on a : } \begin{cases} a \times b = \mu \times \delta = 4 \\ \text{pgcd}(a; b) = 1 \end{cases}$$

On obtient les couples $\{(4; 1), (1; 4)\}$.

b) Liste des diviseurs de 108

$$108 = 4 \times 3 \times 9,$$

On en déduit que les diviseurs positifs de 108 sont :

$$1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 27; 36; 54 \text{ et } 108.$$

Déterminons (a ; b)

$$\text{On a : } \begin{cases} \mu - 3\delta = 108 \\ 10 < \delta < 15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu - 3\delta = 108 \\ \delta \in \{11; 12; 13; 14\} \end{cases}$$

–3 divise 108 et donc δ divise 108. On en déduit que $\delta = 12$ et $\mu = 144$.

$$\text{Ainsi, } \begin{cases} ab = \mu\delta = 12^3 \\ \text{pgcd}(a; b) = 12 \end{cases}$$

$$\text{Posons : } \begin{cases} a = 12a' \\ b = 12b' \\ \text{pgcd}(a'; b') = 1 \end{cases}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} a'b' = 12 = 2^2 \times 3 \\ \text{pgcd}(a'; b') = 1 \end{cases}$$

Les diviseurs positifs de 12 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 et 12.

Ainsi, $(a'; b') = (1; 12); (3; 4); (12; 1); (4; 3)$.

On en déduit que les couples $(a; b)$ recherchés sont :

$$\{(12; 144); (36; 148); (144; 12); (48; 36)\}.$$

4.a) Déterminons $x; y$

En utilisant l'algorithme d'Euclide, on déduit $(x; y) = (5; 8)$.

b) Résolution de l'équation

Un raisonnement logique et précis permet de trouver l'ensemble solution :

$$\{(28k + 5; 45k + 8, k \in \mathbb{Z})\}.$$

c) On déduit l'ensemble :

$$\{28k + 30; 45k + 48, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Activité 17

1.a) Calculons $\text{pgcd}(363; 483)$

$$483 = 363 + 120$$

$$363 = 3 \times 120 + 3$$

$$120 = 3 \times 40 + 0$$

$$\text{Ainsi, } \text{pgcd}(363; 483) = \text{pgcd}(120; 3)$$

$$= \text{pgcd}(3; 0) = 3$$

$$\text{pgcd}(363; 483) = 3.$$

$$\text{b) } 483 - 363 = 120 \neq 3, \text{ donc}$$

$$(363; 484) \notin \mathcal{F}.$$

2.) On a :

$$n + 1 = n \times 1 + 1, \text{ donc } \text{pgcd}(n+1; n) = \text{pgcd}(n; n+1) = \text{pgcd}(n; 1) = 1$$

Comme $n + 1 - n = 1$, alors $\text{pgcd}(n; n+1) = (n+1) - n$

D'où le couple $(n; n+1) \in \mathcal{F}$.

3.a) Démonstration

$$(x; y) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \text{pgcd}(x; y) = y - x$$

On en déduit que $y - x$ divise x et y . Il existe alors deux entiers k et k' tels que

$$x = k(y - x) \text{ et } y = k'(y - x).$$

$$\text{Ainsi, } y - x = (y - x)(k' - k)$$

On en déduit que $k' - k = 1$, soit $k' = k + 1$

D'où $\text{pgcd}(x; y) = y - x$ si $x = k(y - x)$ et

$$y = (k + 1)(y - x)$$

Réciproquement, tous couples $(x; y) =$

$$(k(y - x); (k + 1)(y - x)) \in \mathcal{F}.$$

Par suite, $(x; y) \in \mathcal{F}$ si $x = k(y - x)$ et

$$y = (k + 1)(y - x).$$

b) Dédution

$$\text{On a : } \text{pgcd}(x; y) \times \text{ppcm}(x; y) = xy$$

$$\Rightarrow \text{ppcm}(x; y) = \frac{(y-x)^2 \times k(k+1)}{y-x}$$

$$\text{D'où } \text{ppcm}(x; y) = k(k + 1)(y - x)$$

4.a) Les diviseurs positifs de 228 sont :

$$1; 2; 3; 4; 6; 12; 19; 38; 57; 76; 114; 228.$$

b) Dédution des couples $(x; y)$

$$\text{On a : } (x; y) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \text{PPCM}(x; y) =$$

$$k(k + 1)(y - x) \text{ avec } x = k(y - x) \text{ et}$$

$$y = (k + 1)(y - x)$$

$$228 = 1 \times 2 \times 114 = 2 \times 3 \times 38 = 3 \times 4 \times 19$$

On en déduit que :

$$x = 114 \text{ et } y = 228 \text{ ou } x = 76 \text{ et } y = 114 \text{ ou}$$

$$x = 57 \text{ et } y = 76.$$

L'ensemble des couples $(x; y)$ recherchés est :

$$\{(114; 228), (76; 114), (57; 76)\}.$$

Activité 18**1.a) Démontrons que p divise a^2 .**

On $\text{pgcd}(a+b; ab) = p$, donc un entier a^2 est multiple de p s'il existe deux entiers relatifs x et y tels que :

$$a^2 = x(a+b) + y(ab)$$

On remarque que $a^2 = a(a+b) - a(ab)$

On en déduit que x et y existent et $x = a$ et $y = -a$.

En conséquence, p divise a^2 .

b) Dédution

On a : $p \equiv 0[a^2]$

Or $a^2 \equiv 0[a]$, donc $p \equiv 0[a]$

Alors $a \equiv 0[p]$

Par suite, **p divise a**.

Il est clair que si $\text{pgcd}(a+b; ab) = p$, alors $a+b$ et ab sont divisibles par p.

Nous savons par ailleurs que p divise $a+b$.

Puisque p divise a, alors p diviserait $a+b$ s'il divise b.

Soit **p divise b**.

Démonstration

On a : $\text{pgcd}(a+b; ab) = p$.

Mais p divise b, donc on a :

$$\text{pgcd}(a+b; ab) = \text{pgcd}(a+b; b)$$

Comme $a+b = a \times 1 + b$, alors $\text{pgcd}(a+b; b) = \text{pgcd}(a; b)$.

Par suite, **$\text{pgcd}(a; b) = p$** .

2.a) Déterminons a et b.

$$\begin{cases} \text{PGCD}(a; b) = 5 \\ \text{PPCM}(a; b) = 170 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{PGCD}(a; b) = 5 \\ \text{PPCM}(a; b) = 170 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} \text{pgcd}(a; b) = 42\text{pgcd}(a'; b') \\ \text{ppcm}(a; b) = 42\text{ppcm}(a'; b') \\ \text{pgcd}(a'; b') = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5a' \\ b = 5b' \\ a'b' = 34 \end{cases}$$

$$a \leq b \Rightarrow a' \leq b'$$

$$\Rightarrow (a'; b') = (1; 34) \text{ ou } (a'; b') = (2; 17)$$

$$\text{D'où } (a; b) = \{(5; 170); (10; 85)\}$$

b) Dédution

5 est premier, donc de ce qui précède, on a : $\text{pgcd}(a+b; ab) = 5$; soit $\text{pgcd}(a; b) = 5$.

Le système est donc équivalent au système précédent. On en déduit qu'ils ont le même ensemble solution.

Activité 21**1.) Résolvons les systèmes.**

Nous aurons toujours à raisonner par implication pour faire par la suite des vérifications :

$$\text{a)} \begin{cases} 4x + 1y = 2 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases} \text{ dans } (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$$

Nous allons conserver la première ligne et remplacer la deuxième par sa combinaison avec la première.

On a :

$$\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 7x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y = 2 \\ 21x = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y = 2 \\ y = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Ce couple vérifie le système, d'où l'ensemble solution est : $\{(4; 1)\}$

$$\text{b)} \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases} \text{ dans } (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^2$$

Multiplions la 2^{ème} ligne de ce système par $\overline{3}$.

On a :

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 5x + 6y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 7x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 4y = 2 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x; y) = \{(\overline{5}; \overline{3}); (\overline{5}; \overline{8})\}$$

Ces deux couples vérifient le système, d'où l'ensemble solution est :

$$\{(x; y) = (\overline{5}; \overline{3}); (\overline{5}; \overline{8})\}$$

NB : On a : $\overline{x} = \dot{x}$

2.a) Déterminons pgcd(A ; B)

$$\text{On a : } 9n - 5 = 3(3n + 4) - 17$$

On déduit d'après l'algorithme d'Euclide que :

$$\text{Pgcd}(9n - 5 ; 3n + 4) = \text{pgcd}(3n + 4 ; -17)$$

$$= \text{pgcd}(3n + 4 ; 17)$$

$$\clubsuit \text{ Si } n \equiv 10[7], \text{ pgcd}(3n + 4 ; 17) = 17.$$

$$\clubsuit \text{ Si } n \not\equiv 10[17], \text{ pgcd}(3n + 4 ; 17) = 1$$

Ainsi, **pgcd(A ; B) ∈ {1 ; 17}.**

NB : au fait, $\text{pgcd}(3n + 4 ; 17) = 17$ si $3n + 4$ est multiple de 17 si $3n + 4$ est multiple de 17 ie si $3n + 4 \equiv 0[17] \Rightarrow n \equiv 10[17]$.

b) Déterminons n

$$\text{On a : } \begin{cases} \text{pgcd}(A; B) = 17 \\ \text{ppcm}(A; B) = 884 \end{cases}$$

La résolution de ce système dans $\mathbb{Z}$ donne les couples :

$$(17 ; 884), (884 ; 17), (68 ; 221), (221 ; 68), (-17 ; -884), (-884 ; -17), (-68 ; -221), (-221 ; -68),$$

De tous ces couples, seul pour le couple $(-68 ; -221)$, on a le système :

$$\begin{cases} 3n + 4 = -68 \\ 9n - 5 = -221 \end{cases} \text{ qui admet de solution dans } \mathbb{Z} \text{ et cette solution est } n = -24.$$

On trouve ainsi **n = -24.**

3.) Résolution des équations dans IN.

a)PPCM(x ; 6)=96

$$6 = 2 \times 3 \text{ et } 96 = 2^5 \times 3$$

Nous avons 96 qui donne le produit de 2^5 et 3. Comme la décomposition de 6 contient 2^1 , c'est donc x qui a le plus grand exposant de 2 ie 2^5 . De plus, comme la décomposition de 96 contient 3^1 et puisque 6 contient 3^1 , alors x peut contenir ou non 3^1 .

On en déduit que $x = 2^5$ ou $n = 2^5 \times 3$

Soit **n = {32 ; 96}.**

b) PPCM(x ; 72)=216

$$72 = 2^3 \times 3^2 \text{ et } 216 = 2^3 \times 3^3$$

On a 216 qui renferme 3^2 ; or 72 a 3^2 , donc c'est x qui possède les 3^3 . De plus, 216 a 2^3 et 72 l'a aussi. On en déduit que x peut avoir 2^1 ou 2^1 .

Ainsi, on a : $x = 3^3$ ou $x = 3^3 \times 2^1$ ou $x = 3^3 \times 2^2$ ou $x = 3^3 \times 2^3$.

D'où **x = {27 ; 54 ; 108 ; 216}.**

c)PGCD(x ; 630)=105 avec 600<x<1100.

$$\text{On a : } 630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \text{ et } 105 = 3 \times 5 \times 7$$

On a 630 qui renferme 3^2 , donc forcément x a 3. Par ailleurs, 630 a 5, donc x a 5^k , $k \in \mathbb{N}$.

En outre, 630 a 7, donc x a 7^n , $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, on a :

$$x = 3 \times 5^k \times 7^n$$

$$\Rightarrow \text{Si } k = 1 \text{ et } n = 2, x = 735.$$

$$\Rightarrow \text{Si } k = 1 \text{ et } n = 3, x = 5145$$

$$\Rightarrow \text{Si } k = 2 \text{ et } n = 1, x = 525$$

$$\Rightarrow \text{Si } k = 2 \text{ et } n = 2, x = 3675$$

Puisque si k et n sont grand, on a x qui est grand et puisque $600 < x < 1100$, alors on a :

x = 735.

Activité 22

1) Démontrons que 401 est un nombre premier.

Tous les entiers naturels premiers p inférieurs ou égaux à $\sqrt{401}$ sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

Le tableau ci-contre nous donne le reste de la division euclidienne de 401 par p.

p	2	3	5	7	11	13	17	19
r	1	2	1	2	5	11	10	2

D'après ce tableau, aucun reste de la division euclidienne de 401 par p n'est nul. On en déduit que 401 est un nombre premier.

2.a) Décomposition de 17640

$$17640 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$$

b) Dédution

Les diviseurs de 17640 sont de la forme

$$2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d \text{ où } a \in \{0; 1; 2; 3\}, \\ b \in \{0; 1; 2\}; c \in \{0; 1\}; d \in \{0; 1; 2\}$$

On en déduit qu'il y a au total $4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$ diviseurs pour 17640.

3.a) Décomposition de 469

$$469 = 7 \times 67.$$

b) Trouvons (x ; y)

Comme $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$,
alors $x^3 - y^3 = 469 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) = 1 \times 469 = 7 \times 67$

$$\text{D'où } \{(x - y); (x^2 + xy + y^2)\} = \{1; 469\} \\ \text{ou } \{(x - y); (x^2 + xy + y^2)\} = \{7; 67\}$$

Comme x et y sont des entiers positifs,
 $x - y \leq x \leq x^2 \leq x^2 + xy + y^2$

$$\text{Donc } \begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 469 \end{cases} \text{ ou soit}$$

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 + xy + y^2 = 67 \end{cases}$$

1^{er} cas

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 469 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 469 = (y + 1)^2 + (y + 1)y + y^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 469 = 3y^2 + 3y + 1$$

$$\Rightarrow 468 = 3y^2 + 3y$$

$$\Rightarrow y^2 + y - 156 = 0$$

$$\Rightarrow y \in \{12; -13\}$$

$$\Rightarrow y = 12$$

Puisqu'il fallait trouver x et y positifs, donc la seule solution possible dans ce cas est $(13; 12) = (x; y)$

Le lecteur vérifiera qu'elle convient.

2^{ème} cas

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 + xy + y^2 = 67 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (y + 7)^2 + (y + 7)y + y^2 = 67$$

$$\Rightarrow y^2 + 7y - 6 = 0$$

Cette équation n'ayant pas de solutions entières ($\Delta = 73$), on déduit que l'ensemble solution S est :

$$\underline{S = \{(13; -12)\}}.$$

Activité 23**1.) Décomposition de 145**

$$145 = 5 \times 29.$$

2.) Dédisons-en (x; y)

$$x^2 - y^2 = 145 \Leftrightarrow (x + y)(x - y) = 5 \times 29 \\ = 1 \times 145$$

$$(x; y) \in \mathbb{N}^2 \Rightarrow x - y \leq x + y$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 29 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 145 \end{cases}$$

On en déduit que l'ensemble solution S est :

$$\underline{S = \{(17; 12), (73; 72)\}}$$

3.a) Déterminons (x; y)

$x^2 - y^2 = a^2 b^2 \Leftrightarrow (x + y)(x - y) = a^2 b^2$,
d'où, comme a et b sont premiers, les cas possibles sont :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = a^2 b^2 \end{cases} (1); \begin{cases} x + y = a \\ x - y = ab^2 \end{cases} (2);$$

$$\begin{cases} x + y = a^2 \\ x - y = b^2 \end{cases} (3); \begin{cases} x + y = a^2 b \\ x - y = b \end{cases} (4);$$

$$\begin{cases} x + y = a^2 b^2 \\ x - y = 1 \end{cases} (5); \begin{cases} x + y = b \\ x - y = a^2 b \end{cases} (6);$$

$$\begin{cases} x + y = b^2 \\ x - y = a^2 \end{cases} (7); \begin{cases} x + y = ab^2 \\ x - y = a \end{cases} (8);$$

Remarquons que comme $(x; y) \in \mathbb{N}^{*2}$,
 $x - y < x + y$, ce qui élimine les cas (1), (2), (6) et (7) puisque les valeurs proposées pour $x + y$ sont inférieures à celles proposées pour $x - y$ (ne pas oublier que si a est premier, $a > 1$).

Nous avons ainsi :

$$\begin{cases} x + y = b^2 \\ x - y = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a^2 + b^2}{2} \\ y = \frac{a^2 - b^2}{2} \end{cases} \text{ (a)}$$

$$\begin{cases} x + y = a^2 b \\ x - y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{b(a^2 b + 1)}{2} \\ y = \frac{b(a^2 b - 1)}{2} \end{cases} \text{ (b)}$$

$$\begin{cases} x + y = a^2 b^2 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a^2 b^2 + 1}{2} \\ y = \frac{a^2 b^2 - 1}{2} \end{cases} \text{ (c)}$$

$$\begin{cases} x + y = ab^2 \\ x - y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a(b^2 + 1)}{2} \\ y = \frac{a(b^2 - 1)}{2} \end{cases} \text{ (d)}$$

Reste encore à vérifier si les valeurs obtenues sont entières.

Pour cela, souvenons-nous que $a > b$ et que a et b sont premiers, donc soit a et b sont impairs ; soit a est impair et b est égal à 2 (2 est le plus petit entier premier et le seul pair). Ainsi, dans le cas (a), si $b = 2$, les valeurs obtenues pour x et y ne sont pas entières. Mais si b est impair, comme a l'est aussi, x et y sont des entiers.

L'élève vérifiera ainsi les résultats.

	(a)	(b)	(c)	(d)
a et b impairs	Une solution	Une solution	Une solution	Une solution
a impair et $b = 2$	Pas de solution	Une solution	Pas de solution	Pas de solution

b) Pour $b = 2$, le système admet de solution seulement dans le cas (b).

On déduit que $(x; y) = (2230; 288)$.

Activité 24

1.°) Démonstration

La division euclidienne de $n^2 + 5n + 4$ et $n^2 + 3n + 2$ par $n + 1$ permet d'établir que : $n^2 + 5n + 4 = (n+1)(n+4)$ et $n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$.

Il en résulte que $n^2 + 5n + 4$ et $n^2 + 3n + 2$ sont divisibles par $n + 1$.

2.) Déterminons n

$$n \equiv -1[n + 1] \Rightarrow n^2 \equiv 1[n + 1]$$

$$\Rightarrow 3n^2 \equiv 3[n + 1] \text{ et de meme,}$$

$$15n \equiv -15[n + 1]$$

$$\text{Donc } 3n^2 + 15n + 19 \equiv 3 - 15 + 19[n + 1]$$

$$\text{Soit } 3n^2 + 15n + 19 \equiv 7[n + 1]$$

Ainsi, $n + 1$ divise $3n^2 + 15n + 19$ si n divise 7

On déduit que $n \in \{0; 6\}$.

3.) Dédution

☞ Lorsque $n = 0$, $3n^2 + 15n + 19 = 19$ et $n^2 + 3n + 2 = 2$ et 2 ne divise pas 19 dans $\mathbb{Z}$.

☞ Lorsque $n = 6$, $3n^2 + 15n + 19 = 217$ et $n^2 + 3n + 2 = 56$ et 56 ne divise pas 217 dans $\mathbb{Z}$.

☞ Lorsque $n \notin \{0; 6\}$, $n+1$ divise $n^2 + 3n + 2$ et $n + 1$ ne divise pas $3n^2 + 15n + 19$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $3n^2 + 15n + 19$ n'est pas divisible par $n^2 + 3n + 2$.

4.a) Déterminons x

$$3x \equiv 23[7]$$

$$\text{On a : } 23 \equiv 2[7], \text{ donc on a : } 3x \equiv 2[7]$$

$$\Rightarrow 3x \equiv 2 + 7[7] \text{ (car } 7 \equiv 0[7])$$

$$\Rightarrow 3x \equiv 9[7] \Rightarrow 3x \equiv 3 \times 3[7]$$

$$\text{Donc } x \equiv 3[7]$$

$$\text{On déduit que } x = 7k + 3, k \in \mathbb{Z}.$$

NB : Il y a également une autre manière de résoudre ces genres d'équations, en utilisant les notions de classe :

Soit φ l'application de $\mathbb{Z}$ dans le corps $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ qui associe à tout entier sa classe dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

$$3x \equiv 23[7] \Leftrightarrow \varphi(3x) = \varphi(23) = \varphi(2) = \dot{2}$$

$$\text{Or } \varphi(3x) = \dot{3}\varphi(x), \text{ donc } \dot{3}\varphi(x) = \dot{2}.$$

$$\text{Comme } \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \text{ est un corps, } \dot{3}\varphi(x) = \dot{2} \Leftrightarrow$$

$\dot{5} \times \dot{3} \times \varphi(x) = \dot{5} \times \dot{2} \Leftrightarrow \varphi(x) = \dot{3}$ (car $\dot{5}$ est l'inverse de $\dot{3}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$)

Ainsi, $3x \equiv 23[7] \Leftrightarrow x \equiv 3[7]$

Soit $x = 7k + 3, k \in \mathbb{Z}$.

b) Dédution

$$3x - 7y = 23 \Rightarrow 3x \equiv 23[7]$$

Donc si $(x; y)$ est solution, alors $x = 7k + 3$ où k est un entier relatif ; d'où $3(3 + 7k) - 7y = 23 \Leftrightarrow 21k - 7y = 14 \Leftrightarrow 3k - y = 2 \Leftrightarrow y = -2 + 3k, k \in \mathbb{Z}$

Inversement, si k est un entier relatif, $3(3 + 7k) - 7(-2 + 3k) = 9 + 21k + 14 - 21k = 23$

Il en résulte que l'ensemble solution est : $\{(-3 + 7k; -2 + 3k, k \in \mathbb{Z})\}$.

5.a) Montrons que $2k + 1$ et $9k + 4$ sont premiers entre eux.

On remarque que $9(2k + 1) - 2(9k + 4) = 1$

On en déduit, d'après le théorème de Bézout que $2k + 1$ et $9k + 4$ sont premiers entre eux.

b) Démonstration

Soit a les diviseurs communs à $2k - 1$ et à $9k + 4$.

$$\text{On a : } \begin{cases} a \text{ div } 2k - 1 \\ a \text{ div } 9k + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \text{ div } 9(2k - 1) \\ a \text{ div } 2(9k + 4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \text{ div } 18k - 9 \\ a \text{ div } 18k + 8 \end{cases} \Rightarrow a \text{ div } (18k - 9) - (18k + 8), \text{ soit } a \text{ divise } -17.$$

Comme le pgcd est par définition positif et comme les seuls diviseurs positifs de $2k - 1$ et de $9k + 4$ sont ceux de -17 , alors $\text{pgcd}(2k - 1; 9k + 4) \in \{1; 17\}$.

c) Valeur de k

Le pgcd sera effectivement 17 si et seulement si 17 est un diviseur commun de $2k - 1$ et de $9k + 4$.

$$17 \text{ divise } 2k - 1 \Leftrightarrow 2k \equiv 1[17]$$

$$17 \text{ divise } 9k + 4 \Leftrightarrow 9k \equiv -4[17] \text{ ie } 9k \equiv 13[17].$$

Comme 17 est premier, $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ est un corps, donc :

$$\begin{cases} 2k \equiv 1[17] \\ 9k \equiv 13[17] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 \times 2k \equiv 9[17] \\ 2 \times 9k \equiv 2 \times 13[17] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \equiv 9[17] \\ k \equiv 9[17] \end{cases}$$

Ainsi, 17 sera le pgcd de $2k - 1$ et $9k + 4$ si et seulement si $k = 17k + 9, k \in \mathbb{Z}$.

Activité 25

1) Montrons que, si deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux, $a^2 + b^2$ et $a \times b$ le sont aussi.

a et b sont premiers entre eux s'il n'existe aucun nombre premier qui les divise tous les deux.

Supposons que p est un nombre premier.

On a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} p \text{ div } a^2 + b^2 \\ p \text{ div } ab \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} p \text{ div } a^2 + b^2 + 2ab \\ p \text{ div } ab \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} p \text{ div } (a + b)^2 \\ p \text{ div } ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \text{ div } a + b \\ p \text{ div } ab \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} p \text{ div } a(a + b) \\ p \text{ div } ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \text{ div } a^2 + ab \\ p \text{ div } ab \end{cases} \\ &\Rightarrow p \text{ div } a^2 \Rightarrow p \text{ div } a \end{aligned}$$

De même, on montrerait que p divise b , mais comme a et b sont premiers entre eux, $p = 1$ et par suite, $a^2 + b^2$ et ab sont premiers entre eux.

2.) Déterminons $(x; y)$

$$\begin{cases} \text{ppc}(x; y) = 30 \\ x^2 + y^2 = 325 \end{cases}$$

Supposons que $\text{pgcd}(x; y) = p$. Alors $\frac{x}{p}$ et $\frac{y}{p}$ sont premiers entre eux et $\text{ppcm}(\frac{x}{p}; \frac{y}{p}) = \frac{30}{p}$

On déduit alors de la question 1.) que $\frac{30}{p}$ et

$\frac{325}{p^2} = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{p^2}$ sont premiers entre eux. Comme $30 = 2 \times 3 \times 5$ et $325 = 5^2 \times 13$, on en déduit que $p = 5$. En posant $x' = \frac{x}{5}$ et $\frac{y}{5} = y'$, le problème se ramène donc à rechercher x' et y' premiers entre eux sachant que

$$\text{ppcm}(x'; y') = \frac{30}{5} = 6 \text{ et } x'^2 + y'^2 = \frac{325}{25} = 13.$$

Comme x' et y' sont premiers entre eux,

$$\text{ppcm}(x'; y') = x'y'$$

$$\text{Ainsi, } \begin{cases} x'y' = 6 \\ x'^2 + y'^2 = 13 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x'y' = 6 \\ x'^2 + y'^2 + 2x'y' = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'y' = 6 \\ (x' + y')^2 = 5^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'y' = 6 \\ x' + y' = 5 \end{cases} \text{ (car } x' \text{ et } y' \text{ doivent être des entiers naturels).}$$

Ce système se ramène à une équation du second degré :

$$X^2 - 5X + 6 = 0, \text{ d'où } \{x'; y'\} = \{2; 3\}$$

$$\text{Soit } \{x; y\} = \{10; 15\}.$$

3.a) Démonstration

$$\text{On a : } C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n}{p} \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}$$

$$= \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}$$

$$\text{Donc } n C_{n-1}^{p-1} = p C_n^p.$$

De cette égalité, on déduit que n divise $p C_n^p$.

Or n est premier, donc $\forall 0 < p < n$, n et p sont premiers entre eux et donc d'après le théorème de Gauss, n divise C_n^p .

Il en résulte que $C_n^p \equiv 0[n]$.

b) Dédution

$$\text{On a : } (a + b)^n = a^n + b^n + \sum_{p=1}^{n-1} C_n^p a^p b^{n-p}$$

$$\text{Or } C_n^p \equiv 0[n], \text{ donc } \sum_{p=1}^{n-1} C_n^p a^p b^{n-p} \equiv 0[n]$$

Comme $a^n + b^n \equiv a^n + b^n[n]$, alors

$$a^n + b^n + \sum_{p=1}^{n-1} C_n^p a^p b^{n-p} \equiv a^n + b^n[n]$$

$$\text{D'où } (a + b)^n \equiv a^n + b^n[n].$$

4.a) Démonstration

Raisonnons par récurrence.

Soit $p(a) : \ll a^n \equiv a[n] \gg$

$\Rightarrow p(0)$ est vraie.

$\Rightarrow$ Soit k un entier naturel. Si $p(k)$ est vraie, on a : $k^n \equiv k[n]$.

Or d'après la question précédente, on a :

$$(k+1)^n \equiv k^n + 1^n[n], \text{ donc } (k+1)^n \equiv k + 1[n] \text{ car } k^n \equiv k[n].$$

On a ainsi $p(k+1)$ qui est vraie. On déduit que $p(a)$ est vraie pour tout entier naturel a .

b) Dédution

Soit a un entier naturel premier avec n .

$$\text{On a : } a \times a^{n-1} \equiv a \times 1[n], \text{ d'où}$$

$$a^{n-1} \equiv 1[n].$$

NB : les propriétés démontrées à la question 4 sont connues sous le nom de **petit théorème de Fermat**.

Activité 26

$$1) \text{ Justifions que : } \begin{cases} \text{ppcm}(a; b) = 105 \\ a^2 + b^2 = 666 \end{cases}$$

Soit μ_1 le 2^e entier naturel vérifiant $3\mu \equiv 2[7]$

$$\text{On a : } \text{PPCM}(a; b) = 10\mu_1 + 5$$

$$3\mu \equiv 2[7] \Leftrightarrow 3\mu \equiv 2+7[7] \Leftrightarrow 3\mu \equiv 3 \times 3[7]$$

$$\Leftrightarrow \mu \equiv 3[7]$$

$$\text{Donc } \mu = 7k+3, k \in \mathbb{Z}.$$

$k \geq 0$, on déduit que le deuxième entier naturel μ_1 est $\mu_1 = 10$.

$$\text{D'où } \text{PPCM}(a; b) = 10 \times 10 + 5 = 105$$

$$\text{Par ailleurs, } (a + b)^2 - 2ab = \mu_1^2 + 5\text{PPCM}(a; b) + 41 = 666$$

$$\text{Comme } (a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2, \text{ alors on a : } a^2 + b^2 = 666$$

$$\text{D'où } \begin{cases} \text{ppcm}(a; b) = 105 \\ a^2 + b^2 = 666 \end{cases}$$

2) Prouvons que PGCD(a; b) = 1 ou 3

Soit $\text{PGCD}(a; b) = \delta \text{ PGCD}(a'; b')$ avec

$$\text{PGCD}(a'; b') = 1$$

$$\text{On a : } \begin{cases} a = \delta a' \\ b = \delta b' \end{cases}$$

$$\text{PPCM}(a; b) \times \text{PGCD}(a; b) = a \times b$$

$$\Rightarrow \delta \text{ PPCM}(a; b) = a \times b$$

$$\Rightarrow 105 \delta = \delta^2 a' b'$$

$$\Rightarrow \delta a' b' = 105 = 1 \times 3 \times 5 \times 7$$

Il est clair que δ divise 105 et divise a et b ,
dont il divise a^2 et b^2
Par conséquent, il divise a^2+b^2
De 1, 3, 5 et 7, seuls 1 et 3 divisent $a^2+b^2 = 666$; d'où $\delta=1$ ou $\delta=3$
Soit **PGCD (a ; b) $\in \{1 ; 3\}$** .

3) Nombre de mangues et de bananes

On a : δ PPCM (a ; b) = $a \times b$

- Pour $\delta=1$, PPCM (a ; b) = $a \times b$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2ab = 210 & (1) \\ a^2 + b^2 = 666 & (2) \end{cases}$$

(1) + (2) donne :

$$(a + b)^2 = 876 \Rightarrow a + b \approx 29,6$$

(impossible)

D'où si $\delta = 1$, $N=\emptyset$

- Pour $\delta=3$, on a : $\begin{cases} 2ab = 630 \\ a^2 + b^2 = 666 \end{cases}$

$$\Rightarrow (a + b)^2 = 1296 \Rightarrow a+b=36$$

$$\Rightarrow \delta (a' + b') = 3 \times 12 \Rightarrow a' + b' = 12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a' = 1 \\ b' = 11 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a' = 5 \\ b' = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 33 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = 15 \\ b = 21 \end{cases}$$

Des deux couples, seul (a ; b) = (15 ; 21) vérifie $a^2+b^2=666$.

D'où l'ensemble solution donne :

$$\{(a; b) = (15; 21)\}.$$

4)a) Preuve

(Q) a pour équation $\frac{13}{2}x - 15y + z = 0$

Soit $13x - 30y + 2z = 0$

On a (Δ) : $\begin{cases} 2x + 9y - 2z - 6 = 0 & (1) \\ 13x - 30y + 2z = 0 & (2) \end{cases}$

(1)+(2) donne : $15x - 21y = 6$

D'où le nombre d'ananas est 6.

b) Réolvons $15x - 21y = 6$

PGCD (15 ; 21) = 3 ; 3 divise 6, donc cette équation admet de solutions.

Une solution particulière de cette équation est

$(x_0 ; y_0) = (-1 ; -1)$

Ainsi, $15x - 21y = 6$

$\Leftrightarrow 15(x+1) = 21(y+1)$

$\Leftrightarrow 5(x+1) = 7(y+1)$

$\Leftrightarrow x = 7k - 1$ et $y = 5k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$

$$S_{\mathbb{N}} = \{(x ; y) = (7k - 1 ; 5k - 1), k \in \mathbb{Z}\}$$

c) Déterminons les coordonnées entières de Ak

On a : $\begin{cases} 2x + 9y - 2z = 6 \\ 13x - 30y + 2z = 0 \end{cases}$

Donc $11x - 39y + 4z + 6 = 0$

$\Rightarrow 4z = -11x + 39y - 6$

$\Rightarrow 4z = -11(7k - 1) + 39(5k - 1) - 6$

$\Rightarrow 4z = 118k - 17$

$\Rightarrow 2z \equiv 20[59] \Rightarrow 2z \equiv 2 \times 10[59]$

$\Rightarrow z \equiv 10[59] \Rightarrow z = 59k + 10$

D'où $A_k \begin{pmatrix} 7k-1 \\ 5k-1 \\ 59k+10 \end{pmatrix}$

5) Déterminons le bénéfice réalisé par Sonia

Le nombre de clients est $x = 7k - 1$

On a $x > 0$. Le plus petit nombre de clients possibles est le premier entier naturel vérifiant $7k - 1 > 0$.

On trouve $x = 6$, soit $k = 1$

On $y = 5k - 1 \Rightarrow y = 4$

Le bénéfice réalisé par Sonia ce jour est donc **400FCFA**.

Activité 29

1.a) Calculons :

$$\Rightarrow (1 + \sqrt{6})^2 = 7 + 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow (1 + \sqrt{6})^4 = 73 + 28\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow (1 + \sqrt{6})^6 = 847 + 342\sqrt{6}$$

b) Appliquons l'algorithme d'Euclide à 847 et 342.

En appliquant l'algorithme d'Euclide à 847 et à 342, on trouve $\text{pgcd}(847; 342) = 1$.

On en déduit que 847 et 342 sont premiers entre eux.

2.a) Valeur de a_1 et b_1

$$(1 + \sqrt{6})^n = a_n + b_n\sqrt{6}.$$

$$\text{Donc } (1 + \sqrt{6})^1 = a_1 + b_1\sqrt{6}.$$

On déduit de ce qui précède que **$a_1 = 1$ et $b_1 = 1$.**

b) Autres valeurs de a_n et b_n .

De 1.a), on déduit que :

$$a_2 = 7 \text{ et } b_2 = 2; a_4 = 73 \text{ et } b_4 = 28;$$

$$a_6 = 847 \text{ et } b_6 = 342.$$

c) Calculons a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

$$(1 + \sqrt{6})^n = a_n + b_n\sqrt{6}, \text{ donc } (1 + \sqrt{6})^n \times$$

$$(1 + \sqrt{6}) = (1 + \sqrt{6})(a_n + b_n\sqrt{6})$$

$$\Rightarrow (1 + \sqrt{6})^{n+1} = (a_n + 6b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{6}$$

$$\text{Or } (1 + \sqrt{6})^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{6}$$

$$\text{D'où } a_{n+1} = a_n + 6b_n \text{ et } b_{n+1} = a_n + b_n$$

3.a) Démonstration

$$\text{On a : } a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_n + 7b_n$$

$$= 2(a_n + b_n) + 5b_n$$

Si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors il ne divise pas $2(a_n + b_n) + 5b_n$.

Il est clair que 5 divise $5b_n$. Puisqu'il ne divise pas $2(a_n + b_n)$, alors il ne peut en aucun cas diviser $2(a_n + b_n) + 5b_n$.

Soit si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1} + b_{n+1}$.

b) Dédution.

Nous allons raisonner par récurrence.

$\Rightarrow$ Pour $n = 1$, $a_n = 1$ et $b_n = 1$.

$$a_1 + b_1 = 2.$$

5 ne divise pas 2 dans $\mathbb{Z}$. La relation est alors vraie au premier rang.

$\Rightarrow$ Supposons maintenant que 5 ne divise pas $a_n + b_n$ et démontrons que 5 ne divise pas $a_{n+1} + b_{n+1}$.

De ce qui précède, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1} + b_{n+1}$. La relation est alors vraie à l'ordre $n + 1$ pour tout entier naturel n non nul.

En conclusion, la relation est vraie pour tout entier naturel n non nul.

5 ne divise donc pas $a_n + b_n$.

4.a) Démonstration

$$a_n + 6b_n = (a_n + b_n) + 5b_n, \text{ donc}$$

$$\text{pgcd}(a_n + 6b_n; a_n + b_n) = \text{pgcd}(a_n + b_n; 5b_n)$$

5 ne divise pas $a_n + b_n$, donc

$$\text{pgcd}(a_n + b_n; 5b_n) = \text{pgcd}(a_n + b_n; b_n)$$

$$= \text{pgcd}(a_n; b_n)$$

Si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors

$$\text{pgcd}(a_n; b_n) = 1 \text{ ie } \text{pgcd}(a_n + 6b_n;$$

$$a_n + b_n) = 1$$

$$\text{Soit } \text{pgcd}(a_{n+1}; b_{n+1}) = 1.$$

En conséquence, si a_n et b_n sont premiers entre eux alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux.

b) Dédution

$\Rightarrow$ On a : $a_1 = 1$ et $b_1 = 1$.

a_1 et b_1 sont premiers entre eux.

$\Rightarrow$ Comme de plus si a_n et b_n sont premiers entre eux alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux, on conclut que a_n et b_n sont premiers entre eux pour tout entier naturel non nul.

Séquence 3 : Nombres complexes

Activité 1**Déterminons l'ensemble des points M**

$$1) |Z+2+i|=|3Z-9+3i|$$

$$\Rightarrow |z - (-2 - i)| = |3(z - (3 - i))|$$

$$\text{Posons : } z_A = -2 - i \text{ et } z_B = 3 - i$$

$$\text{On a : } |z - z_A| = 3|z - z_B|$$

$$\Rightarrow AM = 3BM.$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{BM} = 3$$

$$\text{Soit } I = \text{bar}\{(A,1); (B,3)\} \text{ et}$$

$$J = \text{bar}\{(A,1); (B,-3)\}$$

L'ensemble cherché est le cercle de diamètre IJ.

$$2) \left| \frac{\bar{z}-2+i}{z+5-2i} \right| = 1$$

$$\Rightarrow |\bar{z} - 2 + i| = |z + 5 - 2i|$$

$$\text{Posons : } z = x + iy; (x; y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{On a : } |x - iy - 2 + i| = |x + iy + 5 - 2i|$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (1-y)^2 = (x+5)^2 + (y-2)^2$$

$$\Rightarrow 7x - y + 12 = 0$$

L'ensemble cherché est la droite d'équation $7x - y + 12 = 0$.

$$3) |Z+\bar{Z}-1|=5$$

En posant $z = x + iy; (x; y) \in \mathbb{R}^2$, on trouve $x = 3$ ou $x = -2$.

L'ensemble cherché est $D_1 \cup D_2$ avec D_1 la droite d'équation $x = 3$ et D_2 la droite d'équation $x = -2$.

$$5) |(1-i)Z-2i|=|Z+2+3i|$$

$$\Rightarrow \left| (1-i) \left[z - \frac{2i}{1-i} \right] \right| = |z - (-2-3i)|$$

$$\Rightarrow |(1-i)| \cdot |z + 1 - i| = |z - (-2-3i)|$$

$$\text{Posons : } E(-1+i) \text{ et } F(-2-3i)$$

$$\text{On a : } \sqrt{2}|z - z_E| = |z - z_F|$$

$$\Rightarrow \frac{EM}{FM} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Soit } H = \text{bar}\{(E, 1); (F, \frac{1}{\sqrt{2}})\} \text{ et}$$

$$K = \text{bar}\{(E, 1); (F, -\frac{1}{\sqrt{2}})\}$$

L'ensemble cherché est le cercle de diamètre HK.

$$6) \arg(3i-Z) \equiv 0[2\pi]$$

$$\Rightarrow 3i - z = k, k \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{Posons : } z = x + iy; (x; y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{On a : } -x + i(3-y) = k$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = k \\ 3-y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -k \\ y = 3 \end{cases}$$

On a donc $x < 0$. L'ensemble cherché est la demi-droite définie par : $\begin{cases} x < 0 \\ y = 3 \end{cases}$.

$$7) \arg\left(\frac{1}{z+2}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z+2} = ki, k \in \mathbb{R}_+^*.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+iy+2} = ki$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{(x+2)^2+y^2} - i \frac{y}{(x+2)^2+y^2} = ki$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2 = 0 \\ (x+2)^2 + y^2 \neq 0 \\ -y = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ (x; y) \neq (-2; 0) \\ y \neq 0 \end{cases}$$

L'ensemble cherché est donc la droite d'équation $x = -2$ privée du point $G(-2; 0)$.

$$8) \arg(Z^2-4) \equiv \arg(Z+2)[2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z^2-4) - \arg(z+2) \equiv 0[2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z^2-4}{z+2}\right) \equiv 0[2\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{z^2-4}{z+2} = k, k \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\Rightarrow z-2 = k \Rightarrow x-2+iy = k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2 = k \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k+2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

L'ensemble cherché est la demi-droite définie par : $\begin{cases} x > 2 \\ y = 0 \end{cases}$.

Activité 2**Détermination et représentation des ensembles.**

$$Z = \frac{2iz-5}{z-2i}$$

Posons : $z = x + iy; (x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{On a : } Z = \frac{2i(x+iy)-5}{x+iy-2i}$$

On trouve :

$$Z = -\frac{9x}{x^2+(y-2)^2} + i \frac{2x^2+2y^2+y-10}{x^2+(y-2)^2}$$

a) $Z \in \mathbb{R}_+^*$

$$\text{On a donc : } \begin{cases} \operatorname{Re}(Z) \in \mathbb{R}_+^* \\ \operatorname{Im}(Z) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -9x > 0 \\ x^2 + (y-2)^2 \neq 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + y - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ (x; y) \neq (0; 2) \\ x^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 \end{cases}$$

L'ensemble cherché est le demi-cercle défini

$$\text{par : } \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 \end{cases}.$$

b) $Z \in \mathbb{R}_-^*$

On déduit de ce qui précède que l'ensemble cherché est le demi-cercle défini par :

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 \end{cases}.$$

c) $Z \in i\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -9x = 0 \\ x^2 + (y-2)^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x; y) \neq (0; 2) \end{cases}$$

L'ensemble cherché est la droite d'équation $x = 0$ privée du point $J(0; 2)$.

d) $Z \in i\mathbb{R}^*$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = 0 \\ \operatorname{Im}(z) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -9x = 0 \\ (x; y) \neq (0; 2) \\ 2x^2 + 2y^2 + y - 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x; y) \neq (0; 2) \end{cases}$$

L'ensemble cherché est la droite définie par :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y \neq 2 \end{cases}$$

e) $|Z| = 1$

$$\text{On a : } \left| \frac{2iz-5}{z-2i} \right| = 1 \Leftrightarrow |2iz-5| = |z-2i|$$

$$\Leftrightarrow \left| 2i \left(z - \frac{5}{2i} \right) \right| = |z-2i|$$

$$\Leftrightarrow 2|z - z_A| = |z - z_B| \text{ (avec } z_A = \frac{5}{2i} \text{ et}$$

$$z_B = 2i)$$

$$\Leftrightarrow 2AM = BM$$

$$\Leftrightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$$

L'ensemble cherché est le cercle de diamètre

$$IK \text{ où } I = \overline{\operatorname{bar}}\{(A, 1); (B, \frac{1}{2})\} \text{ et } K = \overline{\operatorname{bar}}\{(A, 1); (B, -\frac{1}{2})\}.$$

f) $|Z| = 4$

$$|2iz-5| = 4|z-2i|$$

$$\Leftrightarrow 2AM = 4BM$$

$$\Leftrightarrow \frac{AM}{BM} = 2$$

L'ensemble cherché est le cercle de diamètre

$$GH \text{ où } G = \overline{\operatorname{bar}}\{(A, 1); (B, 2)\} \text{ et}$$

$$H = \overline{\operatorname{bar}}\{(A, 1); (B, -2)\}.$$

Activité 3**Partie A****Forme trigonométrique des nombres complexes suivants :**

$$\text{a) } z = -1 + i\sqrt{3}$$

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\text{Soit } \theta = \operatorname{Arg}(z)$$

On a : $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$; prenons $\theta = \frac{2\pi}{3}$

D'où $\boxed{z = 2 \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right]}$

b) $z = -\sqrt{6} - i\sqrt{2}$

$|z| = 2\sqrt{2}$

Soit $\alpha = \text{Arg}(z)$

On a : $\begin{cases} \cos\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \end{cases}$; prenons

$\alpha = -\frac{5\pi}{6}$

On a : $\boxed{z = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \right]}$

c) $z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

On a : $z^2 = -2\sqrt{3} - 2i$ et $|z^2| = 4$, donc $|z| = 2$.

Soit $\theta = \text{Arg}(z^2)$

On a : $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$; prenons $\theta = -\frac{5\pi}{6}$

Comme $\text{Arg}(z^2) = 2\text{Arg}(z)$, alors

$\text{Arg}(z) = \frac{\text{Arg}(z^2)}{2} = -\frac{5\pi}{12}$

Ainsi, on a :

$\boxed{z = 2 \left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \right]}$

d) $z = (1 - i)e^{i\frac{\pi}{6}}$

$|z| = |1 - i| \times \left| e^{i\frac{\pi}{6}} \right| = \sqrt{2}$

$\text{Arg}(z) = \text{Arg}(1 - i) + \text{Arg}(e^{i\frac{\pi}{6}})$
 $= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{12}$

D'où $\boxed{z = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) \right]}$

e) $z = 1 + e^{i\frac{3\pi}{8}}$

On a : $1 + e^{i\frac{3\pi}{8}} = 1 + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

$= 1 + \cos\left(2 \times \frac{3\pi}{16}\right) + i \sin\left(2 \times \frac{3\pi}{16}\right)$

Or $\begin{cases} \cos\left(2 \times \frac{3\pi}{16}\right) = 2\cos^2\left(\frac{3\pi}{16}\right) - 1 \\ \sin\left(2 \times \frac{3\pi}{16}\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{16}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{16}\right) \end{cases}$

Donc

$1 + e^{i\frac{3\pi}{8}} = 2\cos^2\left(\frac{3\pi}{16}\right) + 2i \sin\left(\frac{3\pi}{16}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{16}\right)$
 $= 2\cos\left(\frac{3\pi}{16}\right) \left[\cos\left(\frac{3\pi}{16}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{16}\right) \right]$

On a $\cos\left(\frac{3\pi}{16}\right) > 0$, d'où la forme

trigonométrique de z est :

$\boxed{z = 2\cos\left(\frac{3\pi}{16}\right) \left[\cos\left(\frac{3\pi}{16}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{16}\right) \right]}$

f) $z = 1 - e^{i\frac{3\pi}{8}}$

On a : $1 - e^{i\frac{3\pi}{8}} = 1 - \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) - i \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$
 $= 2 - 2\cos^2\left(\frac{3\pi}{16}\right) - 2i \sin\left(\frac{3\pi}{16}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{16}\right)$
 $= 2 \left(1 - \cos^2\left(\frac{3\pi}{16}\right) \right) - 2i \sin\left(\frac{3\pi}{16}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{16}\right)$
 $= 2\sin^2\left(\frac{3\pi}{16}\right) - 2i \sin\left(\frac{3\pi}{16}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{16}\right)$
 $= 2i \sin\left(\frac{3\pi}{16}\right) e^{i\frac{3\pi}{16}}$

On déduit que : $|1 - e^{i\frac{3\pi}{8}}| = 2\sin\left(\frac{3\pi}{16}\right)$

$\text{Arg}\left(1 - e^{i\frac{3\pi}{8}}\right) = \text{Arg}\left(-2i \sin\left(\frac{3\pi}{16}\right)\right) + \frac{3\pi}{16}$
 $= -\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{16} = -\frac{5\pi}{16}$

D'où

$\boxed{z = 2\sin\left(\frac{3\pi}{16}\right) \left[\cos\left(-\frac{5\pi}{16}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{16}\right) \right]}$

Partie B

1.) Forme trigonométrique de z_1 et de z_2

On trouve :

$\boxed{z_1 = 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]}$

et

$\boxed{z_2 = 2 \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]}$

2.) Forme algébrique de Z_3

$$Z_3 = \frac{Z_1}{Z_2}$$

On trouve
$$Z_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Forme trigonométrique de z_3

On a : $Z_3 = \frac{Z_1}{Z_2}$ donc $|Z_3| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$ et

$$\text{Arg}(Z_3) = \text{Arg}(Z_1) - \text{Arg}(Z_2)$$

On trouve :

$$Z_3 = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right]$$

Valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

On a :
$$\begin{cases} Z_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ Z_3 = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right] \end{cases} \quad (1)$$

De (2), on a :
$$\begin{cases} \text{Re}(z_3) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) \\ \text{Im}(z_3) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \end{cases}$$

Par identification à (1), on a :

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{2} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

On déduit que :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

3) Donnons la forme algébrique de Z_4 et de Z_5

$$-\sqrt{3} + i = 2 \left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right]$$

$$\text{Donc } Z_4 = 2^5 \left[\cos\left(\frac{25\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{25\pi}{6}\right) \right]$$

$$\text{Soit } Z_4 = 16\sqrt{3} + 16i.$$

$$\text{De même, on trouve } Z_5 = 4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2}.$$

4.) Calculons Z_6 et Z_7

$$Z_6 = \frac{Z_4^3}{Z_5^2}$$

On calcule et on trouve : $Z_6 = -2^9$

$$Z_7 = Z_4^3 \times Z_5^5$$

$$\text{Donc } |Z_7| = |Z_4|^3 \times |Z_5|^5 = 32^3 \times 8^5 = 2^{30}$$

$$\text{Arg}(Z_7) = 3\text{Arg}(Z_4) + 5\text{Arg}(Z_5) = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Donc } Z_7 = 2^{30} \left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right]$$

$$\text{Soit } Z_7 = -2^{29}\sqrt{2}(1+i)$$

5.) Calculons z^{2016}

$$|z| = |2i| \times |\sqrt{2} + i\sqrt{2}| = 4$$

$$\begin{aligned} \arg(z) &= \arg(2i) + \arg(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) + 2k\pi, \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\arg(z) = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} z^{2016} &= 4^{2006} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]^{2006} \\ &= 4^{2006} \left[\cos\left(\frac{3009\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3009\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{On trouve } z^{2016} = 4^{2006}i$$

Déterminons n

$$\text{On a : } 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \text{ donc}$$

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$$

$(1+i)^n$ serait un réel négatif si et seulement

$$\text{si } \frac{n\pi}{4} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n = 4(2k+1), k \in \mathbb{Z}$$

Comme $n \in \mathbb{IN}$, alors $n = 4(2k+1), k \in \mathbb{IN}$.

Activité 5**1.a) Donnons une interprétation géométrique du module et un argument de u .**

On munit le plan du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

♣ Le module de u est la distance OM où M est le point d'affixe u .

♣ Un argument de u est l'une des quelconques mesures de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

b) Forme exponentielle de u

$$|u| = 2 \text{ et } \text{Arg}(u) = -\frac{5\pi}{6}$$

$$\text{D'où } \boxed{u = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}}$$

2.) Démontrons que :

$$\Leftrightarrow 1 + e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\theta}$$

$$\text{On a : } 1 + e^{i\theta} = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$$

$$= 1 + \cos\left(2 \times \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(2 \times \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\text{Or } \begin{cases} 1 + \cos\left(2 \times \frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(2 \times \frac{\theta}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

$$\text{Donc } 1 + e^{i\theta} = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$\text{D'où } 1 + e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\theta}.$$

On démontre de la même manière que :

$$1 - e^{i\theta} = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\theta}.$$

3.a) Forme Trigonométrique de v

$$v = 2 + u = 2 + 2e^{-i\frac{5\pi}{6}} = 2(1 + e^{-i\frac{5\pi}{6}})$$

On déduit de ce qui précède que

$$v = 4\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)e^{-i\frac{5\pi}{12}}.$$

Comme $\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) > 0$, alors

$$\boxed{v = 4\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]}$$

b) Valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

On a :

$$\begin{cases} v = 2 - \sqrt{3} - i \\ v = 4\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right] \end{cases}$$

$$\text{On en déduit que : } \begin{cases} 4\cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3} \\ 4\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = -1 \end{cases}$$

$$\text{D'où } \boxed{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$$

4.) Déterminons n

$$v^{2017n} = \left[4\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]^{2017n} \left[\cos\left(-\frac{5\pi n}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi n}{12}\right)\right]$$

$$v^{2017n} \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(-\frac{5\pi n}{12}\right) = 0 \\ \sin\left(-\frac{5\pi n}{12}\right) \neq 0 \end{cases}$$

$$\cos\left(-\frac{5\pi n}{12}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{5\pi n}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 5n = 12k + 6 \Leftrightarrow 5n \equiv 6[12]$$

$$\Leftrightarrow 5n \equiv 30[12] \Leftrightarrow 5n \equiv 5 \times 6[12]$$

$$\Leftrightarrow n \equiv 6[12] \Leftrightarrow n = 12p + 6, p \in \mathbb{Z}$$

Comme pour $n = 12p + 6$, $\sin\left(-\frac{5\pi n}{12}\right) \neq 0$,
alors les entiers naturels cherchés sont :

$$\boxed{n = 12p + 6, p \in \mathbb{N}}$$

5) Déterminons les entiers naturels n pour que v^n soit un nombre réel non nul.

$$v^n = \left[4\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]^n \left[\cos\left(-\frac{5\pi n}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi n}{12}\right)\right]$$

$$v^n \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(-\frac{5\pi n}{12}\right) \neq 0 \\ \sin\left(-\frac{5\pi n}{12}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\sin\left(-\frac{5\pi n}{12}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{5\pi n}{12} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 5n = 12k \Leftrightarrow 5n \equiv 0[12] \Leftrightarrow 5n \equiv 60[12]$$

$$\Leftrightarrow 5n \equiv 5 \times 12[12] \Leftrightarrow n \equiv 12[12]$$

$$\text{Soit } n \equiv 0[12] \text{ ie } n = 12t, t \in \mathbb{Z}$$

Comme pour $n = 12t$, $\cos\left(-\frac{5\pi n}{12}\right) \neq 0$, alors les entiers relatifs recherchés sont :
 $n = 12t, t \in \mathbb{Z}$.

Activité 9

1.) Démonstration

On a : $P(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i-11)z - 3(4i+12)$.

Posons : $z_1 = a, a \in \mathbb{R}$

$$P(z_1) = a^3 - 22a - 36 + 3i(3a^2 + 4a - 4)$$

z_1 est solution de $P(z) = 0$ si et seulement si

$$P(z_1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 22a - 36 = 0 \\ 3a^2 + 4a - 4 = 0 \end{cases}$$

Les solutions de l'équation $3a^2 + 4a - 4 = 0$

sont : $a = -2$ ou $a = \frac{2}{3}$.

De ces deux racines, seule -2 vérifie

l'équation $a^3 - 22a - 36 = 0$.

Ainsi, la seule racine réelle de $P(z)$ est

$$z_1 = -2.$$

2) Déterminons un polynôme $Q(z)$ tel que :

$$P(z) = (z - z_1)Q(z).$$

De ce qui précède, il existe un polynôme $Q(z)$

tel que $P(z) = (z - z_1)Q(z)$ ie $P(z) = (z + 2)Q(z)$

Avec $\deg Q = \deg(P - 1) = 2$, donc $Q(z)$ est de la forme $az^2 + bz + c$.

Pour trouver $Q(z)$, on peut effectuer la division euclidienne de $P(z)$ par $z + 2$ ou développer $P(z) = (z + 2)(az^2 + bz + c)$ et procéder par la suite à une identification.

L'une ou l'autre des deux méthodes donne :

$$Q(z) = z^2 + (9i - 2)z - 6(3 + i)$$

3) Démontrons que l'équation $Q(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_2 .

$$\Delta = (9i - 2)^2 - 4 \times [-6(3 + i)] = -5 - 12i$$

Cherchons δ tel que $\delta^2 = -5 - 12i$

Posons : $\delta = x + iy; (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$|-5 - 12i| = 13$$

$$\delta^2 = -5 - 12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{-2; 2\} \\ y \in \{-3; 3\} \\ xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (-2; 3) \text{ ou } (2; -3)$$

Prenons : $\delta = 2 - 3i$

Les solutions de $Q(z) = 0$ sont donc :

$$\frac{-(9i-2)-(2-3i)}{2} = -3i \text{ et } \frac{-(9i-2)+(2-3i)}{2} = 2-6i$$

L'équation $Q(z) = 0$ admet donc une solution imaginaire pure $z_2 = -3i$.

4) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z + 2)Q(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow z + 2 = 0 \text{ ou } Q(z) = 0$$

De tout ce qui précède, on déduit que les solutions de $P(z) = 0$ sont :

$$\boxed{-3i; -2; -6i + 2}$$

5.) Démonstration

Notons A le point d'affixe $z_1 = -2$, B le point d'affixe $z_2 = -3i$ et $z_3 = -6i + 2$.

Calculons : $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{-6i + 2 + 2}{-3i + 2} = 2; 2 \in \mathbb{R}^*, \text{ d'où les points}$$

A, B et C sont alignés.

Activité 11

1.) Démonstration

Soit $a \in \mathbb{R}$

$$P(a) = a^3 + 5a^2 + 4a + 20 + i(-2a^2 - 22a - 60)$$

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + 5a^2 + 4a + 20 = 0 \\ -2a^2 - 22a - 60 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + 5a^2 + 4a + 20 = 0 \quad (1) \\ a^2 + 11a + 30 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Les solutions de l'équation (2) sont : -6 et -5 .

De ces deux racines, seule -5 vérifie l'équation (1). On déduit que $P(z)$ admet une racine réelle $a = -5$.

2.) Déterminons $Q(z)$

$P(z) = (z+5)Q(z)$ avec $Q(z) = az^2 + bz + c$ où a, b et c sont des nombres complexes et a non nul.

$$\frac{P(z)}{z+5} = z^2 - 2iz + 4 - 12i$$

$$\text{D'où } \boxed{Q(z) = z^2 - 2iz + 4 - 12i}$$

$$\text{3.a) } (4+6i)^2 = -20 + 48i$$

b) Résolvons $Q(z) = 0$

$$\Delta = -20 + 48i = (4 + 6i)^2$$

$$\text{On a donc } z = \frac{2i-4-6i}{2} = -2 - 2i \text{ ou}$$

$$z = \frac{2i+4+6i}{2} = 2 + 4i$$

Les solutions de cette équation sont donc :

$$\boxed{-2 - 2i; 2 + 4i}$$

c) Résolvons $P(z) = 0$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z + 5 = 0 \text{ ou } Q(z) = 0.$$

On déduit de tout ce qui précède que les solutions de $P(z) = 0$ sont :

$$\boxed{-5; -2 - 2i; 2 + 4i}$$

4.a) Démonstration

$$\overrightarrow{Z_{KL}} = z_2 - z_1 = -4 - 6i$$

$$\overrightarrow{Z_{NM}} = z_3 - z_4 = -4 - 6i$$

$$\text{On a ainsi } \overrightarrow{Z_{KL}} = \overrightarrow{Z_{NM}}, \text{ donc } \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$$

On en déduit que KLMN est un parallélogramme. (1)

KL et LM sont deux cotés consécutifs du quadrilatère KLMN.

$$\frac{z_K - z_L}{z_M - z_L} = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{4 + 6i}{-3 + 2i} = -2i$$

$$-2i \in i\mathbb{R}, \text{ donc } (KL) \perp (LM). \quad (2)$$

De (1) et (2), on conclut que KLMN est un rectangle.

b) Déterminons une équation cartésienne de (Γ) .

(Γ) est un cercle circonscrit au rectangle KLMN, donc un diamètre de (Γ) est le segment $[MK]$. Alors, le centre I de (Γ) a pour affixe $z_I = \frac{z_M + z_K}{2} = -\frac{3}{2} + 2i$ et le rayon de

$$(\Gamma) \text{ est } R = \frac{MK}{2}.$$

$$R = \frac{|z_K - z_M|}{2} = \frac{\sqrt{65}}{2}$$

$$\text{D'où } \boxed{(\Gamma) : \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{65}{4}}$$

Activité 12

1.) Résolvons $P(z) = 0$

$$P(z) = z^2 - 2z + 5$$

$$\Delta = -16 = (4i)^2$$

$$\text{On a : } z = 1 - 2i \text{ ou } z = 1 + 2i$$

L'ensemble solution est :

$$\boxed{\{1 - 2i; 1 + 2i\}}.$$

Résolvons $Q(z) = 0$

$$Q(z) = z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3}$$

$$\Delta = (2i)^2$$

$$\text{On déduit que } z = 1 + \sqrt{3} - i \text{ ou } z = 1 + \sqrt{3} + i.$$

L'ensemble solution de $Q(z) = 0$ est donc :

$$\boxed{\{1 + \sqrt{3} - i; 1 + \sqrt{3} + i\}}.$$

2.a) Placer les points A, B, C et D dans le repère.

b) Positions relatives des droites (AB) et (BD)

$$\frac{z_A - z_B}{z_D - z_B} = -i \frac{\sqrt{3}}{3}; -i \frac{\sqrt{3}}{3} \in i\mathbb{R}, \text{ donc le triangle}$$

ABD est rectangle en B. En conséquence, les droites (AB) et (BD) sont perpendiculaires.

c) Preuve

Le triangle ABC est rectangle en B, donc les points A, B et C appartiennent à un cercle de centre le milieu de $[AD]$. On démontre de

même que le triangle ACD est rectangle en C, c'est la preuve que les points A, C et D appartiennent à un même cercle de centre le milieu de [AD].

Il en convient que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle de centre le milieu de [AD] ; ils sont donc cocycliques.

NB : on peut également calculer :

$\frac{z_A - z_B}{z_D - z_B}$ et $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ et trouver un réel non nul pour tirer la même conclusion.

Précisons le centre et le rayon de (c)

Le centre I de ce cercle est le point I milieu de [AD]. On a : $I(1 ; 0)$ et le rayon r est $r = \frac{AD}{2} = 2$.

3.a) Résolvons $R(z) = 0$

$$R(z) = z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta$$

$$\Delta = -16(1 - \cos^2\theta) = -16\sin^2\theta$$

$$\Delta = (4i\sin\theta)^2$$

On déduit que les solutions de $R(z) = 0$ sont : $\{1 + 2e^{-i\theta}; 1 + 2e^{i\theta}\}$.

b) Montrons que les images des solutions appartiennent au cercle (c).

(c) a pour équation : $(x - 1)^2 + y^2 = 4$.
Soit $H(1 + 2e^{-i\theta})$.

On a : $H(1 + 2\cos\theta; -2\sin\theta)$
 $H \in (c) \Leftrightarrow (x_H - 1)^2 + y_H^2 = 4$
 $(x_H - 1)^2 + y_H^2 = (1 + 2\cos\theta - 1)^2 + (-2\sin\theta)^2 = 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta$
 $= 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta = 4(\cos^2 + \sin^2\theta) = 4$
 Ainsi, on a : $(x_H - 1)^2 + y_H^2 = 4$, d'où $H \in (c)$.

On démontre de même que le point G d'affixe $1 + 2e^{i\theta}$ appartient à (c).

Activité 13

1.) Démonstration

$$P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1, z \in \mathbb{C}.$$

z_0 est solution de $P(z) = 0$ si et seulement si :

$$z_0^4 - 3z_0^3 + \frac{9}{2}z_0^2 - 3z_0 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{z_0^4 - 3z_0^3 + \frac{9}{2}z_0^2 - 3z_0 + 1} = \overline{0}$$

$$\Leftrightarrow \overline{z_0}^4 - 3\overline{z_0}^3 + \frac{9}{2}\overline{z_0}^2 - 3\overline{z_0} + 1 = 0$$

Soit $\overline{z_0}$ est solution de $P(z) = 0$.

On démontre de même que $\frac{1}{z_0}$ est solution de $P(z) = 0$.

2.a) Calculons $P(1 - i)$

On trouve $P(1 - i) = 0$.

b) Dédution

$1 - i$ est solution de $P(z) = 0$, donc

$\overline{1 - i} = 1 + i$ et $\frac{1}{1 - i} = \frac{1 + i}{2}$ sont solutions de $P(z) = 0$.

Ainsi, on a : $P(z) = (z - 1 + i)(z - 1 - i)(z - \frac{1 + i}{2})(z - a)$

$$P(z) = z^4 + \left(\frac{-5 - 2a - i}{2}\right)z^3 + \left(\frac{5a + ai + 6 + 2i}{2}\right)z^2 + (-3a - 1 - ai - i)z + a(1 + i)$$

Par identification, on a : $a = \frac{1 - i}{2}$

D'où l'ensemble solution de $P(z) = 0$ est :

$$\boxed{1 - i; 1 + i; \frac{1 + i}{2}; \frac{1 - i}{2}}$$

3.a) Le triangle ABC est un triangle

quelconque car $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = 4 - 4i$ et $4 - 4i \notin i\mathbb{R}^*$.

b) Equation cartésienne du cercle (c) circonscrit à ABC.

L'équation cartésienne de (c) est de la forme :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\clubsuit A \in (c) \Rightarrow 1^2 + (-1)^2 + a(1) + b(-1) + c = 0$$

$$\Rightarrow a - b + c + 2 = 0$$

$$\clubsuit B \in (c) \Rightarrow 1^2 + 1^2 + a(1) + b(1) + c = 0$$

$$\Rightarrow a + b + c + 2 = 0$$

$$\clubsuit C \in (c) \Rightarrow a + b + 2c + 1 = 0$$

Ainsi, on a le système :

$$\begin{cases} a - b + c + 2 = 0 \\ a + b + c + 2 = 0 \\ a + b + 2c + 1 = 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système par la méthode du pivot de Gauss, on trouve : $a = -3$, $b = 0$ et $c = 1$.

D'où $\boxed{(c): x^2 + y^2 - 3x + 1 = 0}$

Activité 15

1) Déterminons les nombres complexes z_1, z_2 et z_3

On a : i) $\begin{cases} |z_2| = 2|z_1| \\ |z_3| = 2|z_2| \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{z_2}{z_1} \right| = 2 \\ \left| \frac{z_3}{z_2} \right| = 2 \end{cases} \Rightarrow \left| \frac{z_3}{z_1} \right| = \left| \frac{z_3}{z_2} \right| \cdot \left| \frac{z_2}{z_1} \right| = 4 \quad (1)$$

ii) $\begin{cases} \arg(z_2) = \arg(z_1) + \frac{\pi}{2} \\ \arg(z_3) = \arg(z_2) + \frac{\pi}{2} \\ 0 < \arg(z_1) < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \frac{\pi}{2} \\ \arg\left(\frac{z_3}{z_2}\right) = \frac{\pi}{2} \\ 0 < \arg(z_1) < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \arg\left(\frac{z_3}{z_2}\right) \quad (2)$$

De (1) et (2), on déduit que :

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_3}{z_2} \Rightarrow z_2^2 = z_1 \times z_3$$

iii) $z_1 \times z_2 \times z_3 = 64i$

Or $z_2^2 = z_1 \times z_3$, donc $z_2^3 = z_1 \times z_2 \times z_3 = 64i$.

Déterminons les racines cubiques de $64i$

Les racines cubiques de $64i$ sont les nombres complexes z_k définis par :

$$z_k = \sqrt[3]{64} e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right)} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2\}$$

☞ Pour $k = 0, z_k = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

☞ Pour $k = 1, z_k = 2i$

☞ Pour $k = 2, z_k = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Ainsi, $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ou $2i$ ou $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

On a : $\arg(z_1) = \arg(z_2) - \frac{\pi}{2}$

♠ Si $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}, \arg(z_1) = -\frac{\pi}{6}$

♠ Si $z_2 = 2i, \arg(z_1) = 0$

♠ Si $z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}, \arg(z_1) = \frac{\pi}{3}$

Or $0 < \arg(z_1) < \frac{\pi}{2}$, donc nous retenons

$$\boxed{z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

$|z_2| = 2$ et donc $|z_1| = 1$,

D'où $\boxed{z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}}$

$|z_3| = 2 \times 2 = 4$ et $\arg(z_3) = \arg(z_2) + \frac{\pi}{2}$
 $= \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3}$

Soit $\arg(z_3) = -\frac{2\pi}{3}$

D'où $\boxed{z_3 = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$

2.) Forme algébrique de Z

$$Z = \frac{z_3}{z_2} = \frac{4e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{2e^{i\frac{5\pi}{6}}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$$

On a donc $\boxed{Z = 2i}$

$$Z^{2016} = (2i)^{2016} = 2^{2016} \times i^{2016}$$

Soit $\boxed{Z^{2016} = 2^{2016}}$ car $i^{2016} = 1$.

3.) Déterminons n

$$Z^n = 2^n \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right]$$

$$Z^n \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

Par suite, le plus petit entier naturel n tel que Z^n soit imaginaire pur est $n = 1$.

Activité 16

1.a) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

$$(E) : Z^6 - (1-i)Z^3 - i = 0$$

$$\text{Soit } P(Z) = Z^6 - (1-i)Z^3 - i$$

$$P(Z) = 0 \Leftrightarrow Z^6 - (1-i)Z^3 - i = 0.$$

$$\text{Posons : } X = Z^3$$

$$\text{On a : } X^2 = Z^6$$

$$\text{L'équation devient : } X^2 - (1-i)X - i = 0$$

$$\Delta = 2i = (1+i)^2$$

$$\text{On déduit que } X = -i \text{ ou } X = 1.$$

$$\text{Soit } X = -i$$

$$\text{On a alors } Z^3 = -i$$

$$\text{Donc } Z = e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ ou } Z = e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{ ou } Z = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\text{Soit } X = 1$$

$$\text{On a } Z^3 = 1, \text{ donc } Z = 1 \text{ ou } Z = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ ou}$$

$$Z = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

L'ensemble solution est donc :

$$\left\{ e^{-i\frac{\pi}{6}}; e^{-i\frac{\pi}{2}}; e^{-i\frac{5\pi}{6}}; 1; e^{i\frac{2\pi}{3}}; e^{-i\frac{2\pi}{3}} \right\}$$

b) Plaçons dans le plan complexe les points images des solutions de (E)

Indication

Pour représenter par exemple $e^{-i\frac{5\pi}{6}}$, on prend son rapporteur et on mesure $-\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$ par rapport à l'axe des abscisses. Par la suite, on place le point à 1 cm de l'origine du repère, étant donné que $\left| e^{-i\frac{5\pi}{6}} \right| = 1$.

On procède de la même manière pour les autres.

NB : on peut cependant utiliser aussi leur forme algébrique.

2.a) Résolvons (E') dans $\mathbb{C}$.

$$(E') : \left(\frac{2z+1}{z-1} \right)^4 = 1$$

Les racines quatrièmes de 1 sont :

$$1; -1; i; -i.$$

$$\text{Ainsi, on a : } \frac{2z+1}{z-1} = 1 \text{ ou } \frac{2z+1}{z-1} = -1 \text{ ou}$$

$$\frac{2z+1}{z-1} = i \text{ ou } \frac{2z+1}{z-1} = -i.$$

$$\text{On trouve } z = -2 \text{ ou } z = 0 \text{ ou } z = \frac{-1-3i}{5} \text{ ou}$$

$$z = \frac{-1+3i}{5}.$$

L'ensemble solution est donc :

$$\left\{ -2; 0; \frac{-1-3i}{5}; \frac{-1+3i}{5} \right\}$$

b) On démontrera que les points A, O, B et C sont cocycliques par calcul. Il faut déterminer ensuite l'équation cartésienne de ce cercle en trouvant les réels a, b et c de son équation cartésienne de la forme : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ comme nous l'avons fait dans l'activité 11 (par la méthode du pivot de Gauss).

Séquences 4 & 5 : Limites-Continuité-Dérivabilité-Etude de fonctions

Activité 1

Déterminons le domaine de définition des fonctions suivantes puis calculons leur limite en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$a^\circ) d(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 1} - 2x$$

$$Dd = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x - 1 \geq 0\}$$

On trouve :

$$Dd = \left] +\infty; \frac{3-\sqrt{13}}{2} \right] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{13}}{2}; +\infty \right[$$

$$\bullet \lim_{-\infty} d = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 1} - 2x)$$

Soit $\lim_{-\infty} d$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x - 1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{+\infty} d = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 1} - 2x)$$

Retenons

Face aux indéterminations des fonctions irrationnelles, on aura à utiliser en général les notions "**d'expression conjuguée**" ou "**extraction**" ou "**extraction-factorisation-simplification**".

Il est plus sûr de savoir d'avance quel outil employer parmi ces 3 pendant les calculs de limites.

- "L'extraction-factorisation" et "l'extraction-factorisation-simplification" s'utilisent en général pour les limites à l'infini.

Dans le cas des fonctions $x \mapsto \sqrt{f(x)} - g(x)$ ou $x \mapsto \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}$, (f et g étant des polynômes) pour savoir l'outil d'avance, il faut d'abord lever les deux termes au carré puis comparer ensuite les monômes du plus haut degré des deux termes :

- Lorsque ces monômes du plus haut degré sont identiques, on utilisera d'abord "expression conjuguée" puis ensuite "extraction-factorisation-simplification".
- Mais s'ils ne sont pas identiques, "l'extraction-factorisation" marche directement. Notons que "l'expression conjuguée" marche mais on perd beaucoup plus de temps.
- Pour les limites en réels finis, on utilisera en général "expression conjuguée" et ou "factorisation" pour pouvoir simplifier les termes.

En ce qui concerne la limite de "d" en $+\infty$, on est en présence d'une indétermination. On identifie les deux termes : $\sqrt{x^2 + 3x - 1}$ et $2x$. leurs carrés donnent : $x^2 + 3x - 1$ et $4x^2$.

On s'aperçoit que $x^2 \neq 4x^2$. En conclusion, "l'extraction-factorisation" peut directement marcher ici. Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{+\infty} d &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 1} - 2x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} - 2 \right) \right] &= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} - 2 \right) = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$b^\circ) e(x) = \sqrt{9x^2 - 5x + 1} - 3x$$

$$D_e = \{x \in \mathbb{R} / 9x^2 - 5x + 1 \geq 0\}$$

On trouve $D_e = \mathbb{R}$

Ici, lorsqu'on élève les deux termes au carré, on voit que les monômes du plus haut degré sont identiques. On aura donc à faire usage "d'expression conjuguée" puis d'extraction-factorisation-simplification".

Ainsi, $\lim_{-\infty} e = +\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{+\infty} e &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 - 5x + 1} - 3x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{9x^2 - 5x + 1} - 3x)(\sqrt{9x^2 - 5x + 1} + 3x)}{\sqrt{9x^2 - 5x + 1} + 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(-5 + \frac{1}{x})}{x(\sqrt{9 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5 + \frac{1}{x}}{\sqrt{9 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} + 3} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} e(x) = \frac{-5}{6}}$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-5 + \frac{1}{x}\right) = -5 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{9 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} + 3\right) = 6 \end{cases}$$

$$c) g(x) = \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{\sqrt{4x^2 + 3}}$$

$$\underline{D_g} = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{\sqrt{4x^2 + 3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{3 + \frac{1}{x^2}}}{-x\sqrt{4 + \frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3 + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt{4 + \frac{3}{x^2}}} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \sqrt{3 + \frac{1}{x^2}} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \sqrt{4 + \frac{3}{x^2}} \end{cases}$$

On trouve de même :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$d) f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x+2|}} - \frac{x}{\sqrt{|x+1|}}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$$

$$\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{|x+2|}} - \frac{x}{\sqrt{|x+1|}}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{|(x+1)(x+2)|}(\sqrt{|x+1|} + \sqrt{|x+2|})}} \\ &= \lim_{-\infty} \frac{x}{|x+1|} \times \frac{1}{\sqrt{|x+2|} + \frac{|x+2|}{\sqrt{|x+1|}}} \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{-\infty} f = 0$.

On trouve de même que $\lim_{-\infty} f = 0$.

$$e) h(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x^2-x-6}}$$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x+1 \geq 0 \text{ et } x^2 - x - 6 > 0\}$$

$$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \in [-1; +\infty[$$

$$\text{Posons } x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Delta = 25 \text{ donc } x = -2 \text{ ou } x = 3.$$

$$\text{donc } x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x \in [-\infty; -2[\cup]3; +\infty[.$$

$$\text{d'où } D_h =]3; +\infty[.$$

$$\lim_{+\infty} h = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x^2-x-6}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}}$$

$$\text{D'où } \boxed{\lim_{+\infty} h = 0}$$

$$f) i(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 3x + 1}}{2x + \sqrt{4x^2 + x}}$$

$$D_i = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 3x + 1 \geq 0 \text{ et } 4x^2 + x > 0$$

$$\text{et } 2x + \sqrt{4x^2 + x} \neq 0\}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; \frac{3-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + x \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -\frac{1}{4}] \cup [0; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow \text{Résolvons : } 2x + \sqrt{4x^2 + x} = 0.$$

$$2x + \sqrt{4x^2 + x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + x} = -2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + x \geq 0 \\ -2x \geq 0 \\ 4x^2 + x = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; -\frac{1}{4}] \cup [0; +\infty[\\ x \in]-\infty; 0] \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{On déduit que } 2x + \sqrt{4x^2 + x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

De tout ce qui précède, on déduit que :

$$D_i =]-\infty; -\frac{1}{4}] \cup]0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty[$$

$$\bullet \lim_{-\infty} i = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 3x + 1}}{2x + \sqrt{4x^2 + x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}{2 - \sqrt{4 + \frac{1}{x}}}$$

$$\text{D'où } \boxed{\lim_{-\infty} i = -\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - \sqrt{4 + \frac{1}{x}} = 0^- \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} i = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 3x + 1}}{2x + \sqrt{4x^2 + x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}{2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x}}}$$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} i = \frac{1}{2}$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x}} = 4 \end{cases}$

g) $j(x) = x\sqrt{1 + \sin^2 x}$

$D_j = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin^2 x \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{1 + \sin^2 x} \leq \sqrt{2}$

♣ Si $x < 0$, on a : $x\sqrt{2} \leq x\sqrt{1 + \sin^2 x} \leq x$
On déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} j = -\infty$.

♣ Si $x > 0$, on a : $x \leq x\sqrt{1 + \sin^2 x} \leq x\sqrt{2}$
On déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} j = +\infty$.

h) $k(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 1}$

$D_k =]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x - 1}{-x\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \right]$$

D'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} k = -1$

• On trouve de même que $\lim_{x \rightarrow +\infty} k = 1$

2.) Etudions la continuité de f en 3.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x^2-x-6}} \text{ si } x \neq 3. \\ f(3) = 0 \end{cases}$$

$D_f = [3; +\infty[$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x^2-x-6}}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{x-3}{(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x^2-x-6})}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{(x-3)\sqrt{x^2-x-6}}{(\sqrt{x+1}+2)(x-3)(x+2)}$$

D'où $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f = 0$

On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f = f(3) = 0$, d'où f est continue en 3.

Etudions la dérivabilité de f en 3.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{\sqrt{x+1}-2}{(x-3)\sqrt{x^2-x-6}}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = +\infty, \text{ d'où f n'est pas dérivable en 3.}$$

Activité 2

1) Déterminons le domaine de définition des fonctions suivantes et calculons leur limite en 0.

a) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

On a : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Retenons :

Face aux indéterminations relatives aux fonctions trigonométriques, il faut souvent penser au taux de variation, aux transformations utilisant les notions d'angles associés, les relations entre cos, sin et tan, les formules d'addition, de duplication, de linéarisation, aux transformations de somme en produit, de produit en somme et autres pour les lever.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \times \frac{\sin x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{cases}$$

$$b) g(x) = \frac{1 - \cos^2 3x}{x^4}$$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_0 g = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{x^2} \times \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{x^2} = \frac{9}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \end{cases}$$

$$c) h(x) = \frac{\tan 2x}{3x}$$

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\lim_0 h = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \left[\frac{\tan 2x - \tan(0)}{x - 0} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \times (\tan 2x)'(0) = \frac{1}{3} \left(\frac{2\cos^2(0) + 2\sin(0)}{\cos^2(0)} \right)$$

$$\text{Soit } \boxed{\lim_0 h = \frac{2}{3}}$$

$$d) k(x) = \frac{\sin 2x}{x \cos x}$$

$$D_k = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\lim_0 k = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 2x - \sin(0)}{x - 0} \times \frac{1}{\cos x} \right]$$

$$= (\sin 2x)'(0) \times \frac{1}{\cos(0)}$$

$$\text{Soit } \boxed{\lim_0 k = 2}$$

$$e) i(x) = \frac{\tan 2x}{\tan 5x}$$

$$D_i = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\lim_0 i = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\tan 2x}{2x} \times \frac{5x}{\tan 5x} \times \frac{2x}{5x} \right]$$

$$\text{Soit } \boxed{\lim_0 i = \frac{2}{5}}$$

$$f) j(x) = \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{\sin 2x}$$

$$D_j = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } 1 + \sin x \geq 0 \text{ et } \sin 2x \neq 0\}$$

$$\text{Posons : } 1 + \sin x = 0$$

$$1 + \sin x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

X	$-\infty$	$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$+\infty$
1+sinx	+	o	+

On déduit que :

$$D_j = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

NB :

Pour faire ce tableau, il suffit de prendre une valeur pour k, choisir un réel $\alpha < -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et calculer $1 + \sin \alpha$. Le signe de ce résultat est celui de $1 + \sin x$ avant la racine.

Par la suite, il faut choisir une valeur $\beta > -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et calculer $1 + \sin \beta$. Le signe de ce résultat est celui de $1 + \sin x$ après la racine.

$$\lim_0 i = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{\sin 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 + \sin(0)}}{x - 0} \times \frac{x}{\sin 2x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 + \sin(0)}}{x - 0} \times \frac{x - 0}{\sin 2x - \sin 0} \right]$$

$$= (\sqrt{1 + \sin x})'(0) \times \frac{1}{(\sin 2x)'(0)}$$

$$= \frac{\cos(0)}{2\sqrt{1 + \sin(0)}} \times \frac{1}{2\cos(0)}$$

$$\text{Soit } \boxed{\lim_0 j = \frac{1}{4}}$$

2) Déterminons le domaine de définition de la fonction g

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } 3 + \cos x \neq 0\}$$

$$\text{Posons : } 3 + \cos x = 0$$

$$\text{On a : } \cos x = -3 \text{ (impossible)}$$

$$\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}, 3 + \cos x \neq 0$$

$$\text{Soit } D_g = \mathbb{R}.$$

Calculons la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\spadesuit \lim_{x \rightarrow -\infty} g = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \cos x}{3 + \cos x}$$

On a : $-1 \leq \cos x \leq 1$

$$\text{Donc } \frac{x-1}{4} \leq \frac{x+\cos x}{3+\cos x} \leq \frac{x+1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{2} = -\infty$$

D'où $\lim_{-\infty} g = -\infty$.

$\spadesuit$ On trouve de même que $\lim_{+\infty} g = +\infty$.

3) Déterminons le domaine de définition de f

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \tan x \text{ existe et } 1 - \tan x \neq 0\}$$

$$\spadesuit \tan x \text{ existe} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\spadesuit \text{Posons : } 1 - \tan x = 0$$

$$\text{On a : } \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

D'où on a :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Calculer la limite de f en $\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$$

$$\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = -\frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\text{D'où } \boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g = -1}$$

4.) Calculons les limites suivantes

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{5}(\sin 2x - 1)}{2x - \frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\frac{\sqrt{5}(\sin 2x - 1)}{2x - \frac{\pi}{2}} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sin 2x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sin 2x - \sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} \right]$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} \times (\sin 2x)' \left(\frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{Soit } \boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{5}(\sin 2x - 1)}{2x - \frac{\pi}{2}} = 0}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{31(6x - \pi)}{2\cos x - \sqrt{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{31(6x - \pi)}{2\cos x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left[\frac{186\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{2\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left[93 \times \frac{x - \frac{\pi}{6}}{\cos x - \cos \frac{\pi}{6}} \right] = 93 \times (\cos x)' \left(\frac{\pi}{6} \right)$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{31(6x - \pi)}{2\cos x - \sqrt{3}} = -\frac{93}{2}}$$

Activité 4**1.) Domaine de définition D_g de g.**

$$D_g = \mathbb{R}.$$

La fonction $x \mapsto x^2 - 4x - 12$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$. Donc la fonction $x \mapsto |x^2 - 4x - 12|$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x^2 - 4x - 12| \geq 0$, alors la fonction $x \mapsto \sqrt{|x^2 - 4x - 12|}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Il en résulte que la fonction $g : x \mapsto \frac{3}{4}\sqrt{|x^2 - 4x - 12|}$ est continue sur $D_g = \mathbb{R}$.

2) Etudions la dérivabilité de g en -2 et en 6 puis interprétons les résultats obtenus.

On a :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 4x - 12} \text{ si } x \in]-\infty; -2[\cup]6; +\infty[\\ g(x) = \frac{3}{4}\sqrt{-x^2 + 4x + 12} \text{ si } x \in]-2; 6[\\ g(-2) = g(6) = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x) - g(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \left[-\frac{3}{4} \frac{\sqrt{(x+2)(x-6)}}{-x-2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \left[-\frac{3}{4} \sqrt{-x+6} \right] = -\infty$$

• On trouve de même que

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x) - g(-2)}{x + 2} = +\infty$$

On conclut que g n'est pas dérivable en -2 .
Ainsi, (c_g) admet au point $A(-2, 0)$ une demi-tangente définie par : $\begin{cases} x = -2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

• On démontre de même que g n'est pas dérivable en 6 et que (c_g) admet au point $B(6, 0)$ une demi-tangente définie par : $\begin{cases} x = 6 \\ y \geq 0 \end{cases}$

3.) Calculons $g'(x)$

De tout ce qui précède, g est dérivable sur $E = \mathbb{R} \setminus \{-2; 6\}$.

☞ $\forall x \in]-\infty; -2[\cup]6; +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x-12}}$$

☞ $\forall x \in]-2; 6[$, $g'(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x+12}}$

Branches infinies

→ On a: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g = +\infty$. Calculons:

$$\clubsuit \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{3}{4} \sqrt{1 - \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2}} \right] = -\frac{3}{4}$$

$$\clubsuit \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[g(x) + \frac{3}{4}x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3(x^2 - 4x - 12) - x^2}{4\sqrt{x^2 - 4x - 12} - x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3}{4} \times \frac{x \left(-4 - \frac{12}{x} \right)}{-x \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2}} + 1 \right)} \right] = \frac{3}{2}$$

On déduit que la droite (D_1) d'équation $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ est asymptote à (c_g) au voisinage de $-\infty$.

→ On a: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = +\infty$.

On démontre de même que la droite (D_2) d'équation $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$ est asymptote à (c_g) au voisinage de $+\infty$.

Activité 5

1.) Vérification

$$g(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \text{ et } f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}$$

g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)-1}{x\sqrt{1+x}+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}$$

On a ainsi : $\begin{cases} f(x) = g(x) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

D'où f est le prolongement par continuité de g en 0 .

2.)

♣ Continuité de f en 0

$$f(x) = \frac{x + \cos x}{x + \sin x}$$

f est définie sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + \cos x}{x + \sin x} \right) = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + \cos x}{x + \sin x} \right) = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$. On en déduit que f n'est pas continue en 0 .

♣ Dérivabilité de f en 0 .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x + \cos x}{x(x + \sin x)} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \times \frac{x + \cos x}{x + \sin x} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$$

On trouve de même que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$$

On conclut que f n'est pas dérivable en 0.

Interprétation graphique

♣ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$, donc (c_f) admet à gauche au point $O(0; 0)$ une demi-tangente définie par : $\begin{cases} x = 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$.

♣ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$, donc (c_f) admet à droite au point $O(0; 0)$ une demi-tangente définie par : $\begin{cases} x = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$.

♣ Calculons f'

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \left(\frac{x + \cos x}{x + \sin x} \right)'$$

$$f'(x) = \frac{(1 - x)\sin x - (1 + x)\cos x - 1}{(x + \sin x)^2}$$

b) Branches infinies de (c_f)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \cos x}{x + \sin x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\text{Donc } \frac{x-1}{x+1} \leq \frac{x+\cos x}{x+\sin x} \leq \frac{x+1}{x-1}$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = 1$.

☞ On trouve de même que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 1$.

En conclusion, la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à (c_f) au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$.

4.a) Domaine de définition de f

$$\begin{cases} f(x) = x^4 \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

On trouve $D_f = \mathbb{R}$.

b) Dérivabilité de f en 0

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x^3 \cos \frac{1}{x} \right)$$

Posons : $\frac{1}{x} = X$

On a : $x = \frac{1}{X}$

Si $x \rightarrow 0^-$, $X \rightarrow -\infty$

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x^3 \cos \frac{1}{x} \right) = \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{\cos X}{X^3}$$

Il est clair que $-1 \leq \cos X \leq 1, \forall X \in \mathbb{R}$.

Si $X \rightarrow -\infty$, $\frac{1}{X^3} < 0$, donc

$$\frac{1}{X^3} \leq \frac{\cos X}{X^3} \leq -\frac{1}{X^3}$$

Comme $\lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{1}{X^3} = \lim_{X \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{X^3} \right) = 0$, alors

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{\cos X}{X^3} = 0$$

$$\text{Soit } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0.$$

✓ On trouve de même que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.

f est dérivable à droite et à gauche en 0 et on a $f'_d(0) = f'_g(0) = f'(0)$, d'où f est dérivable en 0.

c) Calculons $f'(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \left(x^4 \cos \frac{1}{x} \right)'$$

$$f'(x) = x^2 \left(\sin \frac{1}{x} + 4x \cos \frac{1}{x} \right)$$

Branches infinies de (c_f)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

Donc (c_f) admet au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

4.) Ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes.

$$a) f: x \mapsto \frac{x\sqrt{x+1}}{2x-3}$$

$$D_f = [-1; \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[$$

Etudions la dérivabilité de f en -1 .

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x\sqrt{x+1}}{(x+1)(2x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{(2x-3)\sqrt{x+1}} = +\infty$$

On conclut que f n'est pas dérivable en -1 .

D'où f est dérivable sur $] -1; \frac{3}{2} [\cup] \frac{3}{2}; +\infty [$.

$$b) g(x) = \frac{\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^2+3}}{|2x-1|}$$

$$D_g = [1; +\infty[$$

Etudions la dérivabilité de g en 1 .

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^2+3}}{(x-1)|2x-1|} - \frac{4}{x-1} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^2+3} - 8x + 4}{(x-1)(2x-1)} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{(2x-1)(\sqrt{x-1})} + 2 \cdot \frac{\sqrt{x^2+3} - (4x-2)}{(x-1)(2x-1)} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{(2x-1)(\sqrt{x-1})} + 2 \cdot \frac{(-15x^2 + 16x - 1)}{(x-1)(2x-1)\sqrt{x^2+3} + (4x-2)} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{(2x-1)(\sqrt{x-1})} + 2 \cdot \frac{(x - \frac{1}{15})}{(2x-1)\sqrt{x^2+3} + (4x-2)} \right]$$

Soit $\lim_{x \rightarrow 1} g = +\infty$.

On déduit que g n'est pas dérivable en 1 .

Par conséquent, elle est dérivable en tout point de $]1; +\infty[$

Activité 9

Partie A

1. Variation de g

$$g(x) = 1 - x\sqrt{1+x^2}$$

g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{-2x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{1+x^2} > 0$ et $-2x^2 - 1 < 0$,
donc $g'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Il en résulte que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

b.) Démonstration

g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Or $0 \in \mathbb{R}$, donc $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

$g(0,78) = 0,0107 > 0$ et $g(0,79) = -0,0067 < 0$,
d'où $0,78 < \alpha < 0,79$.

c) Dédisons le signe de $g(x)$

D'après a) et b),

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \\ g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \end{cases}$$

d) Démonstration

$$f(\alpha) = \frac{1}{3}\alpha^3 - \sqrt{1+\alpha^2}$$

Or $g(\alpha) = 0$, donc $1 - \alpha\sqrt{1+\alpha^2} = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{1+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{Ainsi, } f(\alpha) = \alpha^3 - \frac{1}{\alpha}$$

Soit $f(\alpha) = \frac{\alpha^4-3}{3\alpha}$, d'où le résultat.

Montrons que $-1,13 < f(\alpha) < -1,10$.

$$0,78 < \alpha < 0,79$$

$$\Rightarrow (0,78)^4 - 3 < \alpha^4 - 3 < (0,79)^4 - 3$$

$$\Rightarrow 3 - (0,79)^4 < 3 - \alpha^4 - 3 < (0,78)^4 - 3$$

(1)

$$\text{On a : } 3(0,78) < 3\alpha < 3(0,79)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3(0,79)} < \frac{1}{3\alpha} < \frac{1}{3(0,78)} \quad (2)$$

De (1) et (2), on a :

$$\frac{3 - (0,79)^4}{3(0,79)} < -f(\alpha) < \frac{3 - (0,78)^4}{3(0,78)}$$

$$\Rightarrow -1,128 < f(\alpha) < -1,101$$

$$\text{D'où } -1,13 < f(\alpha) < -1,10.$$

2.a) Démonstration

$$\text{Soit } h : x \mapsto g(x) - x$$

h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme algébrique des fonctions continues dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = g'(x) - 1 < 0$ car $g'(x) < 0$.
D'où h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$h(0,4) = 0,169 > 0$ et $h(0,5) = -0,059 < 0$,
d'où l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique β telle que $0,4 < \beta < 0,5$.

b) Sens de variation de g'

g' est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = \frac{-x(2x^2+3)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$(1+x^2)\sqrt{1+x^2} > 0$ et $2x^2+3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, d'où $g''(x) > 0, \forall x \in]-\infty; 0[$ et $g''(x) < 0, \forall x \in]0; +\infty[$ puis $g''(0) = 0$.
Il en résulte que g' est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Par ailleurs, g'' s'annule en 0 en changeant de signe et $g'(0) = 1$, donc le point $I(0; 1)$ est un **point d'inflexion de (c_g)** .

c) Justification

g' est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in [0,4; 0,5]$, on a :

$$g'(0,5) < g'(x) < g'(0,4)$$

Comme $g'(x) < 0$, alors $|g'(x)| \leq |g'(0,5)|$
 $g'(0,5) \approx -1,34$

$$\text{D'où } \forall x \in [0,4; 0,5], |g'(x)| \leq \frac{3}{2}$$

Montrons que $|g(x) - \beta| \leq \frac{3}{2}|x - \beta|$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\beta \in [0,4; 0,5] \text{ et } \forall x \in [0,4; 0,5], |g'(x)| \leq \frac{3}{2}$$

D'après le théorème des inégalités des accroissements finis, on a :

$$|g(x) - g(\beta)| \leq \frac{3}{2}|x - \beta|.$$

Comme $g(\beta) = \beta$, alors $|g(x) - \beta| \leq \frac{3}{2}|x - \beta|$.

Partie B

3.a) Sens de variation de f

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt{1+x^2}$$

f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = x^2 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{Soit } f'(x) = -\frac{xg(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[, f'(x) > 0$ et $\forall x \in]0; \alpha[, f'(x) < 0$ et $f'(0) = f'(\alpha) = 0$,
d'où f est strictement décroissante sur $]0; \alpha[$ et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $[\alpha; +\infty[$.

b) Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0		α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$
$f(x)$		-1		$f(\alpha)$	$+\infty$

c) Etudions les branches infinies de (C_f) .

$$\clubsuit \lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

$$\clubsuit \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

On conclut que (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$.

4.a) Justification

h est la restriction de f sur $\mathbb{R}_-$ et puisque f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$, alors h est une bijection. Elle admet donc une bijection réciproque h^{-1} définie sur $J = f(\mathbb{R}_-) =]-\infty; -1]$.

b) Etudions la dérivabilité de h^{-1} sur J

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-, f'(x) \neq 0$, donc h^{-1} est dérivable sur $f(\mathbb{R}_-) =]-\infty; -1[$.

c) Justification

$$f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3} - 2, \text{ soit } h(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3} - 2$$

$$\text{Donc } h^{-1}(-\sqrt{3} - 2) = -\sqrt{3}$$

$$\text{D'où } A(-\sqrt{3} - 2; -\sqrt{3}) \in (C_h^{-1})$$

Déterminons une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_h^{-1}) au point A.

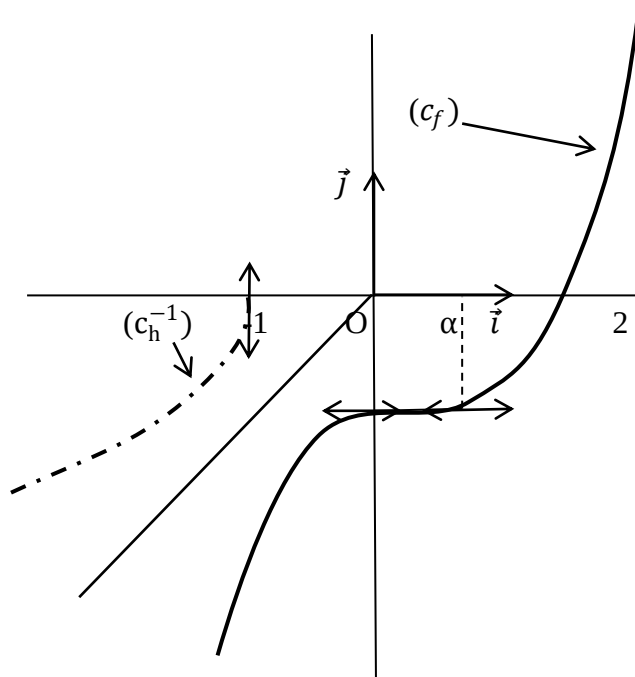
$$(T) : y = (h^{-1})'(-\sqrt{3} - 2)(x + \sqrt{3} + 2) + h^{-1}(-\sqrt{3} - 2)$$

$$(h^{-1})'(-\sqrt{3} - 2) = \frac{1}{h'[h^{-1}(-\sqrt{3} - 2)]} = \frac{1}{h'(-\sqrt{3})}$$

$$\text{Or } h'(-\sqrt{3}) = f'(-\sqrt{3}).$$

$$\text{Les calculs donnent } f'(-\sqrt{3}) = \frac{6+\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{D'où } (T) : y = \frac{6+\sqrt{3}}{2}(x + \sqrt{3} + 2) - \sqrt{3}$$

5.) Traçons (c_f) et (c_h^{-1}) **Activité 11****Partie A****1.) Variations de u**

u est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 6x^2 - 6x$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[, u'(x) > 0$$

$$\forall x \in]0; 1[, u'(x) < 0 \text{ et}$$

$$\forall x \in \{0; 1\}, u'(x) = 0.$$

Il en résulte que u est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $]1; +\infty[$ puis strictement décroissante sur $[0; 1]$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$u'(x)$	+	0	-	+
$u(x)$	$-\infty$	2	1	$+\infty$

2.) Montrons

♣ u est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et $u(]-\infty; 0]) =]-\infty; 2]$; $0 \in]-\infty; 2]$, donc l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique dans $]-\infty; 0]$ (1)

♣ u est continue et strictement décroissante sur $[0; 1]$ et $u([0; 1]) = [1; 2]$; $0 \notin [1; 2]$, donc l'équation $u(x) = 0$ n'admet aucune solution dans $[0; 1]$. (2)

♣ u est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et $u([1; +\infty[) = [1; +\infty[$; $0 \notin [1; +\infty[$, donc l'équation $u(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $[1; +\infty[$. (3)

De (1), (2) et (3), on déduit que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Vérification

$$\begin{cases}]-\frac{4}{5}; -\frac{2}{3}[\subset]-\infty; 0] \\ u\left(-\frac{4}{5}\right) \approx -0,9 < 0 \\ u\left(-\frac{2}{3}\right) \approx 0,07 > 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où } \alpha \in]-\frac{4}{5}; -\frac{2}{3}[$$

3.) Signe de $u(x)$

De ce qui précède, on déduit que :

$$\forall x \in]-\infty; \alpha[, u(x) < 0,$$

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[, u(x) > 0 \text{ et } u(\alpha) = 0$$

Partie B**1) Etudions la continuité de f en 0.**

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - x - 1}{x - 1} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x^3 - x - 1}{x - 1} \right] = 1 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \right] = 1$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^-} f = \lim_{x \rightarrow 0^+} f = f(0)$$

D'où f est continue en 0.

2.) Etudions la dérivabilité de f en 3.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x^3 - 2x}{x(x - 1)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^2 - 2}{x - 1} \right) = 2; 2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

D'où f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 2$.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1 - x - \sqrt{1 + x^2}}{x(x + \sqrt{1 + x^2})} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2(x - \sqrt{1 + x^2})}{1 - x + \sqrt{1 + x^2}} \right) = -1; -1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

D'où f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -1$.

Conclusion

f est dérivable à droite et à gauche en 0 et on a $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, d'où f n'est pas dérivable en 0.

Interprétation des résultats

La courbe (c) de la fonction f admet en son point d'abscisse 0, deux demi-tangentes, l'une à gauche et l'autre à droite, définies respectivement par :

$$(T_g) : \begin{cases} y = f'_g(0)(x - 0) + f(0) \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$(T_d) : \begin{cases} y = f'_d(0)(x - 0) + f(0) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Soit :

$$(T_g) : \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x \leq 0 \end{cases}; (T_d) : \begin{cases} y = -x + 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

De tout ce qui précède, la fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$.

3.a) Calculons $f'(x)$ pour $x < 0$

$$\forall x < 0, f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{(x - 1)^2}$$

$$\text{Soit } f'(x) = \frac{u(x)}{(x - 1)^2}, \forall x < 0$$

b) Signe de $f'(x)$

$\forall x < 0, (x - 1)^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $u(x)$.

Par suite, $\forall x \in]-\infty; \alpha[, f'(x) < 0$,

$\forall x \in]\alpha; 0[, f'(x) > 0$ et $f'(\alpha) = 0$

Il en résulte que f est strictement décroissante sur $] -\infty; \alpha[$ puis strictement croissante sur $]\alpha; 0[$.

4.a) Calculons $f'(x)$ pour $x \geq 0$.

$$\forall x > 0, f'(x) = -\frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}(\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + x^2})}$$

b) Résolution de l'équation

$x + \sqrt{1 + x^2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 + x^2} = -x$ (absurde car $x > 0$)

Donc $\forall x > 0, x + \sqrt{1 + x^2} \neq 0$

Sens de variation de f

$\forall x \in [0; +\infty[, x + \sqrt{1 + x^2} \neq 0$, donc $x + \sqrt{1 + x^2}$ garde un signe constant sur $[0; +\infty[$.

On a : $x > 0$ et $\sqrt{1 + x^2} > 0$, donc $x + \sqrt{1 + x^2} > 0$.

Soit $f'(x) < 0, \forall x \in]0; +\infty[$.

D'où f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

5.a) Calculons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

On a $D_f = \mathbb{R}$.

$$\lim_{-\infty} f = +\infty \text{ et } \lim_{+\infty} f = 0$$

b) Tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\bullet$	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	1	$+\infty$

c) Branches infinies de (c)

Tout en justifiant, on trouve que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (c) en $+\infty$ et que (c) admet au voisinage de $-\infty$, une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

7. Montrons

$$\text{On a : } \forall x < 0, f(x) = \frac{x^3 - x - 1}{x - 1}$$

$$\alpha < 0, \text{ donc } f(\alpha) = \frac{\alpha^3 - \alpha - 1}{\alpha - 1}$$

$$\text{Or } u(\alpha) = 0, \text{ donc } 2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^3 = \frac{1}{2}(3\alpha^2 - 2)$$

$$\text{Ainsi, } f(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}(3\alpha^2 - 2) - \alpha - 1}{\alpha - 1}$$

$$\text{Soit } f(\alpha) = \frac{1}{2}\left(3\alpha + 1 - \frac{3}{\alpha - 1}\right), \text{ d'où le résultat.}$$

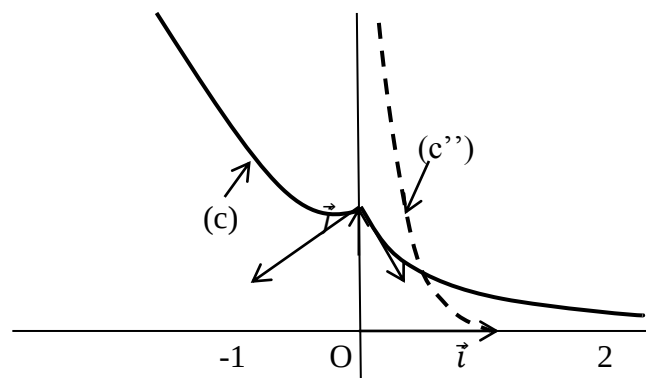
Encadrons $f(\alpha)$

$$\text{On a : } f(\alpha) = \frac{1}{2}\left(3\alpha + 1 - \frac{3}{\alpha - 1}\right) \text{ et}$$

$$-\frac{4}{5} < \alpha < -\frac{2}{3}$$

On achève l'encadrement et on trouve :

$$\frac{2}{15} < f(\alpha) < \frac{2}{5}$$

Traçons la courbe (c)**Partie C****1.) Calculons $f(I)$**

f est continue et strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$, donc $f(I) = f(]0 ; +\infty[) =]0 ; 1[$

$$f(I) =]0 ; 1[$$

2.a) Démonstration

La restriction g de f à $]0 ; +\infty[$ est continue et strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$, donc elle est une application bijective de $]0 ; +\infty[$ vers $]0 ; 1[$; par conséquent, elle admet une application réciproque g^{-1} .

b) Etudions la continuité de g^{-1}

g est continue sur $]0 ; +\infty[$, donc g^{-1} est continue sur $g(]0 ; +\infty[) = f(]0 ; +\infty[) =]0 ; 1[$.

Etudions la dérivabilité de g^{-1}

g^{-1} est définie sur $]0 ; 1[$ et $\forall x \in]0 ; 1[$, $g'(x) \neq 0$, donc g^{-1} est dérivable sur $]0 ; 1[$.

c) Tracé de (c')

Soit (c') la portion de (c) représentant la restriction de f à $]0 ; +\infty[$ et (c'') son symétrique par rapport à la première bissectrice ($y = x$).

3) Explicitons $g^{-1}(x) \forall x \in I$.

Posons : $g^{-1}(x) = t$ avec $t \in]0 ; +\infty[$.

$$g^{-1}(x) = t \Leftrightarrow \begin{cases} t \in]0; +\infty[\\ x \in]0; 1[\\ g(t) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in]0; +\infty[\\ x \in]0; 1[\\ \frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}} = x \end{cases}$$

$$\frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}} = x \Leftrightarrow x\sqrt{1+t^2} = 1 - xt$$

Pour $1 - xt \geq 0$, les deux membres de $\frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}} = x$ sont positifs.

$$\text{On a donc } x^2(1+t^2) = (1-xt)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xt - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1-x^2}{2x}$$

Vérifions si $1 - xt \geq 0$

$$1 - xt = 1 - x \times \frac{1-x^2}{2x} = 1 - \frac{1-x^2}{2x}$$

$$= \frac{1-x^2}{2x} > 0, \text{ donc } 1 - xt > 0$$

D'où $\boxed{g^{-1}:]0; 1[\rightarrow]0; +\infty[}$

$$x \mapsto \frac{1-x^2}{2x}$$

Activité 12

1.) Variations de f

$$f:]0; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{\cos x}$$

f est définie, continue et dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et

on a :

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \sin x > 0 \text{ et } \cos^2 x > 0, \text{ donc}$$

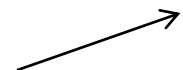
$$f'(x) > 0, \forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[.$$

Il en résulte que f est strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos x} = +\infty$$

On déduit le tableau de variation ci-contre :

x	0			$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$			+	
$f(x)$		1		$+\infty$

2.) Explication

f est une bijection sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ car elle est continue et strictement croissante sur cet intervalle.

$$J = f(]0; \frac{\pi}{2}[) =]1; +\infty[.$$

3.) Démonstration

Soit E l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} .

$$E = \mathbb{J} \setminus \{f(x)/f'(x) = 0\}$$

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, f'(x) \neq 0.$$

D'où $E = J$.

4. Démonstration

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

$$\text{Posons : } f^{-1}(x) = t, t \in]0; \frac{\pi}{2}[$$

$$\text{On a : } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{\cos^2 t}{\sin t}$$

$$\text{Or } f^{-1}(x) = t, \text{ donc } f(t) = x.$$

$$\text{Alors } \frac{1}{\cos t} = x \Rightarrow \cos t = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \cos^2 t = \frac{1}{x^2} \quad (1)$$

On a $\forall t \in \mathbb{R} : \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, donc

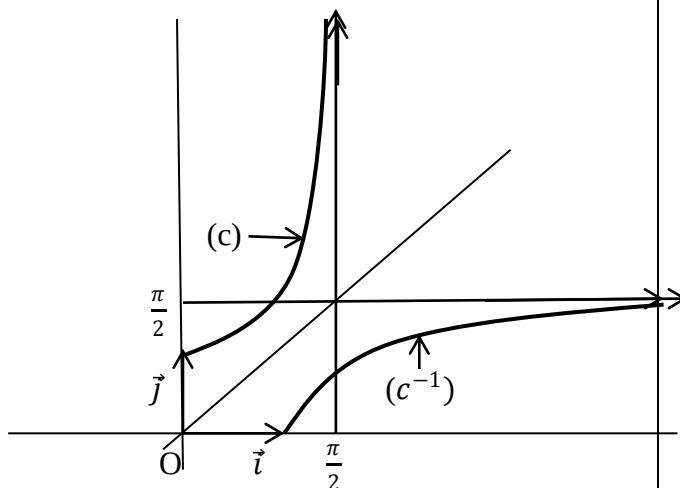
$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\text{alors } \sin t = \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 1} \text{ ou } \sin t = -\frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 1}$$

Nous n'allons retenir que $\sin t = \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 1}$ car $t \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et donc $\sin t > 0$.

$$\text{Par conséquent, } (f^{-1})'(x) = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}$$

$$\text{Soit } \boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$$

5.) Construisons (c) et (c')**Activité 13****1.) Démontrons que g est une bijection**

g est définie, continue et dérivable sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$

et on a : $\forall x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$, $g'(x) = 2\cos x \sin x$

Soit $g'(x) = \sin 2x$, $\forall x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$.

$g'(x) \geq 0$, $\forall x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$

d'où g est strictement croissante sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

Par conséquent, elle est une bijection.

2.a) Déterminons E.

$$E = g(D_g) \setminus \{g(x) \text{ tq } g'(x) = 0\}$$

$$g(D_g) = g([0 ; \frac{\pi}{2}]) = [0 ; 1]$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{\pi}{2}$$

$$g(0) = 0 \text{ et } g(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\text{D'où } E = [0 ; 1] \setminus \{0 ; 1\}$$

$$\text{Soit } E =]0 ; 1[.$$

3) Calculons $(g^{-1})'(\frac{1}{2})$

$$(g^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{g'[g^{-1}(\frac{1}{2})]}$$

$$\text{Posons : } g^{-1}(\frac{1}{2}) = \delta$$

$$\text{On a : } g(\delta) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Résolvons : } g(\delta) = \frac{1}{2}$$

$$g(\delta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 \delta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \delta = \frac{\sqrt{x}}{2} \text{ ou}$$

$$\sin \delta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On retient : $\sin \delta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ car $\delta \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$

On déduit que $\delta = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Ainsi, } g^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{On a donc : } (g^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{g'[\frac{\pi}{4}]}$$

$$g'[\frac{\pi}{4}] = 1, \text{ d'où } \boxed{(g^{-1})'(\frac{1}{2}) = 1}$$

4.) Démonstration

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'[g^{-1}(x)]}$$

$$\text{Posons : } g^{-1}(x) = t, t \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{On a : } (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(t)}$$

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{2\cos t \sin t}$$

$$\text{Or } (g^{-1})(x) = t \Rightarrow g(t) = x$$

$$\Rightarrow \sin^2 t = x \Rightarrow \sin t = \sqrt{x} \text{ car } t \in [0 ; \frac{\pi}{2}].$$

$$\text{On a } \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - x}$$

$$\text{Ainsi, } (g^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}\sqrt{x}}$$

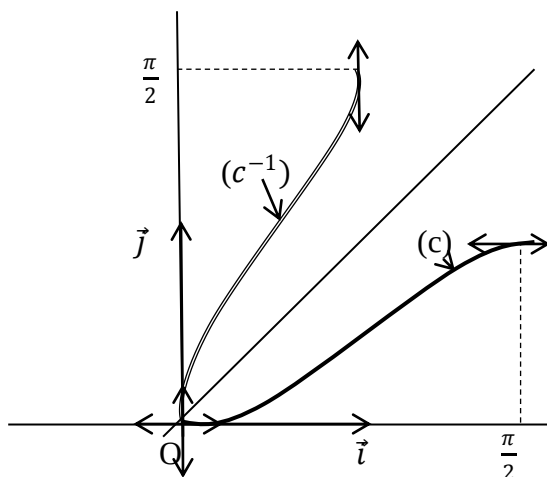
$$\text{D'où } \boxed{(g^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}}$$

Retrouvons $(g^{-1})'(\frac{1}{2})$

$$(g^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}}$$

$$\text{Soit } (g^{-1})'(\frac{1}{2}) = 1.$$

5.) Traçons (c) et (c')



Activité 14

1.) Domaine de définition de f

$$f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \sin x \neq 0\}$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{D'où } D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

2) Démontrons que f est périodique de période 2π

$$\forall x \in D_f, \text{ on a : } x + 2\pi \in D_f \text{ et}$$

$$f(x + 2\pi) = \frac{\cos(2x + 4\pi)}{\sin(x + 2\pi)}$$

$$\cos(2x + 4\pi) = \cos 2x \text{ et } \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

$$\text{D'où } f(x + 2\pi) = \frac{\cos 2x}{\sin x} = f(x)$$

Par conséquent, f est périodique de période 2π .

3.) Démonstration

$$\forall x \in D_f, \pi - x \in D_f \text{ et } f(\pi - x) = \frac{\cos(2\pi - 2x)}{\sin(\pi - x)}$$

$$\checkmark \cos(2\pi - 2x) = \cos(-2x) = \cos(2x)$$

$$\checkmark \sin(\pi - x) = -\sin(-x) = \sin x$$

$$\text{Donc } f(\pi - x) = \frac{\cos 2x}{\sin x} = f(x)$$

En conclusion, la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie à la courbe (c).

4.) Preuve

La fonction f est périodique de période 2π , donc il suffit de faire l'étude de f sur un intervalle de longueur 2π .

Choisissons $[-\pi; \pi] \cap D_f =]-\pi; 0[\cup]0; \pi[$

Par ailleurs, f est impaire, donc il nous suffit de faire son étude sur $]0; \pi[\cap D_f =]0; \pi[$.

Enfin, la droite $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie à

(c), donc on peut étudier f sur $]0; \frac{\pi}{2}[\cap D_f$.

On obtient finalement l'ensemble d'étude restreint $E =]0; \frac{\pi}{2}[$.

5.) Variations de f

f est continue et dérivable sur E et on a :

$$f'(x) = -\frac{\cos x [2\sin^2 x + 1]}{\sin^2 x}$$

$\forall x \in E, 2\sin^2 x + 1 > 0$ et $\sin^2 x > 0$. Comme

$\forall x \in E, \cos x > 0$, alors $f'(x) < 0 \forall x \in E$.

Il en résulte f est strictement décroissante sur E .

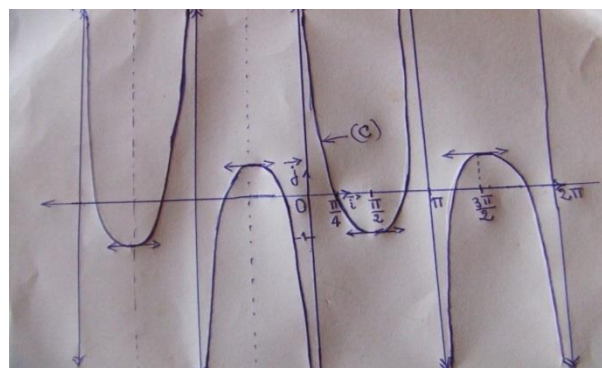
On déduit le tableau de variation ci-après :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$\bullet$
$f(x)$	$+\infty$	-1

Construisons (c)

Recherche des points remarquables

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$, on déduit que $(c) \cap (OX) = \{A(\frac{\pi}{4}; 0)\}$.



Activité 16**1.) Périodicité de f**

$$f(x) = \cos 3x \cos^3 x$$

La fonction $X \mapsto \cos X$ est périodique de période 2π . D'où f est périodique de période 2π comme produit de deux fonctions toutes périodiques de période 2π .

2.) Justification

$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et

$$f(-x) = \cos(-3x) \cos^3(-x) = \cos(3x) \cos^2(x) \times \cos(-x)$$

$$f(-x) = \cos 3x \cos^3 x \quad \text{car } \cos(-x) = \cos(x)$$

Par conséquent, f est paire.

3.) Preuve

f est périodique de période 2π . Donc on peut l'étudier sur $[-\pi; \pi]$. De plus, f est impaire, donc on peut l'étudier sur $[0; \pi]$.

f a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ (car $f(\pi - x) = \cos(\pi - 3x) \cos^3(\pi - x) = f(x)$), donc on peut étudier f sur $[0; \frac{\pi}{2}] \cap D_f$.

On obtient finalement l'ensemble $E = [0; \frac{\pi}{2}]$.

On complètera le graphe de f grâce aux symétries orthogonales par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ et à l'axe (OY) et aux translations de vecteur $(2k\pi; 0)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

4.) Construisons (c)

f est continue et dérivable sur E et on a :

$$f'(x) = -3\cos^2 x \sin 4x$$

On déduit le tableau de variation ci-contre :

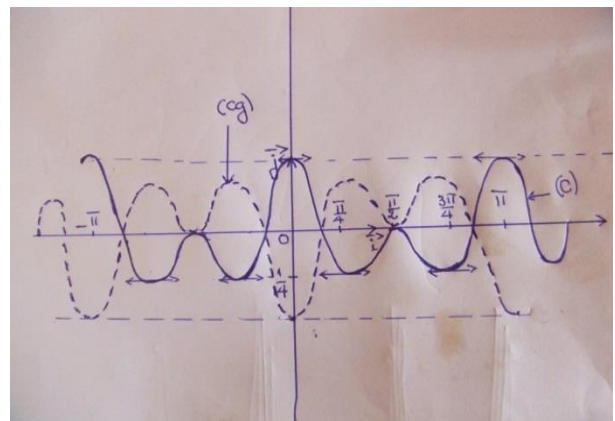
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$	1	$-\frac{1}{4}$	0



Construction : voir figure.

5.) On a : $g(x) = -f(-x)$

On déduit que (c_g) et (c) sont symétriques par rapport à l'origine O du repère. Les deux courbes se présentent dans la figure ci-contre :

**Séquence 6 : Primitives****Activité 1****Détermination des primitives F.**

1) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet une infinité de primitives sur $\mathbb{R}$.

On a : $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + k, k \in \mathbb{R}$.

2) $f(x) = 3x - 1 + \frac{17}{x^2}$

f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$, donc elle admet une infinité de primitives sur $\mathbb{R}^*$.

On a : $f(x) = 3x - 1 + 17 \times \frac{1}{x^2}$

D'où $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{17}{x} + k, k \in \mathbb{R}$.

3) $f(x) = 5x + \frac{3}{\sqrt{x}}$

f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc elle admet une infinité de primitives sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a : $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 6\sqrt{x} + k, k \in \mathbb{R}$.

$$4) f(x) = (3x^3 + 1)^2$$

f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet une infinité de primitives sur $\mathbb{R}$.

On a : $f(x) = 9x^6 + 6x^3 + 1$

D'où $F(x) = \frac{9}{7}x^7 + \frac{3}{2}x^4 + x + k, k \in \mathbb{R}$.

$$5) f(x) = (x+1)^2(x-1)$$

f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet une infinité de primitives sur $\mathbb{R}$.

On a : $f(x) = (x+1)^2(x+1-2)$

$$f(x) = (x+1)^3 - 2(x+1)^2$$

D'où $F(x) = \frac{1}{4}(x+1)^4 - \frac{2}{3}(x+1)^3 + k$.

$$6) f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^4}$$

f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$, donc elle admet une infinité de primitives sur $\mathbb{R}^*$.

On a : $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$

D'où $F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + k, k \in \mathbb{R}$.

$$7) f(x) = 5x^3(x^4 - 7)^4$$

f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet une infinité de primitives sur $\mathbb{R}$.

On a : $f(x) = \frac{5}{4} \times 4x^3(x^4 - 7)^4$

D'où $F(x) = \frac{1}{4}(x^4 - 7)^5 + k, k \in \mathbb{R}$.

$$8) f(x) = \frac{5x-1}{(5x^2-2x+1)^2}$$

f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc elle y admet une infinité de primitives.

On a : $f(x) = \frac{5}{2} \times \frac{10x-2}{(5x^2-2x+1)^2}$

D'où $F(x) = -\frac{5}{2(5x^2-2x+1)} + k, k \in \mathbb{R}$.

$$9) f(x) = \frac{3}{(1+2x)^5}$$

f est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, donc elle admet une infinité de primitives sur cet intervalle.

On a : $f(x) = \frac{3}{2} \times \frac{2}{(1+2x)^5}$

D'où $F(x) = -\frac{3}{8(1+2x)^4} + k, k \in \mathbb{R}$.

$$10) f(x) = \frac{12x^2+1}{(8x^3+2x-2015)^{-31}}$$

f est définie et continue sur

$\mathbb{R} \setminus \{\frac{-2-\sqrt{72544}}{18}; \frac{-2+\sqrt{72544}}{18}\}$, donc elle admet une infinité de primitives sur cet intervalle.

$$f(x) = \frac{1}{2} \times (24x^2 + 2)^2(8x^3 + 2x - 2015)^{31}$$

D'où $F(x) = \frac{1}{64}(8x^3 + 2x - 2015)^{32}$

Activité 2

Détermination des primitives F.

$$a) f(x) = \sqrt{3x+4} = (3x+4)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{3} \times 3(3x+4)^{\frac{1}{2}}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = \frac{2}{9}(3x+4)^{\frac{3}{2}} + k, k \in \mathbb{R}$.

$$b) f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+6}} = \frac{3}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+6}}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = 3\sqrt{x^2+6} + k, k \in \mathbb{R}$.

$$c) f(x) = \frac{2x-4}{\sqrt{(x^2-4x+25)}^3}$$

$$f(x) = \frac{2x-4}{(x^2-4x+25)^{\frac{3}{2}}}$$

D'où $\forall x \in D_f, F(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4x+25}} + k, k \in \mathbb{R}$.

$$d) f(x) = x\sqrt{1-x}$$

$$= (1-1+x)\sqrt{1-x}$$

$$= \sqrt{1-x} + (x-1)\sqrt{1-x}$$

$$f(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{3}{2}}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_-, F(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} +$

$$\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} + k, k \in \mathbb{R} \text{ ou}$$

$$F(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3} + \frac{2}{5}\sqrt{(1-x)^3} + k$$

$$e) f(x) = x\sqrt{x+1}$$

$$= (x+1-1)\sqrt{x+1} = (x+1)\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1}$$

$$f(x) = (x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + k, \\ k \in \mathbb{R}.$$

$$f) (x) = 12x\sqrt{x^2+3},$$

$$d'où \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = 4\sqrt{(x^2+3)^3} + k, \\ k \in \mathbb{R}.$$

$$g) f(x) = (4x^3 + 2x - 1)\sqrt{(x^4 + x^2 - x + 67)^3}$$

$$F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{(x^4 + x^2 - x + 67)^5} + k, k \in \mathbb{R}.$$

Activité 3

Déterminons la primitive F de f sur K.

$$a) f(x) = \cos x \sin^5 x$$

$$F(x) = \frac{1}{6} \sin^6 x + k, k \in \mathbb{R}.$$

De plus, $F(0) = 3$, donc $k = 3$.

$$D'où F(x) = \frac{1}{6} \sin^6 x + 3, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$b) f(x) = \frac{\cos x}{\sin 2x}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right) + k, k \in \mathbb{R}.$$

Comme $F(\frac{\pi}{2}) = 3$, alors $k = 3$

$$D'où F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right) + 3, \forall x \in$$

$K =]0; \pi[$.

$$c) f(x) = \cos^4 x$$

Nous allons d'abord linéariser $\cos^4 x$.

En utilisant la formule d'Euler, on a :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\text{Donc } \cos^4 x = \frac{1}{16} (e^{ix} + e^{-ix})^4$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{16} (e^{i4x} + 4e^{i3x}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix})$$

$$= \frac{1}{16} [(e^{i4x} + e^{-i4x}) + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6]$$

$$= \frac{1}{16} (2\cos 4x + 8\cos 2x + 6)$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$$

On déduit que :

$$F(x) = \frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{4} x + k, k \in \mathbb{R}$$

$$\text{Comme } F(\frac{\pi}{2}) = 0, \text{ alors } k = -\frac{3\pi}{16}$$

$$D'où F(x) = \frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{4} x - \frac{3\pi}{16}, \\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$d) f(x) = (1 + \tan^2 x) \tan^5 x$$

$$F(x) = \frac{1}{6} \tan^6 x + k; k \in \mathbb{R}$$

Comme $F(0) = 1$, alors $k = 1$.

$$D'où F(x) = \frac{1}{6} \tan^6 x + 1, \forall x \in$$

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$e) f(x) = \cos^3 x \sin^2 x$$

Il faut linéariser cette expression et déduire que :

$$F(x) = -\frac{1}{16} \left(\frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{3} \sin 3x - 2 \sin x \right) + k, k \in \mathbb{R}.$$

Comme $F(0) = 1$, on déduit que $k = 1$.

$$D'où F(x) = -\frac{1}{16} \left(\frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{3} \sin 3x - 2 \sin x \right) + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Activité 4

1.) Preuve

$$f(x) = \frac{3x^3 - 14x^2 + 20x - 7}{(x-2)^2}$$

f est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ en tant que fonction rationnelle, par conséquent, elle admet une infinité de primitives sur cet intervalle.

2) Déterminons les nombres réels a, b et c

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$$

En rendant cette expression de f au même dénominateur, on déduit par identification que : $a = 3$, $b = -2$ et $c = 1$.

Soit $f(x) = 3x - 2 + \frac{1}{(x-2)^2}$.

3.) Primitives de f sur $]2; +\infty[$

$$f(x) = 3x - 2 + \frac{1}{(x-2)^2}$$

On en déduit que les primitives F de f sur $]2; +\infty[$, sont sous la forme :

$$F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{x-2} + k, k \in \mathbb{R}.$$

4.) Dédution

Toutes les primitives de f sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ sont les fonctions F .

On a : $0 \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $F(0) = 3$, donc $k = -\frac{1}{2}$

$$\text{D'où } F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{2}.$$

5.a) Déterminons g

f est une primitive de sa dérivée f' . D'où $g = f'$.

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f'(x) = 3 - \frac{2(x-2)}{(x-2)^4}$$

$$\text{Soit } g(x) = 3 - \frac{2(x-2)}{(x-2)^4}$$

b) g est une fonction rationnelle, par conséquent, elle est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. De ce fait, elle est une primitive de sa dérivée g' .

Nous pouvons donc dire qu'une autre fonction g' admet pour primitive g .

c) Conclusion

Nous pouvons conclure qu'une fonction, lorsqu'elle est définie et continue, admet une infinité de primitives et représente en même temps une primitive d'une autre fonction, lorsqu'elle est dérivable.

Activité 5

Il est clair que les différentes fonctions rationnelles données ne présentent pas une image des fonctions à primitives usuelles. De ce fait, nous allons nous allons, si c'est possible, décomposer ces fonctions en

fractions partielles puis déduire les primitives par la suite.

1.°) Pour cette fonction, on remarque que le **degré du monôme du numérateur est supérieur à celui du monôme du plus haut degré du dénominateur**. Nous allons alors effectuer une division euclidienne de x^3 par $x + 2$.

$$\text{On a : } f(x) = \frac{x^3}{x+2} = x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x+2}$$

On pourra ensuite déduire les primitives.

2.) Ici, **puisque le numérateur est une constante**, on ne peut pas faire une division euclidienne. On doit alors écrire le dénominateur comme produit de facteurs avant de faire la décomposition.

$$\text{On a : } \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)}$$

Les facteurs $x + 1$ et $x - 1$ étant de degré 1 et différent l'un de l'autre, alors leurs numérateurs doivent être des polynômes de degré 0.

On applique *le principe 1*.

Ainsi, $\frac{1}{x^2-1}$ peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}; A \text{ et } B \text{ étant des réels.}$$

Pour trouver les réels A et B , on peut rendre au dénominateur et procéder par la suite à une identification.

$$\text{On a : } \frac{1}{x^2-1} = \frac{(A+B)x + A - B}{x^2-1}$$

$$\text{Par identification, on a : } \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases}$$

$$\text{D'où } A = \frac{1}{2} \text{ et } B = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Par suite, } f(x) = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)}$$

On pourra en déduire les primitives.

3.) Par application du principe 1, déduit que, $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$ peut se mettre sous la forme :

$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$; A et B étant des réels.

Par identification, on obtient : $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ et $C = \frac{1}{2}$.

Donc
$$f(x) = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)}.$$

Les primitives s'en déduisent facilement !

4.°) $f(x) = \frac{5}{x(x-3)^2}$

Ici, il faut faire beaucoup attention !!!

On serait tenté d'écrire ici que

$\frac{5}{x(x-3)^2} = \frac{5}{x(x-3)(x-3)}$, ce qui est bien vrai et sous cette hypothèse, prétendre selon *le principe 1* que $\frac{5}{x(x-3)^2}$ peut se mettre sous la forme $\frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-3}$; **ce qui serait malheureusement faux.**

En effet, $\frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-3} = \frac{A}{x} + \frac{B+C}{x-3}.$

$B + C$ est une constante et nous remarquons que dans la décomposition $\frac{A}{x} + \frac{B+C}{x-3}$,

$x(x-3) \neq x(x-3)^2$, donc le principe 1 ne va pas s'appliquer ici et tel que mentionné ci-dessus on utilisera le principe 2 puisque $x(x-3)^2 = x(x-3)(x-3)$, (le facteur $x-3$ se repète deux fois)

Toutefois, nous pouvons accepter que $\frac{5}{x(x-3)^2} = \frac{5}{x(x^2-6x+9)}$ et donc on peut écrire selon *le principe 1* que notre fonction peut se mettre sous la forme :

$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-6x+9}$ et ensuite, on pourra déduire les réels A, B et C avec B non nul.

Mais comme il n'est pas toujours aisé de développer des facteurs à exposant élevé, **nous privilégions le principe 2 dans ces conditions.**

Ainsi donc, $\frac{5}{x(x-3)^2}$ peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

où A, B et C des réels à déterminer.

((Autre exemple : $\frac{x^2+1}{x(x^3+1)^2}$ peut se mettre sous la forme :

$\frac{A}{x} + \frac{Bx^2+Cx+D}{x^3+1} + \frac{B'x^2+C'x+D'}{(x^3+1)^2}$ où A, B, C, B', C' et D' sont des réels et B et B' non nuls.)))

5.) Le numérateur est un polynôme de degré supérieur à celui du polynôme du dénominateur. Une division euclidienne pourra marcher dans ce cas.

On trouve :

$$\frac{4x^3 + 2x^2 + 4x}{x^2 + 1} = 4x + 2 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

On ne peut pas écrire $\frac{2}{x^2+1}$ sous forme de fractions partielles parce qu'on ne peut pas factoriser $x^2 + 1$ dans IR. Il faudra faire d'autres transformations supplémentaires notamment le changement de variable pour trouver les primitives. Nous introduirons ce concept au niveau du calcul intégral.

6.) Les racines de $x^2 + 4x + 1$ n'annulent pas le dénominateur et comme -1 est une racine évidente du dénominateur, en faisant la division euclidienne de $x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ par $x + 1$, on obtient $x^2 + 2x + 2$.

Ainsi, notre fonction peut se mettre sous la forme : $\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$ où A, B et C sont des réels et B non nul.

On trouve:

$$\frac{x^2 + 4x + 1}{x^3 + 3x^2 + 4x + 2} = -\frac{2}{x+1} + \frac{3x+5}{x^2+2x+2}$$

La division euclidienne de $x^2 + 2x + 2$ par $3x + 5$ ne nous donne bien sur rien d'utile. D'autres transformations supplémentaires tels que mettre le dénominateur **sous forme**

canonique et procéder par la suite à un changement de variable, pourront conduire à bon port... Nous en parlerons plus loin.

Séquence 7 : Fonction logarithme népérien

Activité 1

1°) **Écriture simple de :**

a) $A = \ln(\sqrt{3} + 1) + \ln(\sqrt{3} + 1)$

$$A = \ln[(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)]$$

A = ln 2

b) $B = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+2}{2}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{5}-2}{2}\right)$

$$B = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+2}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5}-2}\right)$$

$$\boxed{B = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right)}$$

2) Résolvons les équations et inéquations suivantes

a) $\ln(x^2 - x - 1) = 0$

Cette équation équivaut à :

$$x^2 - x - 1 = 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

On en déduit l'ensemble solution **S = {-1 ; 2}**.

b) $\ln(x + 3) + \ln(x + 5) = \ln 45$

Cette équation équivaut à $\ln[(x + 3)(x + 5)] = \ln 45$ avec $x + 3 > 0$ et $x + 5 > 0$

$$\Rightarrow (x + 3)(x + 5) = 45$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x - 30 = 0$$

On déduit que l'ensemble solution est

$$\underline{\underline{S = \{\sqrt{45} - 4\}}}$$

c) $\ln|2x - 5| - \ln|x + 1|$

Cette équation équivaut à $\ln\left|\frac{2x-5}{3x+2}\right| = |x + 1|$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{2x-5}{3x+2}\right| = |x + 1|$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-5}{3x+2} = x + 1 \text{ ou } \frac{2x-5}{3x+2} = x - 1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3x + 7 = 0 \text{ ou } 3x^2 + 7x - 3 = 0$$

On en déduit que l'ensemble solution est la réunion des solutions de ces deux équations.

d) $\ln(x + 2) \leq \ln(x + 3)$

Cette inéquation équivaut à $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x + 2 \leq x + 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in]-2 ; +\infty[$$

L'ensemble solution est donc

$$\underline{\underline{S =]-2 ; +\infty[}}$$

e) $\ln(x + 4) + \ln(2 - x) > \ln(3x + 2)$

Cette inéquation équivaut à :

$$\begin{cases} x + 4 > 0 \\ 2 - x > 0 \\ 3x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ln[(x + 4)(2 - x)] > \ln(3x + 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x < 2 \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ x^2 + 5x - 6 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{2}{3}\right] \\ x \in]-6 ; 1[\end{cases}$$

D'où l'ensemble solution est **S =]-\frac{2}{3} ; 1[**.

3) Preuve

a) $\ln(1 + x) = \ln\left[x\left(\frac{1}{x} + 1\right)\right]$

Soit $\ln(1 + x) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

d) $\ln\left(\frac{x+\sqrt{3}}{4x^3}\right) = \ln\left[\frac{\sqrt{3}}{4x^2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{4x^2}\right) + \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{x^2}\right) + \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \ln\frac{1}{x^2} + \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \ln x^{-2} + \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\text{Soit } \ln\left(\frac{x+\sqrt{3}}{4x^3}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) - 2\ln x + \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Activité 2**Domaine de définition et limites aux bornes de D**

$$1) f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$$

Domaine de définition de f

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } x + 1 \neq 0\}$$

$$x > 0 \Leftrightarrow x \in]0; +\infty[$$

$$x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \cap]0; +\infty[$$

$$\text{Soit } D =]0; +\infty[$$

Limites de f aux bornes de D

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x+1} = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x+1 = 1 \end{cases}$$

$$\text{On a donc : } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f = 0}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} \ln x$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

$$2) f(x) = (1-x)^2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Domaine de définition D

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } 1-x \neq 0 \text{ et } \frac{1+x}{1-x} > 0\}$$

$$\text{Posons : } 1-x = 0 \text{ et } 1+x = 0$$

$$\text{On a : } x = 1 \text{ et } x = -1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
1-x	+	+	0	-
1+x	-	0	+	+
$\frac{1+x}{1-x}$	-	0	+	-

$$\frac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x \in]-1; 1[$$

$$\text{D'où } D =]-1; 1[$$

Limites de f aux bornes de D

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f = \lim_{x \rightarrow -1^+} (1-x)^2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (1-x)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\text{Posons : } X = 1-x$$

$$\text{Quand } x \rightarrow 1^-, \text{ on a } x \rightarrow 0$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \left[X^2 \ln\left(\frac{2-X}{X}\right) \right]$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0^+} [X^2 \ln(2-X) - X^2 \ln X] = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0} \text{ car } \begin{cases} \lim_{X \rightarrow 0^+} X^2 \ln X = 0 \\ \lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(2-X) = \ln 2 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \ln(x + \sqrt{3x^2 - 4})$$

Domaine de définition D

$$D = \{x \in \mathbb{R} / 3x^2 - 4 \geq 0 \text{ et } x + \sqrt{3x^2 - 4} > 0\}$$

$$\text{Résolvons : } x + \sqrt{3x^2 - 4} > 0$$

$$x + \sqrt{3x^2 - 4} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 4} > -x$$

$$\Leftrightarrow S_1 : \begin{cases} 3x^2 - 4 > 0 \\ -x < 0 \end{cases} \text{ ou } S_2 : \begin{cases} -x > 0 \\ 3x^2 - 4 > x^2 \end{cases}$$

$$\checkmark S_1 : \begin{cases} 3x^2 - 4 > 0 \\ -x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4 > 0 \\ x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

$$\text{Posons : } 3x^2 - 4 = 0$$

$$\text{On a : } x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ ou } x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{On en déduit que } 3x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x \in$$

$$]-\infty; -\frac{2\sqrt{3}}{3}[\cup]\frac{2\sqrt{3}}{3}; +\infty[$$

Ainsi, S_1 devient : $\begin{cases} x \in]-\infty; -\frac{2\sqrt{3}}{3}[\cup]\frac{2\sqrt{3}}{3}; +\infty[\\ x \in]0; +\infty[\end{cases}$

S_1 a donc pour solution $x \in]\frac{2\sqrt{3}}{3}; +\infty[$.

$$\checkmark S_2 : \begin{cases} -x > 0 \\ 3x^2 - 4 > x^2 \end{cases}$$

On résout de même S_2 qui a pour ensemble solution : $] -\infty; -\sqrt{2}[$.

En conséquence, $x + \sqrt{3x^2 - 4} > 0 \Leftrightarrow$

$$x \in S =]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]\frac{2\sqrt{3}}{3}; +\infty[$$

$$D' \text{ où } D =]-\infty; -\frac{2\sqrt{3}}{3}[\cup]\frac{2\sqrt{3}}{3}; +\infty[\cap S$$

Soit

$$D =]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]\frac{2\sqrt{3}}{3}; +\infty[$$

Limites de f aux bornes de D

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x + \sqrt{3x^2 - 4})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 + 4}{x - \sqrt{3x^2 - 4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + \frac{4}{x}}{1 + \sqrt{3 - \frac{4}{x^2}}}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \sqrt{3 - \frac{4}{x^2}} = 1 + \sqrt{3} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x + \frac{4}{x} = +\infty \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + \sqrt{3x^2 - 4}) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \ln(x + \sqrt{3x^2 - 4}) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3}} \ln(x + \sqrt{3x^2 - 4}) = \ln\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$4) f(x) = x(\ln x)^2$$

Domaine de définition

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$$

$$\text{Soit } D =]0; +\infty[$$

Limites de f aux bornes de D

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} \ln x)^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{\frac{1}{2}} \ln x)^2 = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0} \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0, r \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x)^2 = +\infty$$

$$5) f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } 1 + \frac{1}{x} > 0\}$$

$$\text{On trouve } D =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$$

Limites de f aux bornes de D

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \\ -\infty \times (-1) = +\infty \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \end{cases}$$

$$6) f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 1}$$

Domaine de définition D

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \ln x + 1 \neq 0 \text{ et } \ln x > 0\}$$

On trouve $D =]0; e^{-1}[\cup]e^{-1}; +\infty[$

Limites de f aux bornes de D

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{\ln x - 2}{\ln x + 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x+1} = 1 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow e^{-1} \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow e^{-1} \\ <}} \frac{\ln x - 2}{\ln x + 1}$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow e^{-1} \\ <}} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow e^{-1} \\ <}} (\ln x - 2) = -3 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow e^{-1} \\ <}} \ln x + 1 = 0^- \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow e^{-1} \\ >}} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow e^{-1} \\ >}} (\ln x - 2) = -3 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow e^{-1} \\ >}} \ln x + 1 = 0^+ \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+1} = 1 \end{cases}$$

$$7) f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

Domaine de définition D

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x^2 \neq 0 \text{ et } x + 1 > 0\}$$

Soit $D =]-1; 0[\cup]0; +\infty[$

Limites de f aux bornes de D

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} \frac{\ln(x+1)}{x^2} = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} f(x) = -\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} \ln(x+1) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ >}} \frac{1}{x^2} = 1 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} \left[\frac{1}{x} \times \frac{\ln(x+1)}{x} \right] = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} f(x) = -\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} \frac{1}{x} = -\infty \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \left[\frac{1}{x} \times \frac{\ln(x+1)}{x} \right] = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2} \times \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2} = 0 \end{cases}$$

$$8) f(x) = x \ln(1 + \frac{1}{x^2})$$

Domaine de définition D

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x^2 \neq 0\}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Limites de f aux bornes de D

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x}} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}} \times \frac{1}{x} \right] = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}} \times \frac{1}{x} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x [\ln(x^2 + 1) - \ln x^2] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln x] \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x^2 + 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} [x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln |x|] \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln(x^2 + 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln |x| = 0 \end{cases}$$

$$9) f(x) = (\sqrt{x} - 2)^2 \ln \left(1 - \frac{e}{x} \right)$$

Domaine de définition D

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x > 0 \text{ et } 1 - \frac{e}{x} > 0\}$$

Soit $D =]e; +\infty[$

Limites de f aux bornes de D

$$\bullet \lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} (\sqrt{x} - 2)^2 \ln \left(1 - \frac{e}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = -\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow e^+} \left(1 - \frac{e}{x} \right) = 0 \\ \lim_{X \rightarrow 0^+} \ln X = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow e^+} (\sqrt{x} - 2)^2 = (\sqrt{e} - 2)^2 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - 2)^2 \ln \left(1 - \frac{e}{x} \right)$$

$$\text{Posons : } X = 1 - \frac{e}{x}$$

$$\text{On a : } x = \frac{e}{1-X}$$

$$\text{Quand } x \rightarrow +\infty, X \rightarrow 1$$

Ainsi, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow 1} \left[\left(\sqrt{\frac{e}{1-X}} - 2 \right)^2 \ln X \right]$$

$$= \lim_{X \rightarrow 1} \left[(-\sqrt{e} - 2\sqrt{1-X})^2 \times \frac{\ln X}{X-1} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{X \rightarrow 1} \frac{\ln(X)}{X-1} = 1 \\ \lim_{X \rightarrow 1} (-\sqrt{e} - 2\sqrt{1-X})^2 = e \end{cases}$$

$$10) f(x) = \frac{\ln(x^2 - 3x + 2)}{\sqrt{x} - 1}$$

Domaine de définition

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x - 1 > 0 \text{ et } x^2 - 3x + 2 > 0\}$$

$D =]2; +\infty[$

Limites de f aux bornes de D

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\ln(x^2 - 3x + 2)}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x} - 1 = 1 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln[(x-1)(x-2)]}{\sqrt{x} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x}-1} + \frac{\ln(x-2)}{\sqrt{x}-1} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x}-1} + \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} \times \frac{\ln(x-2)}{\sqrt{x}-2} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} = 1 \end{cases}$$

Activité 3

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Partie A**1.a) Etudions le sens de variation de g**

$$g(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$$

g est définie, continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme étant somme algébrique des fonctions $x \mapsto \ln(x+2)$; $x \mapsto \ln x$; $x \mapsto \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$ toutes continues et dérivables sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x \in]0; +\infty[, \text{ on a : } g'(x) = -\frac{4}{x(x+2)^2}$$

Puisque $-4 < 0$ et $x(x+2)^2 > 0 \forall x \in]0; +\infty[$, alors $g'(x) < 0, \forall x \in]0; +\infty[$.

Il en résulte que g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

b) Déterminons la limite de g en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4} \right]$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{4}} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+2} = 0 \end{cases}$$

c) Dédisons-en le signe de g(x)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

Puisque g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, alors $g(]0; +\infty[) =]\frac{1}{4}; +\infty[$.

Par conséquent, $g(x) > 0, \forall x \in]0; +\infty[$.

2. Démonstration

Puisque g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, alors si $x \in [2; 3]$, on a :

$$g(3) < g(x) < g(2). \text{ Soit } g(x) < g(2).$$

$$\text{On a } \begin{cases} g(3) \approx 0,36 \\ g(2) \approx 0,44 < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{On a } g(2) < \frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } \forall x \in [2; 3], \text{ on a : } g(x) < \frac{1}{2}.$$

Partie B**3.a) Déterminons la limite de $x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ en 0^+**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln(x+2) - x \ln x]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x+2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \end{cases}$$

b) Démontrons que f est continue en 0.

$$\text{On a } f(0) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\text{On a donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \frac{1}{2}$$

Par conséquent f est continue en 0.

4) Etudions la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{1}{4} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty, \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable en 0.}$$

Interprétation graphique du résultat.

(c) admet à droite au point $A(0; \frac{1}{2})$ une demi-tangente définie par : $\begin{cases} x = 0 \\ y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

5) Etudions le sens de variation de f.

f est définie et continue sur $[0; +\infty[$ puis dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x).$$

$$f'(x) > 0 \text{ car } \forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0.$$

En conséquence, f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

6.a) Démonstration

Posons : $X = \frac{2}{x}$

Si $x \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) = \lim_{X \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\ln(X+1)}{X}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) = 2 \text{ car } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(X+1)}{X} = 1$$

b) Dédution

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} + \frac{1}{2} = +\infty \end{cases}$$

c) Démonstration

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) - 2 \right]$$

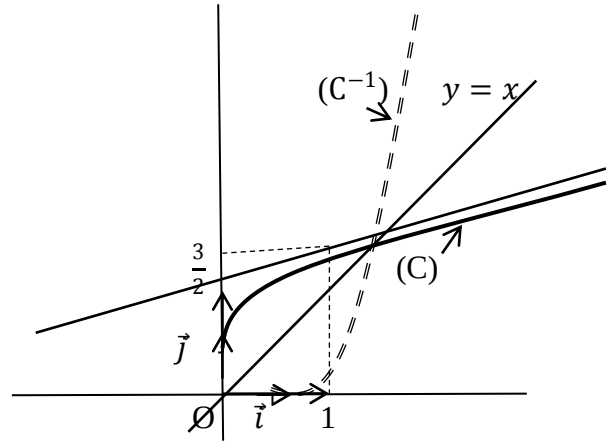
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) = 2$$

(Δ) est donc une asymptote à (c) au voisinage de $+\infty$.

7. Traçons la courbe (c)

L'étude des variations de f se résume dans le tableau ci-contre :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$



8.a) Démonstration

f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[0; +\infty[$ vers $K = f([0; +\infty[= [\frac{1}{2}; +\infty[$.

b) Tracé de (c') : voir figure

c) Démontrons que le point $A'(1+\ln 4; 2)$ appartient à (C') .

$$f(2) = 2 \ln 2 + 1 = \ln 4 + 1, \text{ donc}$$

$$f^{-1}(\ln 4 + 1) = 2$$

Par conséquent le point $A'(1+\ln 4; 2)$ appartient à (C') .

d) Calculons $(f^{-1})'(1+\ln 4)$.

$$f^{-1}(1 + \ln 4) = \frac{1}{f'[f^{-1}(1+\ln 4)]} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{g(2)}$$

$$\text{Soit } f^{-1}(1 + \ln 4) = \frac{4}{4 \ln 2 - 1}.$$

Partie C

9. a) Démontrons que pour tout x élément de I , $h'(x) < 0$.

$$h(x) = f(x) - x$$

h est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I, h'(x) = f'(x) - 1 = g(x) - 1$$

De ce qui précède, $\forall x \in I, g(x) < \frac{1}{2}$

Donc $g(x) - 1 < -\frac{1}{2}$. Soit $g(x) - 1 < 0$ car $-\frac{1}{2} < 0$.

D'où $h'(x) < 0, \forall x \in I$

b $h'(x) < 0, \forall x \in I$, donc h est strictement décroissante sur I .

c) Démonstration

h est continue et strictement décroissante sur I .

Elle réalise donc une bijection de I vers

$h(I) = [3\ln\frac{5}{3} - \frac{7}{4}; \ln 4 - 1]$. Or $0 \in h(I)$, donc

l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique dans I .

10.a) Démontrons que pour tout x de I ,

$$0 < f'(x) < \frac{1}{2}$$

Il est clair que $\forall x \in I, g(x) > 0$. De plus, $\forall x \in I, g(x) < \frac{1}{2}$.

On a donc $0 < g(x) < \frac{1}{2}$. Or $f'(x) = g(x)$, d'où

$$\forall x \in I, 0 < f'(x) < \frac{1}{2}.$$

b) Dédisons-en que pour tout x de I ,

$$|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

$$\Rightarrow \text{On a } 0 < f'(x) < \frac{1}{2} \Rightarrow |f'(x)| < \frac{1}{2}$$

f est dérivable sur I .

On a $\alpha \in I$. Soit $x \in I$.

En appliquant le théorème des accroissements finis entre α et x , on a :

$$|f(x) - f(\alpha)| < \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

$$\text{Or } h(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\alpha) - \alpha = 0$$

$$\text{Soit } f(\alpha) = \alpha$$

$$\text{D'où } |f(x) - \alpha| < \frac{1}{2}|x - \alpha|.$$

11) Démontrons que $(f^{-1})'(\alpha) = \frac{2\alpha(\alpha+2)}{2\alpha^2 - \alpha - 2}$

$$(f^{-1})'(\alpha) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\alpha))}$$

$$\text{On a } f(\alpha) = \alpha, \text{ donc } (f^{-1})(\alpha) = \alpha$$

$$\text{D'où } (f^{-1})'(\alpha) = \frac{1}{f'(\alpha)} = \frac{1}{g(\alpha)}$$

$$f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \alpha \ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) + \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2} = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow g(\alpha) + \frac{2}{\alpha+2} = \frac{2\alpha-1}{2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow g(\alpha) = \frac{2\alpha^2 - \alpha - 2}{2\alpha(\alpha+2)}$$

$$\text{D'où } g(\alpha) = \frac{2\alpha(\alpha+2)}{2\alpha^2 - \alpha - 2}$$

Activité 4

1a) Déterminons l'ensemble de définition D de f .

$$\begin{cases} f(x) = (x-2)^2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) \text{ si } x \neq 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x-2 \neq 0 \text{ et } \frac{x-1}{x-2} > 0\} \cup \{2\}$$

$$D =]-\infty; 1[\cup [2; +\infty[$$

b) Calculons les limites de f aux bornes de D .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)^2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$

$$\text{Posons : } X = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\text{On a } x = \frac{2X-1}{X-1}; \text{ quand } x \rightarrow -\infty, X \rightarrow 1^-.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow 1^-} \left(\frac{2X-1}{X-1} - 2\right) \ln X$$

$$= \lim_{X \rightarrow 1^-} \left[\frac{\ln X}{X-1} \times \frac{1}{X-1} \right] = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{X \rightarrow 1^-} \frac{1}{X-1} = -\infty \\ \lim_{X \rightarrow 1^-} \frac{\ln X}{X-1} = 1 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow 1^+} \left[\frac{\ln X}{X-1} \times \frac{1}{X-1} \right] = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ <}} (x-2)^2 \ln \left(\frac{x-1}{x-2} \right) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ >}} f = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ >}} [(x-2)^2 \ln(x-1) - (x-2)^2 \ln(x-2)]$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ >}} f(x) = 0} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ >}} (x-2)^2 \ln(x-2) = 0 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ >}} (x-2)^2 \ln(x-1) = 0 \end{cases}$$

c) Justifions que f est continue sur D.

Les fonctions $x \mapsto \frac{x-1}{x-2}$; $x \mapsto (x-2)^2$ sont continues sur $D \setminus \{2\}$ en tant que, respectivement, fonction rationnelle et polynôme.

$\forall x \in D \setminus \{2\}$, $\frac{x-1}{x-2} > 0$, donc la fonction

$x \mapsto \ln \left(\frac{x-1}{x-2} \right)$ est continue sur $D \setminus \{2\}$.

Par conséquent la fonction $f: x \mapsto$

$(x-2)^2 \ln \left(\frac{x-1}{x-2} \right)$ est continue sur $D \setminus \{2\}$.

Comme de plus f est continue en 2, alors elle est continue sur D.

d) Etudions la dérivabilité de f à droite en 2

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ >}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ >}} \left[(x-2) \ln \left(\frac{x-1}{x-2} \right) \right]$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ >}} [(x-2) \ln(x-1) - (x-2) \ln(x-2)]$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ >}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 0, 0 \in \mathbb{R}, \text{ donc } f \text{ est}$$

dérivable à droite en 2 et $f'_d(2) = 0$.

Interprétation graphique du résultat

(c) admet au point A(2 ; 0) une tangente d'équation :

$$y = f'_d(2)(x-2) + f(2)$$

Soit (T) : $y = 0$.

2. a) Etudions les variations de g.

$$g(x) = 2 \ln \left(\frac{x-1}{x-2} \right) - \frac{1}{x-1}$$

g est définie, continue et dérivable sur

$] -\infty; 1[\cup]2; +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in] -\infty; 1[\cup]2; +\infty[, g'(x) = \frac{-x}{(x-2)(x-1)^2}$$

Comme pour tout x, $(x-1)^2 > 0$ alors $g'(x)$

a le signe de $\frac{-x}{x-2}$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \forall x \in] -\infty; 0[\cup]2; +\infty[, g'(x) < 0 \\ \forall x \in]0; 1[, g'(x) > 0 \\ \text{Si } x = 0, g'(x) = 0 \end{cases}$$

Il en résulte que g est strictement décroissante sur chacun des intervalles $] -\infty; 0[$ et $]2; +\infty[$ puis strictement croissante sur $]0; 1[$.

Limites de g aux bornes de D

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln \left(\frac{x-1}{x-2} \right) - \frac{1}{x-1} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln \left(\frac{x-1}{x-2} \right) - \frac{1}{x-1} = 0$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ <}} 2 \ln \left(\frac{x-1}{x-2} \right) - \frac{1}{x-1}$$

$$\text{Posons : } X = \frac{x-1}{x-2}$$

On a $x = \frac{2X-1}{X-1}$; quand $\substack{x \rightarrow 1 \\ <}, \substack{X \rightarrow 0 \\ >}$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ >}} \left[2 \ln X - \frac{2X-1}{X} \right]$$

$$= \lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ >}} \frac{1}{X} [2X \ln X - 2X + 1]$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ >}} g(x) = +\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ >}} \frac{1}{X} = +\infty \\ \lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ >}} X \ln X = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ >}} 2 \ln \left(\frac{x-1}{x-2} \right) - \frac{1}{x-1} = +\infty$$

L'étude des variations de g se résume dans le tableau ci-contre :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$\circ$	$+$		$-$
$g(x)$	0	$2\ln\frac{1}{2} + 1$			0

b) Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0,6 < \alpha < 0,61$.

- ☞ g est continue et strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$. Elle réalise donc une bijection de $] -\infty; 0]$ vers $[2\ln\frac{1}{2} + 1; 0]$.
Comme $0 \notin [2\ln\frac{1}{2} + 1; 0]$, alors $g(x) = 0$ n'admet aucune solution dans $] -\infty; 0]$. (1)
- ☞ g est continue et strictement croissante sur $[0; 1[$. Elle réalise donc une bijection de $[0; 1[$ vers $[2\ln\frac{1}{2} + 1; +\infty[$. Comme $0 \in [2\ln\frac{1}{2} + 1; +\infty[$, alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0; 1[$. (2)
- ☞ g est continue et strictement décroissante sur $]2; +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]2; +\infty[$ vers $]0; +\infty[$. Comme $0 \notin]0; +\infty[$, alors $g(x) = 0$ n'admet aucune solution dans $]2; +\infty[$. (3)

De (1), (2) et (3), l'équation $g(x) = 0$ admet exactement une solution unique α dans son ensemble de définition.

Montrons que $0,6 < \alpha < 0,61$.

$\alpha \in [0; 1[$ et $[0,6; 0,61] \subset [0; 1[$

$$\begin{cases} g(0,6) \approx \\ g(0,61) \approx \end{cases} \Rightarrow g(0,6) \times g(0,61) < 0$$

D'où $0,6 < \alpha < 0,61$.

c) Signe de $g(x)$

De tout ce qui précède,

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; 1[\cup]2; +\infty[, g(x) > 0 \\ \text{Pour } x = \alpha, g(x) = 0 \end{cases}$$

3.a) Justifions que f est dérivable sur D

Les fonctions $x \mapsto \frac{x-1}{x-2}$; $x \mapsto (x-2)^2$ sont dérivables sur $D \setminus \{2\}$ en tant que ,respectivement, fonctions rationnelle et polynôme.

$\forall x \in D \setminus \{2\}, \frac{x-1}{x-2} > 0$, donc la fonction

$x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ est dérivable sur $D \setminus \{2\}$.

Par conséquent la fonction $f: x \mapsto$

$(x-2)^2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ est dérivable sur $D \setminus \{2\}$.

Comme de plus f est dérivable en 2, alors elle est dérivable sur D .

Montrons que $\forall \epsilon \in D \setminus \{2\}$

On dérive f sur $D \setminus \{2\}$, et on trouve :

$$f'(x) = (x-2) \left[2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) - \frac{1}{x-1} \right]$$

$$\text{Soit } f'(x) = (x-2)g(x)$$

b) Sens de variation de f

On déduit de tout ce qui précède que :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[\cup]2; +\infty[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; 1[, f'(x) < 0 \\ \text{Si } x = 2 \text{ ou } x = \alpha, f'(x) = 0 \end{cases}$$

Il en résulte que f est strictement croissante sur $] -\infty; \alpha] \cup [2; +\infty[$ et strictement décroissante sur $] \alpha; 1[$.

c) Démontrons que $f(\alpha) = \frac{(2-\alpha)^2}{2(\alpha-1)}$

$$f(\alpha) = (\alpha-2)^2 \ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\right)$$

$$\text{Or } g(\alpha) = 0, \text{ donc } 2 \ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\right) - \frac{1}{\alpha-1} = 0$$

$$\text{Soit } \ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\right) = \frac{1}{2(\alpha-1)}$$

$$\text{Par suite, } f(\alpha) = (\alpha-2)^2 \times \frac{1}{2(\alpha-1)}$$

$$\text{Soit } f(\alpha) = \frac{(2-\alpha)^2}{2(\alpha-1)}$$

Déduisons-en un encadrement de $f(\alpha)$ avec deux nombres décimaux d'ordre deux.

On a : $0,6 < \alpha < 0,61$

On en déduit que :

$$1,9321 < (2 - \alpha)^2 < 1,96 \quad (1)$$

$$\left\{ \frac{1}{0,8} < \frac{1}{2(\alpha-1)} < \frac{1}{0,78} \right. \quad (2)$$

$$(1) \times (2) \text{ donne : } -2,512 < f(\alpha) < -2,418$$

A l'ordre 2, on a : $\underline{-2,50} < f(\alpha) < \underline{-2,42}$.

4.a) Donnons le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $h \rightarrow \ln(1+h)$.

Soit $E(h) = \ln(1+h)$

$$E(h) = E(0) + h.E'(0) + \frac{h^2}{2!}E''(0) + \frac{h^3}{3!}E'''(0) + h^3\varepsilon(h)$$

$$\text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} h^3\varepsilon(h) = 0.$$

E est plus d'une fois dérivable en 0 et on a :

$$E'(h) = \frac{1}{1+h}; \quad E''(h) = -\frac{1}{(1+h)^2} \text{ et } E'''(h) = \frac{2}{(1+h)^3}$$

On en déduit que $E'(0)=1$; $E''(0)=-1$ et

$$E'''(0) = 2.$$

On remplace et on trouve :

$$E(h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + h^3\varepsilon(h)$$

$$\text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} h^3\varepsilon(h) = 0.$$

b) Démonstration

$$f(x) - y = (x-2)^2 \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) - x + \frac{5}{2}$$

$$\text{Posons : } h = \frac{1}{x-2}$$

$$\text{On a : } x = \frac{1}{h} + 2; \text{ si } x \rightarrow \mp\infty, h \rightarrow 0$$

Ainsi, on a :

$$f(x) - y = \left(\frac{1}{h}\right)^2 \ln(1+h) - \frac{1}{h} + \frac{1}{2} + h^3\varepsilon(h)$$

$$\text{On trouve } f(x) - y = \frac{h}{3}$$

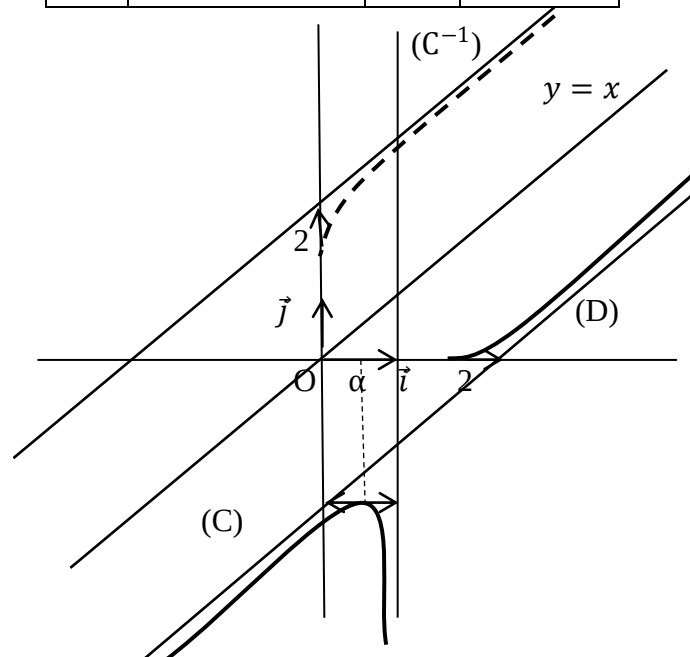
$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} [f(x) - y] = 0$$

Par conséquent, la droite d'équation $y = x - \frac{5}{2}$ est asymptote à la courbe (C) de f au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

c) Construisons (c)

L'étude des variations de f se résume dans le tableau ci-après.

x	$-\infty$	α	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	$\circ$	-	0	+
$g(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$		0	$+\infty$

**5.a) Justifions que k est bijective.**

$$k: [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto k(x) = f(x).$$

f est continue et strictement croissante sur $[2; +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[2; +\infty[$ vers $[0; +\infty[$. Comme k est la restriction de f à l'intervalle $[2; +\infty[$, alors k réalise une bijection de $[2; +\infty[$ vers $[0; +\infty[$. k est donc bijective.

b) Etudions la dérivabilité de k^{-1}

Soit E l'ensemble de dérivabilité de k^{-1}

$$E = [0; +\infty[\setminus \{f(x) \text{ tq } f'(x) = 0\}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ et } f(2) = 0$$

Donc $E = [0; +\infty[\setminus \{0\} =]0; +\infty[$.

k^{-1} est dérivable en tout point de $E =]0; +\infty[$.

b) Justification

On $f(3) = \ln 2$ et donc $f^{-1}(\ln 2) = 3$

Soit $k^{-1}(\ln 2) = 3$, d'où $A(\ln 2; 3) \in (c')$.

Equation cartésienne de la tangente à (c') en A

Cette tangente est définie analytiquement par :

$$y = (k^{-1})'(\ln 2)(x - 2) + k^{-1}(\ln 2)$$

$$(k^{-1})'(\ln 2) = \frac{1}{(k^{-1})'[k^{-1}(\ln 2)]} = \frac{1}{f'(3)} = \frac{2}{4\ln 2 - 1}$$

$$\text{D'où } y = \frac{2}{4\ln 2 - 1}x - \frac{2\ln 2}{4\ln 2 - 1} + 3.$$

d) Construction de (c') : voir figure

Activité 5

1.) Déterminons le domaine de définition D de f

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x + 2 \neq 0 \text{ et } \frac{|x|}{x+2} > 0\}$$

$$\text{Soit } D =]-2; 0[\cup]0; +\infty[$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(x + 1 + \ln \left(\frac{|x|}{x+2} \right) \right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + 1 + \ln \left(\frac{|x|}{x+2} \right) \right) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + 1 + \ln \left(\frac{|x|}{x+2} \right) \right) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 + \ln \left(\frac{|x|}{x+2} \right) \right) = +\infty$$

2)a. Justifions que f est dérivable en tout nombre réel de D

La fonction $x \mapsto x + 1$ est dérivable sur D en tant que fonction polynôme. La fonction

$x \mapsto \frac{|x|}{x+2}$ est dérivable sur D et $\forall x \in D$,

$\frac{|x|}{x+2} > 0$, donc la fonction $\ln\left(\frac{|x|}{x+2}\right)$ est dérivable sur D.

Par conséquent, la fonction

$f: x \mapsto x + 1 + \ln\left(\frac{|x|}{x+2}\right)$ est dérivable sur D.

$$\forall x \in D, f'(x) = (x + 1 + \ln|x| -$$

$$\ln(x + 2))' = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$$

$$\text{On trouve } f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x(x+2)}$$

b) Variations de f

On établit que $\begin{cases} \forall x \in]-2; 0[, f'(x) < 0 \\ \forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0 \end{cases}$

En conséquence, f est strictement décroissante sur $]-2; 0[$ puis strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Tableau de variation de f

x	-2	0	+\infty
f'(x)		-	+
f(x)	+\infty		+\infty
		↘	↗
		-\infty	-\infty

c) Démontrons que l'équation f(x) = 0 admet deux solutions dont l'une est -1 et l'autre a.

- La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-2; 0[$. Elle réalise donc une bijection de $]-2; 0[$ vers $\mathbb{R}$. Comme 0 $\in \mathbb{R}$, alors $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-2; 0[$. (1)
- f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]0; +\infty[$ vers $f(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$. Comme 0

$\in \mathbb{R}$, alors $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0; +\infty[$. (2)

On déduit de (1) et (2) que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans D .

Vérification

$-1 \in]-2; 0[$ et $f(-1) = 0$, donc -1 est l'une des solutions.

0,5 et 0,6 appartiennent à $]0; +\infty[$

$$\text{et } \begin{cases} f(0,5) \approx -0,1 \\ f(0,6) \approx 2,76 \end{cases} \Rightarrow f(0,5) \times f(0,6) < 0$$

D'où $0,5 < \alpha < 0,6$

d) Déterminons une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) en -1

Cette tangente a pour équation :

$$y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$$

On trouve $y = -x - 1$.

3. a) Etudions le sens de variation de g.

g est définie, continue et dérivable sur $] -2; 0[$

$$\text{et on a } \forall x \in] -2; 0[, g'(x) = \frac{2(x+1)^2}{x(x+2)}$$

$g'(x) < 0 \forall x \in] -2; 0[$, donc g est strictement décroissante sur $] -2; 0[$.

b) Calculons g(-1) et déduisons-en le signe de g(x) pour tout x élément de $] -2; 0[$.

$$g(-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \forall x \in] -2; -1[, g(x) > 0 \\ \forall x \in] -1; 0[, g(x) < 0 \\ \text{Pour } x = -1, g(x) = 0 \end{cases}$$

c) Précisons la position relative de la courbe (C) et de la tangente (T) sur l'intervalle $] -2; 0[$.

On a $f(x) - y = g(x)$.

De tout ce qui précède, (c) est au-dessus de (T) sur $] -2; -1[$, en dessous de (T) sur $] -1; 0[$ puis coïncide avec (T) pour $x = -1$.

4)a. Etudions les branches infinies de (C).

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \text{ donc } < >$$

Les droites d'équations $x = 0$ et $x = -2$ sont des asymptotes à (c).

$$\bullet \text{ On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et comme

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 1$, alors la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (c) au voisinage de $+\infty$.

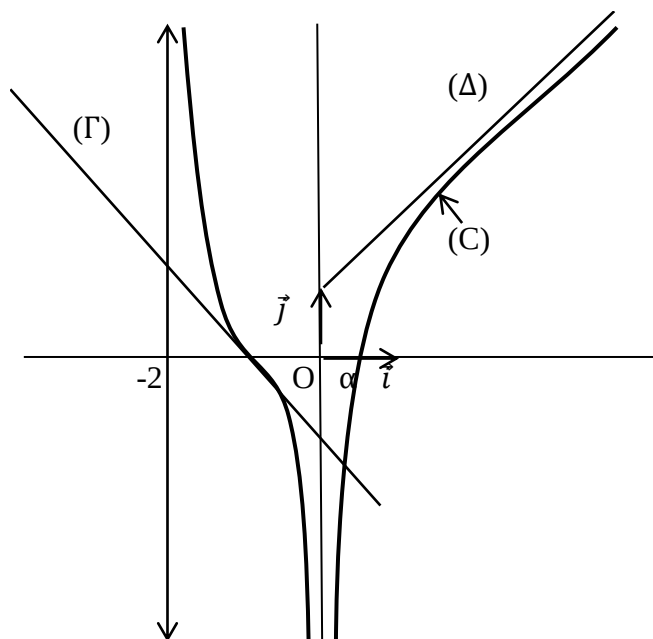
b) Etudions sur $]0; +\infty[$, la position relative de la courbe (C) et de la droite (Δ)

$$f(x) - y = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, 0 < \frac{x}{x+2} < 1$$

Donc $\ln\left(\frac{x}{x+2}\right) < 0$. Soit $f(x) - y < 0$. (c) est donc en dessous de (Δ) sur $]0; +\infty[$.

c) Construction



Activité 6

Partie A

1.a) Etudions les variations de g.

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2 + 1}$$

g est définie, continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)^2}$$

On déduit que $g'(x) < 0 \forall x \in]0; 1[$,
 $g'(x) > 0 \forall x \in]1; +\infty[$ et $g'(x) = 0$ si $x = 1$.

On conclut que g est strictement décroissante sur $]0; 1]$ puis strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

On en déduit le tableau de variations ci-contre.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$	$+\infty$	$\ln 2 - 1$	0

b) Dédisons-en que l'équation $g(x)=0$, admet une unique solution α et que $0,5 < \alpha < 0,6$.

Nous avons déjà répondu plusieurs fois à cette question. C'est toujours le même raisonnement. Il faut se prononcer sur la continuité et la monotonie de g par intervalle et trouver l'unique solution α compris entre 0,5 et 0,6.

2) Déterminons le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

On déduit de tout ce qui précède que :

$$\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \\ \text{Pour } x = \alpha, g(x) = 0 \end{cases}$$

Partie B

3.a) Démonstration

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$\text{Soit } f'(x) = g(x)$$

b) Sens de variation de f

On déduit de ce qui précède que f est strictement croissante sur $]0; \alpha]$ puis strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

4.a) Calcul de la limite

$$\text{Posons : } h = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Si } x \rightarrow +\infty, h \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} = 1$$

b) Dédisons – en que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k(x)}{x} = 0$$

5.a) Démontrons que f est continue à droite en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln x] = 0$$

Comme $f(0) = 0$, alors f est continue à droite en 0.

b) Etudions la dérivabilité de f à droite en 0.

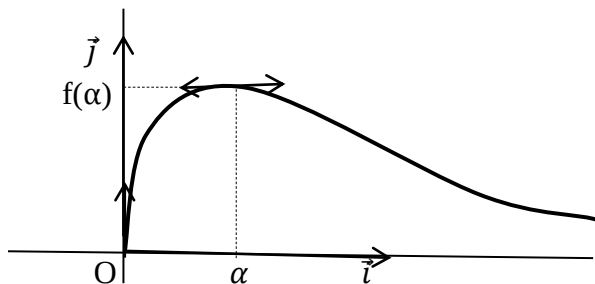
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

D'où f n'est pas dérivable en 0. Par conséquent (c) admet au point O une demi-tangente définie par : $\begin{cases} x = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

6.a) Dressons le tableau de variation de f .

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	0

b) Allure de la courbe



Activité 11

$$g(x) = \frac{1}{x-1} + \log_2|2x+1|$$

$$g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{\ln|2x+1|}{\ln 2}$$

1) Déterminons le domaine de définition D de g .

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x-1 \neq 0 \text{ et } 2x+1 \neq 0\}$$

$$\text{Soit } D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}.$$

2) Calculons les limites de g aux bornes de D .

On détermine, justification à l'appui les limites de g et on trouve successivement :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} g(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$$

3) Calculons $g'(x)$ et déduisons-en son signe suivant les valeurs de x .

g est dérivable sur D et on a :

$$\forall x \in D, \quad g'(x) = \frac{2x^2 - 2(\ln 2 + 2)x + 2 - \ln 2}{\ln 2(x-1)^2(2x+1)}$$

$$\forall x \in D, \ln 2(x-1)^2 > 0 \text{ donc le signe de } g'(x) \text{ est celui de } \frac{2x^2 - 2(\ln 2 + 2)x + 2 - \ln 2}{(2x+1)}$$

$$\text{Posons : } 2x^2 - 2(\ln 2 + 2)x + 2 - \ln 2 = 0$$

Le discriminant Δ donne : $\Delta = 4(\ln 2)^2 + 24\ln 2$

Les solutions de cette équation sont :

$$x_1 = \frac{2(\ln 2 + 2) - \sqrt{\Delta}}{4} (\approx 0,27)$$

$$x_2 = \frac{2(\ln 2 + 2) + \sqrt{\Delta}}{4} (\approx 0,42)$$

On en déduit le signe de $2x^2 - 2(\ln 2 + 2)x + 2 - \ln 2$ puis on établit celui de $2x+1$ et enfin le signe de $g'(x)$ et on trouve :

$$\begin{cases} g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]x_1; 1[\cup]x_2; +\infty[\\ g'(x) > 0 \Leftrightarrow]-\frac{1}{2}; x_0[\cup]x_2; +\infty[\\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \text{ ou } x = x_2 \end{cases}$$

4) Dressons le tableau de variation de g .

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	x_1	1	x_2	$+\infty$
$g'(x)$	-		+	-	-	+
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$		$g(x_1)$ $\nearrow$ $-\infty$		$+\infty$ $\searrow$ $g(x_2)$	$+\infty$ $\nearrow$

5) Etudions les branches infinies de la courbe (c) de g.

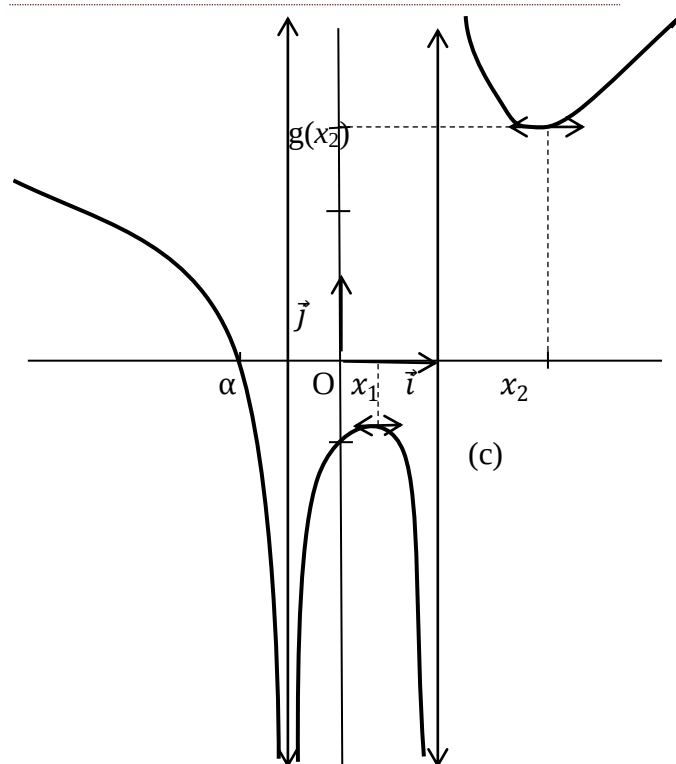
- Les droites d'équations $x = -1$ et $x = -\frac{1}{2}$ sont des asymptotes à la courbe (c).
- (c) admet au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

6) Construisons (c) dans un repère orthonormé (O ; I J) d'unité graphique 2cm.

Etude des points remarquables

- (c) coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0 ; -1).
- Il est clair que g s'annule uniquement sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$. Soit α cette racine.
En utilisant la méthode de balayage, on trouve que $-1,2 < \alpha < -1,1$

La courbe (c) est donc la suivante :



Séquence 8 : Fonction exponentielle népérienne

Activité 1

1. Résolvons les équations suivantes

a) $e^{x^2-3x+2} = 0$

Ceci est une absurdité car e^x est toujours supérieur à zéro.

D'où $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

b) $e^{-2x+3} = 1$

Cette équation équivaut à $-2x + 3 = 0$.

D'où $x = \frac{3}{2}$

Soit $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

c) $e^{3x} + 3e^{2x} - e^x = 3$

Posons : $X = e^x$

L'équation devient : $X^3 - 3X^2 - X - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (X - 1)(X^2 + 4X + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow X - 1 \text{ ou } X^2 + 4X + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = -1 \text{ ou } X = -3$$

Comme $X = e^x$ et puisque $e^x > 0$, alors on retient $X = 1$ et donc $e^x = 1$, soit $x = 0$.

En conclusion, $S_{\mathbb{R}} = \{0\}$.

$$d) e^{2x} + e^x - 2 = 0$$

En posant $X = e^x$, on résout, comme précédemment, une équation du second degré à partir de laquelle on déduit l'ensemble solution et on trouve : $S_{\mathbb{R}} = \{0\}$.

$$e) (e^x - 2)(e^{-x} + 1) = 0$$

Cette équation équivaut à $e^x - 2 = 0$ ou $e^{-x} + 1 = 0$ (absurde). D'où l'ensemble solution est : $S_{\mathbb{R}} = \{\ln 2\}$.

2) Résolvons les inéquations suivantes :

$$a) 3e^x - 7e^{-x} < -20$$

Cette inéquation équivaut à $\frac{3e^{2x}-7}{e^x} < -20$

$$\text{Soit } 3e^{2x} + 20e^x - 7 < 0.$$

Posons : $X = e^x$

L'inéquation devient : $3X^2 + 20X - 7 < 0$

On déduit que $X \in]-7; \frac{1}{3}[$.

$$\text{Donc } -7 < e^x < \frac{1}{3}.$$

$$\Leftrightarrow 0 < e^x < \frac{1}{3} \Leftrightarrow e^x < \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \in]-\infty; \ln 3[$$

D'où $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -\ln 3[$.

$$b) e^{x^2-3} > e^{2x}$$

Cette inéquation équivaut à $x^2 - 3 > 2x$

$$\text{ie } x^2 - 2x - 3 > 0$$

On déduit que $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$.

$$c) e^{x^2-1} \leq 1$$

On donc $x^2 - 1 \leq 0$. D'où $S_{\mathbb{R}} = [-1; 1]$.

$$d) \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} - 2 \geq 0$$

Cette inéquation équivaut à $\frac{-e^{2x}+3}{e^{2x}-1} \geq 0$.

Posons : $X = e^x$

L'inéquation devient : $\frac{-X^2+3}{X^2-1} \geq 0$. On en

déduit que $X \in [-\sqrt{3}; -1[\cup]1; \sqrt{3}]$

Comme $X = e^x$, alors on retient $X \in]1; \sqrt{3}]$

puis on déduit que $x \in]0; \ln \sqrt{3}[$.

Soit $S_{\mathbb{R}} =]0; -\ln 3[$.

$$e) e^{2x} \cdot e^2 - 3e^x + 2 \leq 0$$

Cette inéquation équivaut à $e^{2(x+1)} -$

$3e^{x+1} + 2 \leq 0$. En posant $X = e^{x+1}$, on

débouche sur une équation du second degré à partir de laquelle on déduit l'ensemble

solution et on trouve : $S_{\mathbb{R}} = [-1; \ln 2 - 1]$.

3. Établissons que :

$$a) \frac{e^x+1}{e^x-1} = \ln e + \frac{2}{e^x-1};$$

$$\begin{aligned} \frac{e^x+1}{e^x-1} &= \frac{e^x+2-1}{e^x-1} = \frac{e^x-1}{e^x-1} + \frac{2}{e^x-1} \\ &= 1 + \frac{2}{e^x-1} \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \frac{e^x+1}{e^x-1} = \ln e + \frac{2}{e^x-1} \text{ (car } \ln e = 1 \text{)}.$$

$$b) (1+e^x)e^{-x} = \frac{2\ln\sqrt{e}}{e^x} + 3\ln x \circ \sqrt[3]{e}$$

$$\begin{aligned} (1+e^x)e^{-x} &= \left(\frac{1}{e^x} + 1\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^x} + 1 \\ &= \frac{2\ln e^{\frac{1}{2}}}{e^x} + 3\ln 3^{\frac{1}{3}} = \frac{2\ln\sqrt{e}}{e^x} + 3\ln\sqrt[3]{e} \end{aligned}$$

$$\text{Soit } (1+e^x)e^{-x} = \frac{2\ln\sqrt{e}}{e^x} + 3\ln x \circ \sqrt[3]{e}.$$

$$c) \ln(x + e^x) = -\ln \frac{1}{e} \times \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) + \ln e^x$$

$$\ln(x + e^x) = \ln \left[e^x \left(1 + \frac{x}{e^x}\right) \right] = \ln e^x +$$

$$\ln \left(1 + \frac{x}{e^x}\right) = -\ln e^{-1} \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) + \ln e^x$$

Soit $\ln(x + e^x) = -\ln \frac{1}{e} \times \ln(1 + \frac{x}{e^x}) + \ln e^x$.

Activité 2

Déterminons le domaine de définition des fonctions suivantes et calculons leurs limites aux bornes de leurs domaines de définitions
 $\mathcal{D}$.

1.) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

Domaine de définition $\mathcal{D}$

$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } e^x - 1 \neq 0\}$

Soit $\mathcal{D} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

Limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -1$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -\infty$ car $\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} e^x + 1 = 2 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} e^x - 1 = 0^- \end{cases}$

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} e^x + 1 = 2 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} e^x - 1 = 0^+ \end{cases}$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{X + 1}{X - 1} = 1 \end{cases}$

2.) $f(x) = (1 - \frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$

Domaine de définition $\mathcal{D}$

$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x \neq 0\}$

Soit $\mathcal{D} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

Limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - \frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} = 1$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - \frac{1}{x}) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1 \end{cases}$

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} (1 - \frac{1}{x}) = +\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty \end{cases}$

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} f(x) = 0$ car $\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} -\frac{1}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \end{cases}$

3.) $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

Domaine de définition $\mathcal{D}$

$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } e^x - 1 \neq 0\}$

Soit $\mathcal{D} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

Limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = 1$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 0 \\ e^0 = 1 \end{cases}$

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} \left[e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \right]$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} f(x) = 0$ car $\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} e^{\frac{1}{x}} = 0 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = 0 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = 0 \end{cases}$

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{x^2 + x - 1}{x^2} = 1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \end{cases}$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \end{cases}$

4.) $f(x) = \frac{3}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$

Domaine de définition $\mathcal{D}$

$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x - 1 \neq 0\}$

Soit $\mathcal{D} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

Limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{(x-1)^2} = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{3}{(x+1)^2} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2 e^{\frac{x+1}{x-1}} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} X^2 e^X = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(x-1)^2} = 0 \end{cases}$$

$$5.) f(x) = \exp\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$$

Domaine de définition $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x + \sqrt{x^2+1} \neq 0\}$$

$$\text{Soit } \mathcal{D} =]-\infty; 0]$$

Limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\sqrt{x^2+1}-x} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = e$$

$$6.) f(x) = \frac{\ln(1-e^x)}{e^x}$$

Domaine de définition $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } 1 - e^x > 0\}$$

$$\text{Soit } \mathcal{D} =]-\infty; 0[$$

Limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-e^x)}{e^x}$$

$$\text{Posons : } X = -e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0} -\frac{\ln(1+X)}{X} = -1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln X = 0 \\ e^0 = 1 \end{cases}$$

$$7.) f(x) = \frac{e^x}{\ln(x^2+1)}$$

Domaine de définition $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \ln(x^2+1) \neq 0\}$$

$$\text{Soit } \mathcal{D} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

Limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2+1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln X = +\infty \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2+1) = 0^+ \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2+1) = 0^+ \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\ln(x^2+1)}{e^x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2 \frac{\ln(x)}{e^x} + \frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{e^x}} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{e^x} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} = +\infty \end{cases}$$

$$8.) f(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)$$

Domaine de définition $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } 1 + 2e^x > 0\}$$

Soit $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x}{1 + 2e^x} - \ln(1 + 2e^x) \right] = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x}{1 + 2e^x} - \ln(1 + 2e^x) \right] = -\infty$$

$$9.) f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}}$$

Domaine de définition $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x > 0\}$$

$$\text{Soit } \mathcal{D} =]0; +\infty[$$

Limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}} \right] = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{e^{\ln x^2}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[e^{\frac{\ln x}{x} - 2 \ln x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[e^{\left(\frac{1}{x} - 2\right) \ln x} \right] = 0$$

$$10.) f(x) = \frac{\sin 2x}{1 - e^x}$$

Domaine de définition $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } 1 - e^x \neq 0\}$$

$$\text{Soit } \mathcal{D} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

Limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$

• La fonction $x \mapsto \sin(2x)$ n'admet pas de limites en $-\infty$ et comme :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - e^x = 1$, alors f n'admet pas de limite en $-\infty$.

• Il est clair que $\forall x \in \mathcal{D}, -1 \leq \sin(2x) \leq 1$. et comme on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^x = -\infty, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{1 - e^x}$$

Posons : $X = e^x$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{X \rightarrow 1^-} \frac{\sin(2 \ln X)}{1 - X}$$

$$= \lim_{X \rightarrow 1^-} \left[- \frac{\sin(2 \ln X) - \sin(2 \ln 1)}{X - 1} \right] = -[\sin(2 \ln X)]'(1)$$

$$\text{Soit } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$$

• De façon analogue, on trouve $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2$

Activité 6

1.a) Etudions les variations des fonctions u et v .

• L'étude des variations de u se résume dans le tableau ci-contre :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$u(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

• L'étude des variations de v se résume dans le tableau ci-contre :

x	0	1	$+\infty$
$v'(x)$	$+$	$\circ$	$-$
$v(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

b) Dédution

• On déduit de tableau de variations de u que :
 $\forall x \in]0; +\infty[, u(x) \geq 0$ ie $e^x - x - 1 \geq 0$,
 soit $e^x \geq x + 1$. (1)

• On déduit de tableau de variations de v que :
 $\forall x \in]0; +\infty[, v(x) \leq 0$ ie $-x + 1 + \ln x \leq 0$
 Soit $\ln x \leq x - 1$. (2)

• En faisant (1) + (2), on a :

$$e^x + x - 1 \geq x + 1 + \ln x$$

$$\text{Soit } e^x - \ln x \geq 2.$$

2.a) Démontrons que le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f est $\mathcal{D} =]0; +\infty[$.

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x}{e^x - \ln x} \end{cases}$$

$$D = \{x \in]0; +\infty[\mid e^x - \ln x \neq 0\} \cup \{0\}$$

Comme $\forall x \in]0; +\infty[, e^x - \ln x \geq 2 > 0$,
alors $D =]0; +\infty[\cup \{0\}$.

Soit $D = [0; +\infty[$.

b) Etudions la continuité et la dérivabilité de f en 0.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x - \ln x} = 0 = f(0)$$

D'où f est continue en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - \ln x} = 0$$

Comme $0 \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

3) Déterminons la limite de f en $+\infty$ puis interprétons graphiquement le résultat.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x}} \right] = 0$$

D'où la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe (Γ) au voisinage de $+\infty$.

a) Etudions le sens de variation de g puis dressons son tableau de variation.

$$g(x) = e^x - \ln x - xe^x + 1.$$

g est définie, continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \text{ on a : } g'(x) = -\frac{x^{2e^x} + 1}{x}.$$

On en déduit que $g'(x) < 0 \forall x \in]0; +\infty[$.

Par conséquent, g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Limites de g aux bornes de $]0; +\infty[$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - \ln x - xe^x + 1) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{xe^x} - \frac{\ln x}{xe^x} - 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{xe^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty \end{cases}$$

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
g'(x)		-
g(x)	$+\infty$	$-\infty$

b) Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et justifie que $1,23 \leq \alpha \leq 1,24$.

g est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et $g:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

On a 1,23 et 1,24 qui appartiennent à $]0; +\infty[$

$$\text{et } \begin{cases} g(1,23) \approx 0,006 \\ g(1,24) \approx -0,04 \end{cases} ; g(1,23) \text{ et } g(1,24)$$

n'ont pas le même signe, d'où $1,23 \leq \alpha \leq 1,24$.

c) Etudions sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

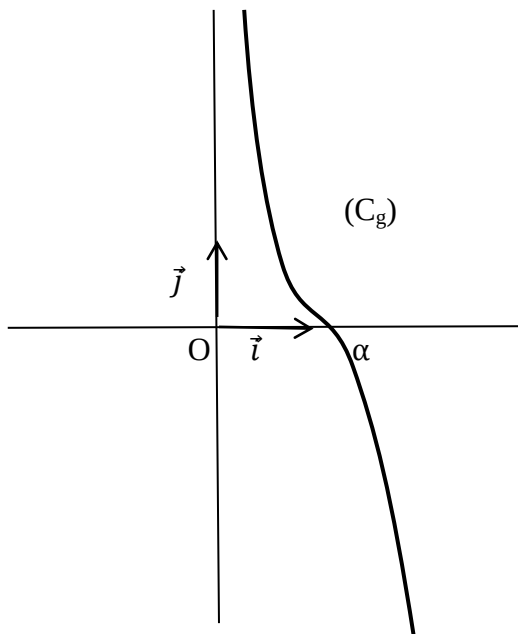
Branches infinies de la courbe (c_g) de g

• la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (c_g).

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -\infty, \text{ donc}$$

(c_g) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

Tracé de la courbe (c_g)



5) Etudions les variations de f et dresse son tableau de variation.

f est continue et dérivable sur D et on a :

$$\forall x \in D, f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - \ln x)^2}$$

Puisque $\forall x \in D, (e^x - \ln x)^2 > 0$, alors le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$. Ainsi,

$$\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, f'(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) < 0 \\ \text{Pour } x = e, f'(x) = 0 \end{cases}$$

Il en résulte que f est strictement croissante sur $]0; \alpha]$ puis strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

Le tableau ci-contre récapitule l'étude des variations de f .

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	0

6.a) Démontrons que $f(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha e^{\alpha} - 1}$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{e^{\alpha} - \ln \alpha}, \text{ or } g(\alpha) = 0 \Rightarrow e^{\alpha} - \ln \alpha - \alpha e^{\alpha} + 1 = 0 \Rightarrow e^{\alpha} - \ln \alpha = \alpha e^{\alpha} - 1$$

$$\text{D'où } f(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha e^{\alpha} - 1}$$

b) Déterminons un encadrement de $f(\alpha)$ puis déduisons-en que 0,308 est une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 0,001 près.

On encadre $f(\alpha)$ et on trouve :

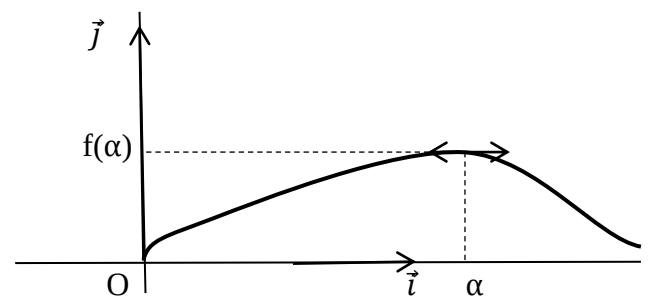
$$0,304 \leq f(\alpha) \leq 0,31$$

$$\text{Ainsi, } f(\alpha) \approx \frac{0,304 + 0,31}{2}$$

$$\text{Soit } f(\alpha) \approx 0,3078.$$

$$\text{A } 0,001 \text{ près, } f(\alpha) \approx 0,308.$$

c) Construisons dans le carré de côté 10 la courbe (Γ) de la fonction f .



Activité 7 Partie A

1. Etudions les variations de g .

g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x - 1$$

On en déduit que g est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ puis strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

Le tableau des variations de g est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	+	
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

2) Démontrons que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } e^x - x \neq 0\}$$

$$e^x - x = g(x) + 1$$

Comme $g(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, alors $g(x) + 1 > 0$, soit $e^x - x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

D'où $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

3) Calculons les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$4.a) \text{ On calcule et on trouve } f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - x)^2},$$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

b) Dressons le tableau de variation de f

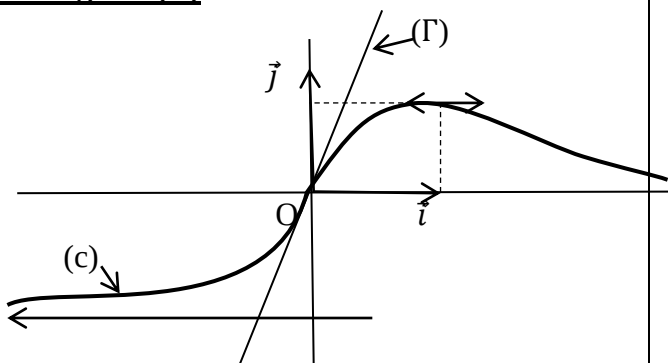
On déduit de la dérivée première de f que f est strictement croissante sur $]-\infty; 1]$ puis strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

5.a) Cette tangente à pour équation : $y = x$

b) Etudions la position de (c) par rapport à (T).

$$\text{On a } f(x) - y = -\frac{xg(x)}{e^x - x}$$

On en déduit que (c) est au-dessus de (T) sur $]-\infty; 0[$, (c) est en dessous de (T) sur $]0; +\infty[$, puis (c) et (T) se coupent pour $x = 0$.

6) Traçons la courbe (c) et la tangente (T) et la tangente (T)**Activité 8****1.a) Déterminons l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f .**

$$f(x) = e^{-x} - \frac{1}{2} \ln|2x - 1|$$

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } 2x - 1 \neq 0\}$$

$$\text{Soit } \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

b) Calculons les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[e^{-x} - \frac{1}{2} \ln|2x - 1| \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[e^{-x} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(-2x+1)}{-2x+1} \cdot \frac{x}{e^{-x}} \cdot \frac{-2x+1}{x} \right) \right] \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-2x+1)}{-2x+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+1}{x} = -2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} = +\infty \end{cases} \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$$

2.a) Déterminons la fonction dérivée première f' et la fonction dérivée seconde f'' de f .

f est au moins deux fois dérivable sur son ensemble de définition et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}, f'(x) = \frac{(1-2x)e^{-x}-1}{2x-1} \text{ et } f''(x) = e^{-x} + \frac{2}{(2x-1)^2}.$$

b) Etudions le sens de variation de f' .

$f''(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ donc f' est strictement croissante sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

c) Etudions le signe de $f'(x)$ pour tout élément de $\mathcal{D}$.

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f'(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f'(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 0[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[, f'(x) < 0 \\ \forall x \in]0; \frac{1}{2}[, f'(x) > 0 \\ \text{Pour } x = 0, f'(x) = 0 \end{cases}$$

3.a) Dressons le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$	$-\infty$

b) Etudions les branches infinies de (c).

• $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est asymptote à (c).

$x = \frac{1}{2}$ est asymptote à (c).

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ donc (c) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ donc (c) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

4.a) Démonstration

• f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$. Comme $0 \notin f(]-\infty; 0]) =$

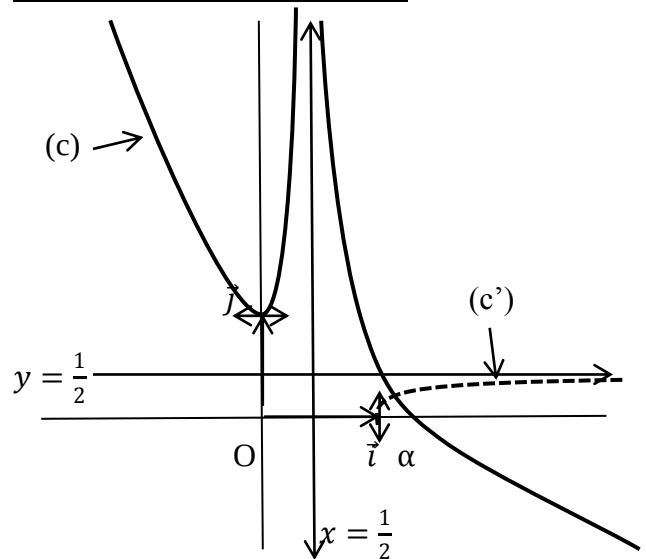
$[1; +\infty[$, alors $f(x) = 0$ n'admet aucune solution dans $]-\infty; 0]$. (1)

• f est continue et strictement croissante sur $[0; \frac{1}{2}[$ et $f([0; \frac{1}{2}[) = [1; +\infty[$. $0 \notin [1; +\infty[$, donc $f(x) = 0$ n'admet aucune solution dans $[0; \frac{1}{2}[$. (2)

• f est continue et strictement décroissante sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$ et $f(]\frac{1}{2}; +\infty[) = \mathbb{R}$. On a $0 \in \mathbb{R}$, donc $f(x) = 0$ admet dans $]\frac{1}{2}; +\infty[$ une unique solution α . (3)

De (1), (2) et (3), $f(x) = 0$ admet exactement une unique solution α dans $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ et on a $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

b) Construisons la courbe (c)



5.) Calculons l'aire $\mathcal{A}$

$$\frac{\mathcal{A}}{u.a} = \left(\int_1^\alpha f(x) dx \right) = \int_1^\alpha \left(e^{-x} - \frac{1}{2} \ln|2x - 1| dx \right)$$

En faisant une intégration par partie, on obtient :

$$\frac{\mathcal{A}}{u.a} = -e^{-\alpha} + e^{-1} - \frac{1}{2} (\alpha \ln(2\alpha - 1) - \alpha + 1 - \frac{1}{2} \ln(2\alpha - 1)).$$

Comme $e^{-\alpha} - \frac{1}{2} \ln(2\alpha - 1) = 0$, alors

$$e^{-\alpha} = \frac{1}{2} \ln(2\alpha - 1).$$

Soit $\frac{\mathcal{A}}{u.a} = -e^{-\alpha} + e^{-1} - \alpha e^{-\alpha} + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\alpha}$.

$$\mathcal{A} = \left[\left(-\frac{1}{2} - \alpha \right) e^{-\alpha} + e^{-1} + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} \right] u.a$$

6.) Démontrons que g admet une bijection réciproque g⁻¹

f est continue et strictement croissante sur $[0; \frac{1}{2}]$. Elle réalise donc une bijection de $[0; \frac{1}{2}]$ vers $f([0; \frac{1}{2}]) = [1; +\infty[$. Or $\forall x \in [0; \frac{1}{2}]$, $g(x) = f(x)$, donc g est bijective et admet une bijection réciproque g^{-1} .

7.a) Justifions que (c') admet une demi-tangente verticale en son point d'abscisse 1.

$\forall x \in [0; \frac{1}{2}]$, $f'(0) = 0$, soit $g'(0) = 0$, donc (c) admet en son point d'abscisse 0 une demi-tangente horizontale. Par conséquent, (c') admet en son point d'abscisse $f(0) = 1$ une demi tangente verticale, puisque (c') est l'image de (c) par la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice ($y = x$).

b) Précisons les branches infinies de (c').

La droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote à (c').

e) Construisons (c'). (voir figure 4.b)

Activité 10

Partie A

1.a) Calculons la dérivée première u' de u pour tout x ∈ IR.

$$u(x) = -3x^3 + 2mx^2 - x - 2m$$

u est définie, continue et dérivable sur IR et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = -9x^2 + 4mx - 1$$

b) Etudions suivant les valeurs de m le signe de u'.

Posons : $u'(x) = 0$

Le discriminant $\Delta_m = 16m^2 + 4mx - 1$

Signe de Δ_m

$$\Delta_m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2} \text{ ou } m = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} \text{Pour } m \in]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[, \Delta_m > 0 \\ \text{Pour } m \in]-\frac{3}{2}; 0[\cup]0; \frac{3}{2}[, \Delta_m < 0 \\ \text{Pour } m \in \left\{ \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\}, \Delta_m = 0 \end{cases}$$

Signe de u'

En fonction du signe de Δ_m , nous distinguons trois cas :

1^{er} cas : $m \in \left\{ \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\}$

On a : $\Delta_m = 0$

Dans ce cas, l'équation $u'(x) = 0$ admet une double solution $x_0 = \frac{2m}{9}$

On en déduit que : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}, u'(x) < 0 \\ \text{Si } x = x_0, u'(x) = 0 \end{cases}$

2^{ème} cas : $m \in]-\frac{3}{2}; 0[\cup]0; \frac{3}{2}[,$

On a $\Delta_m < 0$

Dans ce cas, l'équation $u'(x) = 0$ n'admet pas de solutions réelles et donc $u'(x)$ garde un signe constant sur IR. Soit $u'(x) < \forall x \in \mathbb{R}$

3^{ème} cas : $m \in]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[$

On a : $\Delta_m > 0$

Dans ce cas, l'équation $u'(x) = 0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 telles que :

$$x_1 = \frac{4m - \sqrt{\Delta_m}}{18} \text{ et } x_2 = \frac{4m + \sqrt{\Delta_m}}{18}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[, u'(x) < 0 \\ \forall x \in]x_1; x_2[, u'(x) > 0 \\ \text{Pour } x = x_1 \text{ ou } x = x_2, u'(x) = 0 \end{cases}$$

2) Etudions les variations de u et déduisons-en suivant les valeurs de m le signe de u.

Il faut établir dans chaque cas le tableau de variations de u.

Signe de u .1^{er} et 2^{ème} cas

u est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $u(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, alors $u(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, on a :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, u(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, u(x) < 0 \\ \text{Pour } x = \alpha, u(x) = 0 \end{cases}$$

2^{ème} cas

☞ $u(x_1)$ et $u(x_2)$ sont de même signe implique l'existence d'une solution unique α pour l'équation $u(x) = 0$. On en déduit que :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, u(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, u(x) < 0 \\ \text{Pour } x = \alpha, u(x) = 0 \end{cases}$$

☞ $u(x_1)$ et $u(x_2)$ sont de signes contraires, en l'occurrence $u(x_1) < 0 < u(x_2)$ implique l'existence de 03 solutions α, β et γ pour l'équation $u(x) = 0$. On en déduit que :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[\cup]\beta; \gamma[, u(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; \beta[\cup]\gamma; +\infty[, u(x) < 0 \\ \text{Pour } x = \alpha \text{ ou } x = \beta \text{ ou } x = \gamma, u(x) = 0 \end{cases}$$

Partie B**3) Déterminons le domaine de définition D de g_m et calculer les limites de g_m aux bornes de D.**

$$g_m(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{|x^2-1|} e^{-\frac{m}{x}}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$$

On détermine, justification à l'appui, les limites de g_m aux bornes de D et on trouve successivement :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g_m(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-x}{x^2-1} \times \frac{1}{\sqrt{|x|}} e^{-\frac{m}{x}} \right] = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g_m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{x^2-1} \times \frac{1}{\sqrt{|x|}} e^{-\frac{m}{x}} \right] = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} g_m(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left[\frac{|x|}{|x^2-1|} \times \frac{1}{\sqrt{|x|}} e^{-\frac{m}{x}} \right] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} g_m(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{|x|}{|x^2-1|} \times \frac{1}{\sqrt{|x|}} e^{-\frac{m}{x}} \right] = +\infty$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} g_m(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{|x|}{|x^2-1|} \times \frac{\sqrt{|x|}}{m} \times \frac{m}{|x|} e^{\frac{m}{|x|}} \right] = 0 \text{ si } m < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g_m(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{|x^2-1|} \times \frac{m}{\sqrt{|x|}} \times \frac{e^{\frac{m}{|x|}}}{m} \right] = +\infty \text{ si } m > 0 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} g_m(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{|x^2-1|} \times \frac{(-m)}{\sqrt{|x|}} \times \frac{e^{-\frac{m}{|x|}}}{-m} \right] = +\infty \text{ si } m < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} g_m(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{|x|}{|x^2-1|} \times \frac{\sqrt{|x|}}{-m} \times \left(\frac{-m}{|x|} e^{-\frac{m}{|x|}} \right) \right] = 0 \text{ si } m > 0 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} g_m(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g_m(x) = +\infty$$

4). Etudions suivant les valeurs de m les variations de g_m .

$$\begin{cases} g_m(x) = \frac{\sqrt{-x}}{x^2-1} e^{-\frac{m}{x}} \text{ si } x \in]-\infty; -1[\\ g_m(x) = -\frac{\sqrt{-x}}{x^2-1} e^{-\frac{m}{x}} \text{ si } x \in]-1; 0[\\ g_m(x) = -\frac{\sqrt{x}}{x^2-1} e^{-\frac{m}{x}} \text{ si } x \in]0; 1[\\ g_m(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1} e^{-\frac{m}{x}} \text{ si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

g_m est continue et dérivable sur D et on a :

$$\begin{cases} g'_m(x) = -\frac{u(x)}{2x(x^2-1)^2\sqrt{-x}} e^{-\frac{m}{x}} \forall x \in]-\infty; -1[\\ g'_m(x) = \frac{u(x)}{2x(x^2-1)^2\sqrt{-x}} e^{-\frac{m}{x}} \forall x \in]-1; 0[\\ g'_m(x) = -\frac{u(x)}{2x(x^2-1)^2\sqrt{x}} e^{-\frac{m}{x}} \forall x \in]0; 1[\\ g'_m(x) = \frac{u(x)}{2x(x^2-1)^2\sqrt{x}} e^{-\frac{m}{x}} \forall x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

☞ Soit $x \in]-\infty; -1[$

Sur cet intervalle, $g'_m(x)$ a le signe de $-\frac{u(x)}{x}$, soit $g'_m(x)$ a le signe de $u(x)$ car $-x > 0$ sur cet intervalle. Comme $u(]-\infty; -1]) =]4; +\infty[$, alors g_m est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$.

☞ Soit $x \in]-1; 0[$

Sur cet intervalle, $g'_m(x)$ a le signe de $\frac{u(x)}{x}$, soit le signe de $-u(x)$ car $x < 0$ sur cet intervalle.

$$u(-1; 0] = \{]-2m; 4[;]4; -2m\}$$

• Ainsi, si $m \in]-\infty; 0[$, $u(x) > 0$ et donc g_m est strictement décroissante.

• Si $m \in]0; +\infty[$, alors il existe une racine α de u dans cet intervalle. En conséquence, $\forall x \in]-1; \alpha[$, $u(x) > 0$, soit g_m est strictement décroissante et pour $x \in]\alpha; 0[$, $u(x) < 0$, soit g_m est strictement croissante.

☞ Soit $x \in]0; 1[$

Sur cet intervalle, $g'_m(x)$ a le signe de $-u(x)$.

$$u(]0; 1[) = \{]-4; -2m[;]-2m; -4\}$$

• Ainsi, si $m \in]-\infty; 0[$, il existe une racine β de $u(x) = 0$ dans $]0; 1[$. En conséquence, $\forall x \in]0; \beta[$, $u(x) > 0$, soit g_m est strictement décroissante sur $]0; \beta[$ et si $x \in]\beta; 1[$, $u(x) < 0$, soit g_m est strictement croissante sur $[\beta; 1[$.

• Si $m \in]0; +\infty[$, $u(x) < 0$ et donc g_m est strictement croissante sur $]0; 1[$

☞ Soit $x \in]1; +\infty[$

Sur cet intervalle, $g'_m(x) < 0$, donc g_m y est strictement décroissante.

Bilan des variations de g_m

1^{er} cas : $m < 0$

g_m est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$ et $[\beta; 1[$ puis strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-1; 0[$ et $]0; \beta[$.

x	$-\infty$	-1	0	β	1	$+\infty$
$g'_m(x)$	+	-	-	+	-	-
$g_m(x)$	$+\infty$ $\nearrow$ 0	$+\infty$ $\searrow$ 0	$+\infty$ $\searrow$ $g_m(\beta)$	$+\infty$ $\nearrow$ 0	$+\infty$ $\searrow$ 0	$+\infty$ $\searrow$ 0

2^{ème} cas : $m > 0$

g_m est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$ et $[\alpha; 0[$ et $]0; 1[$ puis strictement décroissante $]-1; \alpha[$ et $]1; +\infty[$

x	$-\infty$	-1	α	0	1	$+\infty$
$g'_m(x)$	+	-	+	+	+	-
$g_m(x)$	$+\infty$ $\nearrow$ 0	$+\infty$ $\searrow$ $g_m(\alpha)$	$+\infty$ $\nearrow$ 0	$+\infty$ $\nearrow$ 0	$+\infty$ $\searrow$ 0	$+\infty$ $\searrow$ 0

5) Dressons le tableau de variation de g_2

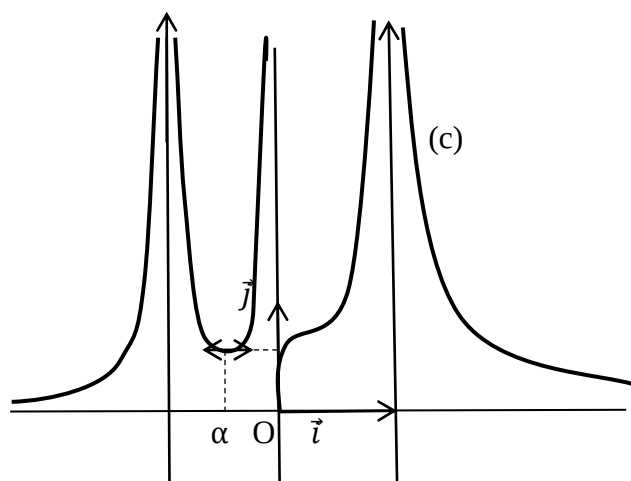
X	$-\infty$	-1	α	0	1	$+\infty$
$g'_2(x)$	+	-	+	+	+	-
$g_2(x)$	$+\infty$ $\nearrow$ 0	$+\infty$ $\searrow$ $g_2(\alpha)$	$+\infty$ $\nearrow$ 0	$+\infty$ $\nearrow$ 0	$+\infty$ $\searrow$ 0	$+\infty$ $\searrow$ 0

6) Etudions les branches infinies de (c_9) .

• la droite d'équation $y = 0$, est asymptote à la courbe (c) de g_2 au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

• La droite d'équation $x = -1, x = 1$ sont asymptotes à la courbe (c) de g_2

7) Tracé de la courbe (c_9)



Séquence 9 : Fonctions
exponentielles- Fonctions Puissances

Activité 1

1) Résolvons les équations suivantes :

a) $5^{2x-1} = 3$

Cette équation équivaut à $\ln(5^{2x-1}) = \ln 3$

Soit $(2x - 1)\ln 5 = \ln 3$

D'où $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\ln 3}{2\ln 5} \right\}$.

b) $9^x + 3^x - 12 = 0$.

En posant $X = 3^x$, on trouve $X = -4$ (absurde) ou $X = 3$ à partir duquel on déduit l'ensemble solution $S_{\mathbb{R}} = \{1\}$.

c) $2^{2x+1} + 2^x = 105$

Cette équation équivaut à $2 \cdot 2^{2x} + 2^x - 105 = 0$. En posant $X = 2^x$, on trouve $X = -\frac{15}{2}$ (absurde) ou $X = 7$ à partir duquel on déduit l'ensemble solution $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\ln 7}{\ln 2} \right\}$.

d) $4^x + 3^x = 0$

Cette égalité est impossible car $\forall x \in \mathbb{R}$, $4^x + 3^x > 0$.

D'où $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.

2) Résolvons les inéquations suivantes :

a) $5^{2x-1} \leq 3$

On a $(2x - 1)\ln 5 \leq \ln 3$

D'où $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; \frac{1}{2} + \frac{\ln 3}{2\ln 5}]$

b) $9^x + 3^x - 12 \geq 0$.

En posant $X = 3^x$, on obtient $X \in]-\infty; -4] \cup [3; +\infty[$.
 X devrait être strictement positif, donc on retient $X \in [3; +\infty[$.
D'où $S_{\mathbb{R}} = [1; +\infty[$.

c) $7^{x-1} > 1$

On a $(x - 1)\ln 7 > 0$

On en déduit que $S_{\mathbb{R}} =]1; +\infty[$.

d) $2^x + 3^x - 1 < 0$

On peut étudier les variations de la fonction $f: x \mapsto 2^x + 3^x - 1$ et trouver $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; \alpha[$ avec $f(\alpha) = 0$.

3) Etablissons que pour tout réel strictement positif, on a :

a) $e^{\ln \sqrt{x^2+1}} = x e^{\ln \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$e^{\ln \sqrt{x^2+1}} = e^{\ln \left(x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \right)} = e^{\ln x + \ln \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \right)}$

D'où $e^{\ln \sqrt{x^2+1}} = x e^{\ln \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$.

b) $\ln[(x^2 + 2)^x] = 2x \ln x + x^{\frac{1}{2}} \ln \left[\left(1 + \frac{2}{x^2} \right)^{\sqrt{x}} \right]$

$(x^2 + 2)^x = \left[x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2} \right) \right]^x = x^{2x} \cdot \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)^x$

Donc $\ln[(x^2 + 2)^x] = 2x \ln x + \ln \left[\left(1 + \frac{2}{x^2} \right)^x \right]$

$= 2x \ln x + \ln \left[\left(1 + \frac{2}{x^2} \right)^{(\sqrt{x})^2} \right]$

$= 2x \ln x + \sqrt{x} \ln \left[\left(1 + \frac{2}{x^2} \right)^{\sqrt{x}} \right]$

Soit $\ln[(x^2 + 2)^x] = 2x \ln x + x^{\frac{1}{2}} \ln \left[\left(1 + \frac{2}{x^2} \right)^{\sqrt{x}} \right]$

Activité 2

Dans chacun des cas suivants déterminons le domaine $\mathcal{D}$ de f et calculons les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

1) $f(x) = e^{x^2-3x+2}$

f est définie sur $\mathbb{R}$ et on a $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$

2) $f(x) = 2^{\frac{x-1}{x+1}}$

Domaine de définition $\mathcal{D}$ de f

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x - 1 \neq 0\}$$

$$\mathcal{D} =] - \infty; -1[\cup] -1; +\infty[$$

Limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x-1}{x+1} \ln 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \text{ et } e^{\ln 2} = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} (x-1) = -2 \\ \forall x \in] - \infty; -1[, x-1 < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} (x-1) = -2 \\ \forall x \in] -1; +\infty[, x-1 < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \text{ et } e^{\ln 2} = 2$$

$$3) f(x) = e^{x^2 \ln \left(\frac{x-1}{x+2} \right)}$$

Domaine de définition $\mathcal{D}$ de f

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x+2 \neq 0 \text{ et } \frac{x-1}{x+2} > 0\}$$

$$\text{Soit } \mathcal{D} =] - \infty; -2[\cup] 1; +\infty[$$

Limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2 \ln \left(\frac{x-1}{x+2} \right)}$$

$$\text{Posons : } X = \frac{x-1}{x+2}$$

$$\text{On a } x = \frac{-2X-1}{X-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow 1^+} e^{\frac{(2X+1)^2 \ln X}{X-1} \cdot \frac{\ln X}{X-1}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{X \rightarrow 1^+} \frac{\ln X}{X-1} = 1 \\ \lim_{X \rightarrow 1^+} \frac{(2X+1)^2}{X-1} = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow 1^-} e^{\frac{(2X+1)^2 \ln X}{X-1} \cdot \frac{\ln X}{X-1}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{X \rightarrow 1^-} \frac{\ln X}{X-1} = 1 \\ \lim_{X \rightarrow 1^-} \frac{(2X+1)^2}{X-1} = -\infty \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} e^{x^2 \ln \left(\frac{x-1}{x+2} \right)} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{x^2 \ln \left(\frac{x-1}{x+2} \right)} = 0$$

$$4) f(x) = \exp_2 \left(\frac{x+1}{x} \right) - x + 1$$

Domaine de définition $\mathcal{D}$ de f

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x \neq 0\}$$

$$\text{Soit } \mathcal{D} =] - \infty; 0[\cup] 0; +\infty[$$

Limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+1) = +\infty \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x+1) = -\infty \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x+1) = 1 \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} 2^X = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x+1) = 1 \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} 2^X = +\infty \end{cases}$$

$$5) f(x) = e^{x \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|}$$

Domaine de définition $\mathcal{D}$ de f

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x \neq 0\}$$

$$\text{Soit } \mathcal{D} =] - \infty; 0[\cup] 0; +\infty[$$

Limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{\ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|}{\frac{1}{x}}} = e$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|}{\frac{1}{x}}} = e$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{(x+1) \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|}{1 + \frac{1}{x}}} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{(x+1) \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|}{1 + \frac{1}{x}}} = 1$$

$$6) f(x) = \left(\frac{x}{x-1} \right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Domaine de définition $\mathcal{D}$ de f

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x - 1 \neq 0 \text{ et } \frac{x}{x-1} > 0\}$$

Soit $\mathcal{D} =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$

Limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = +\infty$$

$$7) f(x) = e^{x \ln(1 + \frac{1}{x^2})}$$

Domaine de définition $\mathcal{D}$ de f

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x \neq 0\}$$

Soit $\mathcal{D} =]-\infty; +\infty[$

Limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x} \ln(1 + \frac{1}{x^2})} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(1 + \frac{1}{x^2})} = 1$$

$$8) f(x) = |x^2 - 1|^{x^3}$$

Domaine de définition $\mathcal{D}$ de f

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x^2 - 1 \neq 0\}$$

Soit $\mathcal{D} =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

Limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x^2 - 1|^{x^3} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} |x^2 - 1|^{x^3} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} |x^2 - 1|^{x^3} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} |x^2 - 1|^{x^3} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} |x^2 - 1|^{x^3} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} |x^2 - 1|^{x^3} = 0$$

$$10) f(x) = e^{(x-e)^2 \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}$$

Domaine de définition $\mathcal{D}$ de f

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x^2 - 1 \geq 0 \text{ et } x + \sqrt{x^2 - 1} > 0\}$$

Soit $\mathcal{D} =]1; +\infty[$

Limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(x-e)^2 \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{(x-e)^2 \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})} = 1$$

Activité 3

Partie A

1.a) Déterminons le domaine de définition

Du de u

$$Du = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x - 1 \neq 0 \text{ et } x + 1 \neq 0\}$$

Soit $Du = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

b) Etudions le sens de variation de u et dresse le tableau de variation.

u est continue et dérivable sur Du et on a : $\forall$

$$x \in Du : u'(x) = \frac{-x-3}{(x-1)(x+1)^2}$$

On en déduit que u est strictement croissante sur $[-3; -1[$ et $] -1; 1[$ puis strictement décroissante sur $] -\infty; -3]$ et $]1; +\infty[$.

L'étude des variations de u se résume dans le tableau ci-après :

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$u'(x)$	-	0	+	+	-
$u(x)$	0	$-\ln 2 + \frac{1}{2}$	$+\infty$	$+\infty$	0

2°) Etablissons le signe de $u \forall x \in Du$

u admet deux zéros α et β sur Du avec $\alpha \in]-3; -1[$ et $\beta \in]-1; 1[$. On en déduit que :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[\cup]-1; \beta[, u(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; -1[\cup]\beta; 1[\cup]1; +\infty[, u(x) > 0 \\ \text{Pour } x = \alpha \text{ ou } x = \beta, u(x) = 0 \end{cases}$$

Partie B

3°) Déterminons le domaine de définition D de g et calculons les limites de g aux bornes de D

$$g(x) = e^{(x-1)^2 \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

En posant par exemple $X = \frac{x+1}{x-1}$, on trouve :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g = +\infty$$

On trouve par la suite justification à l'appui :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1}^- g(x) = \lim_{x \rightarrow -1}^+ g(x) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1}^- g(x) = \lim_{x \rightarrow 1}^+ g(x) = 1$$

4.a) Preuve

On dérive et on trouve

$$g'(x) = \left[2(x-1) \left(\ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{1}{x+1} \right) \right] g(x)$$

$$\text{Soit } g'(x) = 2(x-1)g(x).$$

b) Achéons l'étude de variation de g

L'étude des variations de g se résume dans le tableau ci-après :

x	$-\infty$	α	-1	β	1	$+\infty$	
$g'(x)$	+		-	+		-	+
$g(x)$	$g(\alpha)$		$g(\beta)$		$+\infty$		
	0		0	0	1	1	

5.) Etudions les branches infinies de (C)

$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$

$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. En posant par exemple

$$X = \frac{x+1}{x-1} \text{ on trouve } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$$

Par suite (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

6.) Construisons la courbe (C)

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 0; \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$$

On en déduit que g admet un prolongement par continuité en -1 et en 1 . Ces

prolongements u et v sont définis par :

$$\begin{cases} \forall x \in D, u(x) = g(x) \\ u(-1) = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \forall x \in D, v(x) = g(x) \\ v(1) = 1 \end{cases}$$

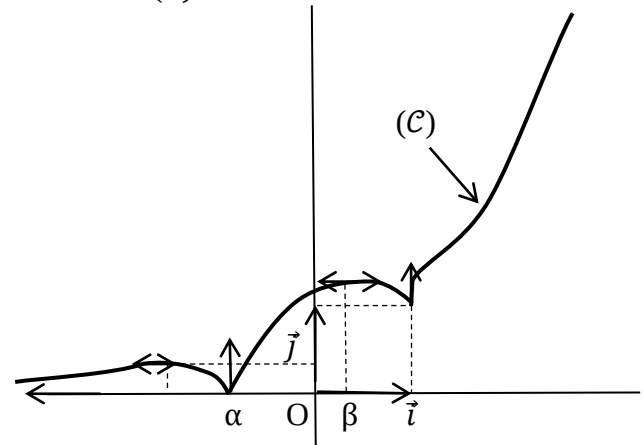
$$\begin{cases} \forall x \in D, v(x) = g(x) \\ v(1) = 1 \end{cases}$$

On déduit par la suite que (C) admet aux points de coordonnées $(-1; 0)$ et $(1; 1)$ une demi-tangente définie respectivement par :

$$\begin{cases} x = -1 \\ y \geq 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

En utilisant la méthode de balayage, on établit que : $-1,8 < \alpha < -1,7$ et $0,3 < \beta < 0,35$

La courbe (C) est la suivante :



Activité 5

Partie A

$$g(x) = (x-2) \ln \left| 1 - \frac{2}{x} \right| + 4$$

1.a) Déterminons le domaine de définition D_g de g et justifions qu'elle est continue et dérivable sur D_g .

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x \neq 0 \text{ et } x - 2 \neq 0\}$$

$$\text{Soit } D_g = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{x-2}{x}$ est continue et dérivable sur D_g en tant que fonction rationnelle.

Comme $\forall x \in D_g, \frac{x-2}{x} \neq 0$, alors la fonction

$x \mapsto \ln \left| 1 - \frac{2}{x} \right| + 4$ est continue et dérivable sur D_g . De plus, la fonction $x \mapsto (x - 2)$ est continue et dérivable sur D_g ; d'où g est continue et dérivable sur D_g .

b) Calculons $g'(x)$ et $g''(x) \forall x \in D_g$

g est plus d'une fois dérivable sur D_g et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \ln \left| 1 - \frac{2}{x} \right| + \frac{2}{x} \text{ et}$$

$$g''(x) = \frac{4}{x^2} \left(\frac{1}{x-2} \right).$$

2.a) Etudions le sens de variation de g' .

g' est définie et continue sur D_g . On déduit de tout ce qui précède que g' est strictement décroissante sur chacun des intervalles $] -\infty; 0[$ et $] 0; 2[$ puis strictement décroissante sur $] 2; +\infty[$.

b) Déduisons-en le signe de g' .

L'étude des variations de g se résume dans le tableau ci-contre :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$g''(x)$	-	-	+	
$g'(x)$	0 ↘ -∞	+∞ ↘ -∞	-∞ ↗ 0	

On en déduit que g' admet un zéro α sur son ensemble de définition avec $\alpha \in] 0; 2[$.

En conclusion,

$$\begin{cases} \forall x \in] -\infty; 0[\cup] \alpha; 2[\cup] 2; +\infty[, g'(x) < 0 \\ \forall x \in] 0; \alpha[, g'(x) > 0 \\ \text{Si } x = \alpha, g'(\alpha) = 0 \end{cases}$$

3.a-b) Nous résumons l'étude des variations de g dans le tableau ci-contre :

x	$-\infty$	0	α	2	$+\infty$
$g''(x)$	-	+	-	-	
$g'(x)$	2 ↘ -∞	$g(\alpha)$ ↗ -∞	4 ↘ 4		2

b) Etablissons alors le signe de g .

On a $\alpha \approx 1,55$ et $g(\alpha) \approx 4,56$; g admet donc deux zéros β et γ sur son ensemble de définition avec $\gamma \in] -\infty; 0[$ et $\beta \in] 0; \alpha[$. On en déduit que :

$$\begin{cases} \forall x \in] -\infty; \gamma[\cup] \beta; 2[\cup] 2; +\infty[, g(x) > 0 \\ \forall x \in] \gamma; 0[\cup] 0; \beta[, g(x) > 0 \\ \text{Si } x = \beta \text{ ou } x = \gamma, g(x) = 0 \end{cases}$$

Partie B

4.a) Preuve

Le domaine de définition D_h de h est :

$$D_h = [0; 2[\cup] 2; +\infty[$$

Comme $D \subset D_h$, alors h est définie sur D .

b) Calculons les limites de h aux bornes de D .

On calcule et on trouve, justification à l'appui :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$$

5.a) Etudions la dérivabilité de h en O .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x} = +\infty, \text{ donc } h \text{ n'est pas dérivable en } 0.$$

Par conséquent, (c) admet en $O(0; 0)$ une

demi tangente définie par : $\begin{cases} x = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

b. On déduit que h est dérivable sur $E = D_h - \{0\}$.

6.a) Calculons $h'(x) \forall x \in E$

$$\forall x \in E, h'(x) = \frac{g(x)}{2(x-2)\sqrt{x}} \left| 1 - \frac{2}{x} \right|^{\sqrt{x}}$$

b) Etudions le signe de $h'(x) \forall x \in D$.

$$\forall x \in D, g(x) > 0, 2(x-2)\sqrt{x} > 0 \text{ et}$$

$$\left| 1 - \frac{2}{x} \right|^{\sqrt{x}} > 0, \text{ d'où } h'(x) > 0.$$

7) Etablissons le tableau de variation de h puis construisons (c).

De tout ce qui précède, h est strictement croissante sur $] 2; +\infty[$.

x	2	$+\infty$
$h'(x)$		+
$h(x)$	0	1

h est continue sur D et admet une limite finie en 2. Elle admet donc un prolongement par continuité en 2.

Soit H le prolongement par continuité de h .

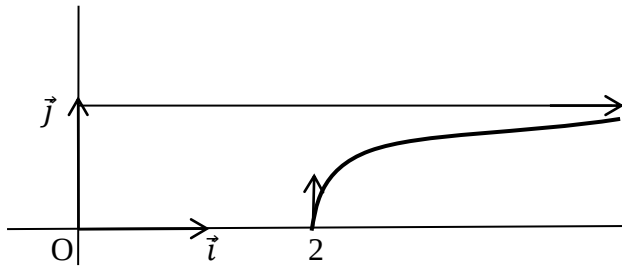
On a : $\begin{cases} \forall x \in D, H(x) = h(x) \\ H(2) = 0 \end{cases}$

Comme $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{H(x) - H(2)}{x - 2} = +\infty$, alors

(c) admet en au point de coordonnées (2 ; 0) une demi-tangente définie par :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La courbe (c) est donc :



Activité 6

1°) Démonstration

$D = D_1 \cup D_2$ avec :

$D_1 = \{x \in [0; 2] \text{ tq } x^2 - 3x + 2 \text{ existe}\}$

$D_1 = [0; 2]$

$D_2 = \{x \in [0; +\infty] \text{ tq } x - 2 > 0 \text{ et } \ln(x - 2) \neq 0\}$

$D_2 =]2; 3[\cup]3; +\infty[$

En conclusion, $D = [0; 3[\cup]3; +\infty[$.

2.a) Etudions la continuité de f en $x = 2$.

On a $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 1$, donc

f est continue en 2.

b) Etudions la dérivabilité de f en $x = 2$.

• $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \ln 2$, donc f est dérivable

gauche en 2 et $f'_g(2) = \ln 2$

• $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = +\infty$, donc f est dérivable

à droite en 2.

En conclusion, f n'est pas dérivable en 2.

c) Précisons les demi-tangentes éventuelles à la courbe (c) au point d'abscisse 2.

(c) admet à gauche en 2 une demi-tangente

définie par : $\begin{cases} x \leq 2 \\ y = x \ln 2 + (1 - 2 \ln 2) \end{cases}$ puis à

droite en 2 une demi-tangente définie par :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

3.a) Précisons l'ensemble de dérivabilité de f et déterminons la fonction dérivée f' de f .

f est dérivable sur $E = [0; 2[\cup]2; 3[\cup]3; +\infty[$ et on a :

$$\begin{cases} f'(x) = (2x - 3) \ln 2 \times 2^{(x^2 - 3x + 2)}, \text{ si } x \in [0; 2[\\ f'(x) = 1 + \frac{1}{(x - 2)[\ln(x - 2)]^2} \text{ si } x \in]2; 3[\cup]3; +\infty[\end{cases}$$

b) Etudions le sens de variation de f .

On déduit de ce qui précède que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $[\frac{3}{2}; 3[$ et $]3; +\infty[$ puis strictement décroissante sur $[0; \frac{3}{2}]$.

4.a-b) L'étude des variations de f se résume dans le tableau ci-contre :

x	0	$\frac{3}{2}$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	4	$2^{-\frac{1}{4}}$	$+\infty$	$+\infty$

5.a) Démonstration

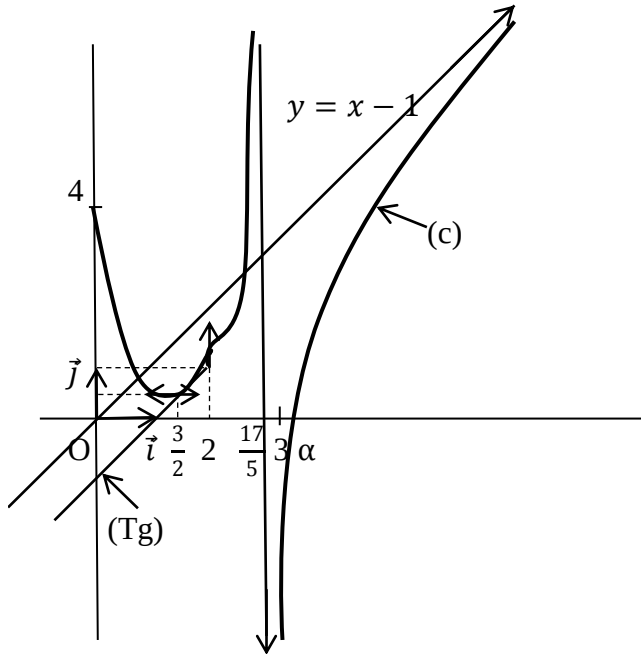
$$f(x) - y = -\frac{1}{\ln(x-2)}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$, d'où la droite d'équa -

tion $y = x - 1$ est asymptote à (c).

b) Démonstration (vue)

c) Construisons la courbe (c)



a) Justifions que F est définie et dérivable sur $[4; +\infty[$

$$F(x) = \int_4^x \frac{dt}{\ln(t-2)}$$

$$\text{Soit } u(t) = \frac{1}{\ln(t-2)}$$

u est définie sur $\mathfrak{N} =]2; 3[\cup]3; +\infty[$.

Comme $[4; +\infty[\subset \mathfrak{N}$, alors u définie sur

$[4; +\infty[$. De plus, u est continue sur $[4; +\infty[$.

Par suite, $F(x) = \int_4^x u(t)dt$ est définie sur

$[4; +\infty[$. Par ailleurs, F étant l'unique primitive de la fonction u qui s'annule en 4, alors est dérivable sur $[4; +\infty[$ puisque u est dérivable sur $[4; +\infty[$.

En conclusion, F est définie et dérivable sur $\mathfrak{D} = [4; +\infty[$.

b) Sens de variation de F

F est dérivable sur $\mathfrak{D}$ et on a

$$F'(x) = u(x) = \frac{1}{\ln(x-2)}$$

$\forall x \in \mathfrak{D}, x - 2 > 1$, donc $\ln(x - 2) > 0$. Soit $u(x) > 0$.

Il en résulte que F est strictement croissante sur $[4; +\infty[$.

c) Par la méthode des rectangles, donnons un encadrement de $F(5)$ par deux nombres décimaux d'ordre 3.

On divise $[4; 5]$ en 5 intervalles de même amplitude :

$$\frac{b-a}{n} = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Soit } S_1 = \frac{1}{5} \left[u(4) + u\left(\frac{21}{5}\right) + u\left(\frac{22}{5}\right) + u\left(\frac{23}{5}\right) + u\left(\frac{24}{5}\right) \right] \approx 1,1738.$$

$$\text{Soit } S_2 = \frac{1}{5} \left[u\left(\frac{21}{5}\right) + u\left(\frac{22}{5}\right) + u\left(\frac{23}{5}\right) + u\left(\frac{24}{5}\right) + u(5) \right] \approx 1,0674$$

u est strictement décroissante sur $[4; 5]$.

On a $S_2 \leq F(5) \leq S_1$.

D'où $1,060 \leq F(5) \leq 1,174$.

d°) Soit $\mathfrak{B}$ cette aire.

$$\mathfrak{B} = \int_4^5 f(x)dx \cdot \text{cm}^2 = \left[\int_4^5 (x-1)dx - \int_4^5 \frac{1}{\ln(x-2)} dx \right] \text{cm}^2 = \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_4^5 - F(5)$$

$$\mathfrak{B} = (3,5 - F(5)) \text{ cm}^2$$

D'où $1,766 \text{ cm}^2 \leq \mathfrak{B} \leq 2,44 \text{ cm}^2$.

7.a) Démonstration

f est continue et strictement croissante sur

$\left[\frac{3}{2}; 2\right]$ et $f\left(\left[\frac{3}{2}; 2\right]\right) = \left[2^{-\frac{1}{4}}; 1\right]$. Comme g est la restriction de f à l'intervalle $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$, donc g est

une bijection de $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$ vers $\left[2^{-\frac{1}{4}}; 1\right]$.

Par conséquent, elle admet une bijection réciproque g^{-1} .

b) Déterminons l'intervalle K sur lequel g^{-1} est dérivable.

$$K = \left[2^{-\frac{1}{4}}; 1\right] \{f(x) \text{ tq } f'(x) = 0\}$$

$$\text{Soit } K = \left[2^{-\frac{1}{4}}; 1\right]$$

8°) a)

On a $f(2) = 1$, donc $g^{-1}(1) = 2$. Par conséquent le point $A(1; 2)$ appartient à (Γ) .

Séquence 10 : Calcul Intégral**Activité 1****1) Calculons les intégrales suivantes**

a) $A = \int_0^1 (x^3 + 2x - 1) dx$

$$A = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^2 - x \right]_0^1$$

Soit $A = \frac{1}{4}$.

b) $B = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{|x|}} \right) dx$

$$B = \left[-\frac{1}{x} + 2\sqrt{|x|} \right]_{-1}^1$$

Soit $B = -2$.

c)

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 2x + \cos 3x + x^2) dx$$

$$C = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

Soit $C = \frac{7}{12} + \frac{\pi^3}{648}$.

d) $D = \int_0^2 \sqrt{x+1} dx$

$$D = \left[\frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} \right]_0^2$$

Soit $D = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$.

e) $E = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$

$$E = [\tan x + \cotan x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}; \text{ soit } E = 0.$$

f) $F = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

$$F = \left[\frac{1}{2} \ln^2 x \right]_1^e; \text{ soit } F = \frac{1}{2}.$$

g) $G = \int_0^1 \frac{-3x}{(x^2+1)^2} dx$

$$G = \left[\frac{3}{2(x^2+1)} \right]_0^1; G = \frac{-3}{4}.$$

h) $H = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$

$$H = \left[\frac{\sin^4 x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}; \text{ soit } H = \frac{1}{4}.$$

i) $I = \int_1^2 (3 + \ln x - e^{2x+1}) dx$

$$I = [3x + x \ln x - x - \frac{1}{2} e^{2x+1}]_1^2$$

Soit $I = 2 + 2 \ln 2 + \frac{e^3 - e^5}{2}$.

j) $J = \int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1} dx$

$$J = \left[\frac{1}{3} \ln(x^3 + 1) \right]_0^1; J = \frac{1}{3} \ln 2$$

2) a) Démonstration

Par réduction au même dénominateur,

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} = \frac{b}{1+t} = \frac{t(a-b) + (a+b)}{1-t^2}$$

Par identification,

$$\begin{cases} a-b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \text{ dont on déduit } a=b=\frac{1}{2}$$

$$\text{D'où finalement, } \forall t \in]-1, 1[, \frac{1}{1-t^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-t} + \frac{\frac{1}{2}}{1+t}$$

b) calculons f(x)

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{1-t} dt + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$$

Une fonction primitive sur $] -1, 1[$ de la

fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ est $t \mapsto \ln(1+t)$.

Une fonction primitive sur $] -1, 1[$ de la

fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ est $t \mapsto -\ln(1-t)$.

$$\text{Ainsi, } f(x) = \frac{1}{2} [-\ln(1-t)]_0^x + \frac{1}{2} [\ln(1+t)]_0^x$$

Soit $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

3) calculons F

$$F = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

Posons $x = \tan \theta$

• si $x=1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

• si $x=0$, $\theta=0$

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 + \tan^2 \theta \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 \theta) d\theta$$

$$\text{Ainsi, } F = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} (1 + \tan^2 \theta) d\theta$$

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

Soit $F = \frac{\pi}{4}$.

Activité 2**Calculons les intégrales suivantes à l'aide d'intégration par partie**

a) $A = \int_0^x x \cos x dx$

Posons : $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos x$

On a : $u'(x)=1$ et $v(x) = \sin x$

Ainsi, $A = [x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \, dx$

On trouve **A = -2**.

$$b) \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$$

Posons : $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

On a $u'(x)=1$ et $v(x) = \tan x$

Ainsi $B = [x \tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx$

$$= \frac{\pi}{4} - [\ln |\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{Soit } \mathbf{B} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

$$c) \quad C = \int_1^e x^2 \ln x \, dx$$

Posons : $u'(x) = x^2$ et $v(x) = \ln x$

On a $u(x) = \frac{x^3}{3}$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$

Ainsi $C = - \int_1^e \frac{x^3}{3} \, dx + [\frac{x^3 \ln x}{3}]_1^e$.

$$\text{On trouve } \mathbf{C} = \frac{2e^3 + 1}{9}.$$

$$d) \quad D = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2 \sin 2t \, dt$$

On fait une double intégration par partie puis on déduit le résultat.

$$e) \quad E = \int_{-1}^0 (x+1)^2 e^{-x} \, dx$$

Ici également on fera une intégration par partie

Posons : $u(x) = (1+x)^2$ et $v'(x) = e^{-x}$

On a $u'(x) = 2(x+1)$ et $v(x) = -e^{-x}$

Donc $E = [-(1+x^2)e^{-x}]_{-1}^0 + 2 \int_{-1}^0 (1+x)e^{-x} \, dx$

$$= -1 + 2 \int_{-1}^0 (x+1)e^{-x} \, dx.$$

Posons : $f(x) = 1+x$ et $g'(x) = e^{-x}$

On a $f'(x) = 1$ et $g(x) = -e^{-x}$

Ainsi, $\int_{-1}^0 e^{-x} (1+x) \, dx = -[(1+x)e^{-x}]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 e^{-x} \, dx = e - 2$

Par suite **I = 2e - 5**.

Activité 3

1) a) calcul de la dérivée

$$(\sqrt{x^2 + 2})' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

Dérivée f' de f

On calcule et on trouve $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$.

b) valeur de I

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2} \, dx = \int_0^1 f'(x) \, dx = [f(x)]_0^1$$

Soit $\mathbf{I} = \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

2)

a) vérifions que J+2I=K

$$J+2I = \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}} \, dx = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} \, dx = K$$

Soit **J+2I=K**

b) montrons que K=√3-J

En posant $u'(x)=1$ et $v(x)=\sqrt{x^2+2}$

On a $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

Alors $k = [x\sqrt{x^2+2}]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} \, dx$

$$\mathbf{K} = \sqrt{3} - J$$

c) valeurs de J et de K

$$\begin{cases} J + 2I = K \\ \sqrt{3} - J = K \end{cases}, \text{ on déduit que}$$

$$\begin{cases} k = \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ J = -\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Activité 5

1) a. Calcul de la dérivée

$$(\ln(x + \sqrt{x^2 + 2}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

b. calculons I

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} \, dx = [\ln(x + \sqrt{x^2 + 2})]_0^1$$

Soit $\mathbf{I} = \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

2) valeur approchée de I :

a. Par la méthode des rectangles

On subdivise $[0;1]$ en 4 intervalles de même amplitude ($a=0, b=1$ et $n=4$).

$$\frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0,25$$

$x_0=a=0, x_1=0,25, x_2=0,5, x_3=0,75, x_4=1$

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}},$$

$$f(x_0)=0,707, f(x_1)=0,696, f(x_2)=0,666, f(x_3)=0,624, f(x_4)=0,577$$

Ainsi, on a :

$$\bullet S_1 = \frac{b-a}{n} [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)]$$

$$S_1 = 0,673$$

$$\bullet S_2 = \frac{b-a}{n} [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)]$$

$$S_2 = 0,640$$

$$\text{On a } I \approx \frac{S_1 + S_2}{2}$$

$$\text{Soit } I \approx \underline{\underline{0,656}}$$

b) méthode des trapèzes

$$I = \frac{b-a}{n} \left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \frac{1}{2} f(x_4) \right]$$

$$\underline{\underline{I \approx 0,656}}$$

c) comparaison

Les valeurs approchées de I trouvées par la méthode des rectangles et des trapèzes sont les mêmes ou très voisines

3.) Vérification

$$I = \ln \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) \approx 0,312$$

On remarque qu'il y a un petit écart entre cette valeur et les valeurs approchées. Cela se justifie par la faible valeur du nombre de subdivisions de l'intervalle $[0 ; 1]$ et par le fait que tous les chiffres après la virgule des $f(x_i)$ calculés ne sont pas pris en compte.

Prononciation

Il est évident que la meilleure méthode est celle qui consiste à faire le calcul avec une primitive de la fonction à intégrer. Cela permet de trouver le résultat exact plutôt qu'approximatif ne prenant souvent pas en compte tous les chiffres.

Activité 4

Ici, c'est seulement l'exemple appliqué que nous avons corrigé. Cela devrait vous inspirer à pouvoir faire le reste.

$$\begin{aligned} 1.) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \frac{k^2}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \end{aligned}$$

On remarque que si $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ alors

$$f\left(0 + k \frac{1-0}{n}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

(on peut faire un changement de variable trigonométrique à cette étape).

De façon directe,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\tan^{-1}(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

On a donc: $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{4}}$

2.) On montre de même que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx.$$

Comme $n \rightarrow +\infty$, alors $\frac{x}{n} \rightarrow 0$, et par suite :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} = \int_0^1 dx = 1}$$

Activité 6

1) Calculons l'aire A

$$\text{Soit } f(x) = (x-1)(2-e^{-x}).$$

Etudions d'abord la position de la droite (D) : $y=2x-2$ par rapport à (c).

$$f(x) - (2x-2) = -(x-1)e^{-x}$$

- Si $x \leq 1$, $f(x) - (2x-2) \geq 0$ donc (c) est au-dessus de (D).

- Si $x \geq 1$, $f(x) - (2x - 2) \leq 0$ donc (c) est en dessous de (D).

Comme ici, $x \geq 1$, alors

$$A = \int_1^3 [(2x - 2) - f(x)] dx. u.a$$

$$= \int_1^3 (x - 1)e^{-x} dx. u.a$$

Une intégration par partie permet de trouver

$$\underline{\underline{A = (e^{-1} - 3e^{-3})}}.$$

2)

a. valeur moyenne de f

$$V_{mf}_{[1,3]} = \frac{1}{3-1} \int_1^3 f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^3 \left(\frac{\ln x}{x} + 3x - 1 \right) dx$$

$$V_{mf}_{[1,3]} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 + \frac{3}{2} x^2 - x \right]_1^3$$

$$\text{Soit } V_{mf}_{[1,3]} = \frac{\ln^2 3}{4} + 20.$$

b. calculons A(α)

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, (cf) est au dessus de l'axe (ox)

$$\text{Donc } A(\alpha) = \int_1^\alpha f(x) dx. u.a$$

$$A(\alpha) = \left(\frac{1}{2} \ln^2 \alpha + \frac{3}{2} \alpha^2 - \alpha - \frac{1}{2} \right).$$

c. déduisons en A(2)

$$A(2) = \frac{1}{2} \ln^2 2 + 6 - 4 - \frac{1}{2}$$

$$\text{Soit } A(2) = \left(\ln^2 \sqrt{2} + \frac{3}{2} \right) u.a$$

d. Calculons $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \ln^2 \alpha + \frac{3}{2} \alpha^2 - \alpha - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha \left(\frac{\ln^2 \alpha}{2\alpha} + \frac{3}{2} \alpha - 1 - \frac{1}{2\alpha} \right)$$

$$\text{Soit } \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha) = +\infty.$$

3)

a. calculons v(α)

$$v(\alpha) = \pi \int_\alpha^{\ln 2} [f(x)]^2 dx. u.v$$

$$= \pi \int_\alpha^{\ln 2} (1 - e^{-2x}) dx. u.v$$

$$\text{On trouve } V(\alpha) = \pi \left(\frac{1}{8} + \ln 2 - \alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha} \right) u.v.$$

b) Calculons $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} V(\alpha)$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} V(\alpha) = \left(-\frac{3}{8} + \ln 2 \right) u.v$$

c) Interprétation géométrique

- $I_\alpha = \int_\alpha^{\ln 2} g(x) dx$ est l'aire en unité d'aire de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de g, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = \ln 2$.
- $H_\alpha = \int_{\ln 2}^\alpha g(x) dx$ est l'opposé de l'aire en unité d'aire de la partie de plan limitée par la courbe de g, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = \ln 2$.

d) Calculons : u.a I_α

$$u.a \ I_\alpha = \int_\alpha^{\ln 2} f(x) dx. u.a$$

$$= \left[-f(x) - \frac{1}{2} \ln |1 - f(x)| + \frac{1}{2} \ln |1 + f(x)| \right]_\alpha^{\ln 2}$$

On trouve :

$$u.a \ I_\alpha = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \ln(2 + \sqrt{3}) + \sqrt{1 - e^{-2\alpha}} - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{-2\alpha}}) - \alpha \right) u.a$$

On en déduit que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} u.a \ I_\alpha = \ln(1 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} u.a$$

Activité 7

Ici, c'est seulement l'exemple appliqué qui a été corrigé. Cela devrait être une source d'inspiration pour achever le reste de l'activité.

$$1.) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \frac{k^2}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

On remarque que si $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ alors

$$f\left(0 + k \frac{1-0}{n}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx.$$

(on peut faire un changement de variable trigonométrique à cette étape).

De façon directe,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\tan^{-1}(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

On a donc:
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{4}$$

2.) On montre de même que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{x}{n}} dx.$$

Comme $n \rightarrow +\infty$, alors $\frac{x}{n} \rightarrow 0$, et par suite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} = \int_0^1 dx = 1$$

$$\begin{aligned} 3.) \int_{\ln x}^{e^x} \sqrt{1+t} dt &= \left[\frac{2}{3} (1+t)^{\frac{3}{2}} \right]_{\ln x}^{e^x} \\ &= \frac{2}{3} \left[(1+e^x)^{\frac{3}{2}} - (1+\ln x)^{\frac{3}{2}} \right] \end{aligned}$$

Donc on a :
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\ln x}^{e^x} \sqrt{1+t} dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} \left[(1+e^x)^{\frac{3}{2}} - (1+\ln x)^{\frac{3}{2}} \right] = +\infty$$

$$4.) \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \sin(3t+1) dt = \frac{1}{3} \left[\cos(1) - \cos\left(\frac{3}{\sqrt{x}} + 1\right) \right]$$

Donc on a :
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \sin(3t+1) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left[\cos(1) - \cos\left(\frac{3}{\sqrt{x}} + 1\right) \right]$$

$$= \frac{1}{3} [\cos(1) - \cos(1)] = 0.$$

Activité 8

1) Ensemble de définition de G

$$G(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

comme G est une primitive de f alors G est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Montrons que G est impaire

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $-x \in \mathbb{R}$

$$G(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

Posons : $u = -t$

On a $du = -dt$

$$\text{Si } t = \begin{cases} -x \\ 0 \end{cases} \Rightarrow u = \begin{cases} x \\ 0 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } G(-x) = \int_0^x \frac{(-du)}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\text{Soit } G(-x) = - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

$G(-x) = -G(x)$ d'où G est impaire.

3) Sens de variation de G

G est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\text{on a : } \forall x \in \mathbb{R} \quad G'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$G'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, donc G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4) Montrons

Nous savons que t est compris entre 0 et x

Comme $x \in [0, +\infty[$, alors $0 \leq t$.

De ce fait, $1+t^2 + 2t \geq 1+t^2$ donc

$$(1+t)^2 \geq 1+t^2 \Rightarrow 1+t \geq \sqrt{1+t^2}$$

$$\text{Donc } \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \geq \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$$

$$\Rightarrow [\ln(1+t)]_0^x \leq G(x)$$

Soit $\ln(1+x) \leq G(x)$ d'où le résultat.

5) Tableau de variation de G

- Pour $x \in [0, +\infty[$, $\ln(x+1) \leq G(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$.

- G est impaire. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = -\infty$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$G'(x)$		+	
$G(x)$	$-\infty$	O	$+\infty$

6) Preuve

Il est clair que si $t \geq 0$, alors $1+t \leq 1+t^2$

$$\text{Donc } \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leq \frac{1}{1+t}$$

$$0 \leq x \text{ donc } \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \leq \int_0^x \frac{dt}{1+t}$$

$$\Rightarrow G(x) \leq [2\sqrt{1+t}]_0^x$$

$$G(x) \leq 2(\sqrt{x+1} - 1).$$

Ainsi $\forall x \in [0, +\infty[$, on a :

$$\ln(x+1) \leq G(x) \leq 2(\sqrt{x+1} - 1)$$

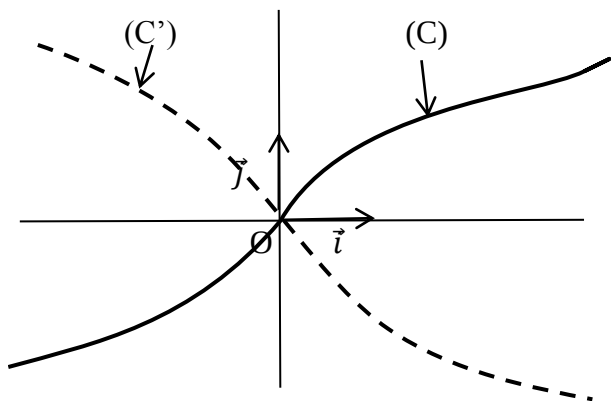
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0, \text{ et de même,}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(\sqrt{x+1} - 1)}{x} = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x} = 0.$$

On en déduit que (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

G étant impaire, alors (C) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

Construction de (C) et (C')



Activité 11

Partie A

1) Variation de f

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Etudions la dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 1$$

$$\text{De même, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

On déduit que f est dérivable en 0. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{u(x)}{x^2} \text{ avec } u(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1).$$

f'(x) a le signe de u(x).

Cherchons le signe de u(x)

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$u'(x) = \frac{2x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

On déduit que $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]0, 1[$, $u'(x) > 0$ et $\forall x \in]-1, 0[\cup]1, +\infty[$, $u'(x) < 0$.

On déduit le tableau de variation de u suivant :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$u'(x)$	+	•	-	•	+
$u(x)$	$-\infty$	$1-\ln 2$	0	$1-\ln 2$	$-\infty$

De ce tableau, on déduit que $\forall x \in]-\infty, \alpha[\cup]\beta, +\infty[$, $u(x) < 0$ avec $\alpha \in]-\infty, -1[$ et $u(\alpha) = 0$ et $\beta \in]1, +\infty[$ et $u(\beta) = 0$ de même, $\forall x \in]\alpha, 0[\cup]0, \beta[$, $u(x) > 0$ et $u(0) = 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $[\alpha; \beta]$ puis strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha[\cup]\beta, +\infty[$.

Tableau de variation de f

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \ln |x|}{x} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{x}$$

$$\text{D'où } \lim_{-\infty} f = 0$$

On trouve de même que $\lim_{+\infty} f = 0$.

x	$-\infty$	α	0	β	$+\infty$
$f'(x)$	-	•	+	•	-
$f(x)$	0	↘ ↗		$f(\beta)$	0
				0	

2) Montrons

soit $v(x) = \ln(1+x) - x$

v est définie, continue et dérivable sur $] -1, +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in] -1, +\infty[, v'(x) = \frac{-x}{1+x}$$

- Pour $x \in] -1, 0[$, $-x > 0$ et $1+x > 0$, donc $v'(x) > 0$.
- Pour $x \in] 0, +\infty[$, $v'(x) < 0$ donc v croît sur $] -1, 0[$ et décroît sur $] 0, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} v(x) = -\infty \text{ et } \lim_{-\infty} v = -\infty.$$

(faire le tableau de variation de v)

On déduit de ce tableau de variation que

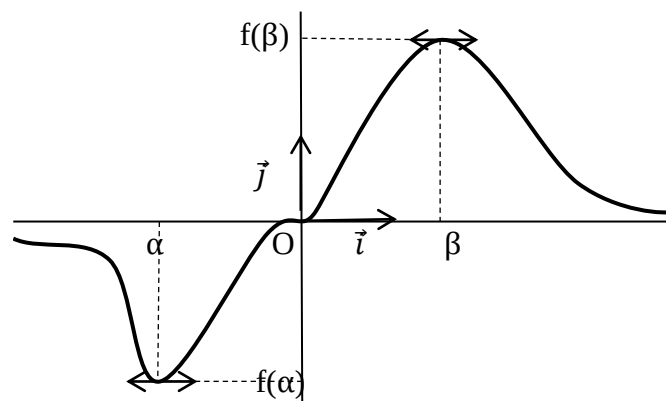
$\forall x > -1, v(x) < 0$ c'est-à-dire

$$\ln(1+x) - x \leq 0.$$

$$\text{Soit } \ln(1+x) \leq x$$

Déduction

En 0, (c) a pour tangente la droite d'équation $y=0$.



Partie B

3) Montrons

$$G(x) = \int_0^x \frac{\ln(t^2+1)}{t} dt$$

$$\bullet \quad G(r) = \int_0^r \frac{\ln(t^2+1)}{t} dt$$

$G(r)$ est l'aire en unité d'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=r$.

$$\bullet \quad G(-r) = \int_0^{-r} \frac{\ln(t^2+1)}{t} dt$$

$$= \int_0^r \frac{\ln(-t^2+1)}{-t} (-dt)$$

Soit $G(-r) = G(r)$, on tire la même conclusion.

Puisque $G(-r) = G(r)$, alors on a la conclusion.

Déduction

G est définie sur $\mathbb{R}$ et si $x \in \mathbb{R}$ on a $-x \in \mathbb{R}$ et $G(x) = G(-x)$.

On déduit que G est paire.

Variation de G

G est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$G'(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}.$$

On déduit de ce qui précède que G est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ puis strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

4.a) montrons

(C) est au-dessus de la tangente en 0 sur $]0, +\infty[$.

On a $f(x) \geq 0$, il est de même clair que

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad f(x) \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc } 0 \leq f(t) \leq \frac{1}{2}, \forall t > 0.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 0 dt \leq \int_0^1 f(x) dt \leq \int_0^1 \frac{1}{2} dt.$$

$$\text{Soit } 0 \leq G(1) \leq \frac{1}{2}.$$

b) montrons

Il est clair que si $t \geq 1$, on a $t^2 \geq 1$

Alors $t^2 + t^2 \geq 1 + t^2$. Ceci implique que :

$$2t^2 \leq 1 + t^2 \leq 2t^2,$$

donc $\ln(t^2) \leq \ln(1+t^2) \leq \ln(2t^2)$, (car la fonction $\ln$ est croissante).

$t \geq 1$, donc $\frac{1}{t} > 0$ et par suite :

$$\frac{\ln(t^2)}{t} \leq \frac{\ln(1+t^2)}{t} \leq \frac{\ln(2t^2)}{t}.$$

c) calculons

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt = \left[\frac{1}{2} \ln^2 t \right]_1^x$$

$$\text{Soit } \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt = \frac{1}{2} \ln^2 x.$$

Déduction

$$\text{On a : } \int_0^x \frac{\ln t^2}{t} dt \leq \int_0^1 \frac{\ln(t^2+1)}{t} dt \leq \int_0^x \frac{\ln(2t^2)}{t} dt$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln^2 x = +\infty$$

$$\text{Comme } \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt \leq \int_0^x \frac{\ln t^2}{t} dt.$$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty.$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{2x} = 0$$

$$\bullet \quad \int_1^x \frac{\ln(2t^2)}{t} dt = \ln 2 \ln x + \ln^2 x$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x \frac{\ln(2t^2)}{t} dt = 0.$$

$$\text{On déduit que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x} = 0$$

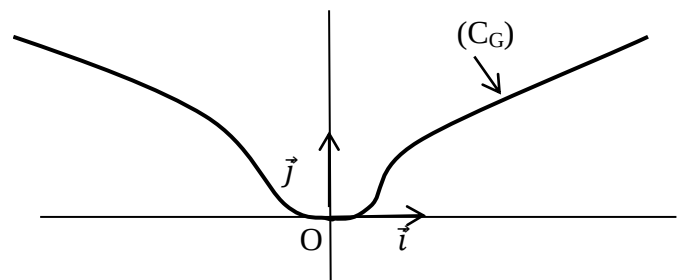
(G) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

5) Allure de (C_G)

G est paire. On déduit que $\lim_{-\infty} G = -\infty$

et que G admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$G'(x)$	-		+
$G(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$



Séquence 11: Equations différentielles

Activité 1

Résolvons les équations différentielles suivantes

$$1^\circ) y' - 2y = 0$$

Cette équation est sous la forme :

$$ay' + by = 0.$$

On en déduit que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions

y_k définie par : $y_k(x) = ke^{2x}$.

Comme de plus $y(2) = -6$, alors $k = -6e^{-4}$

$$\text{D'où } y_2(x) = -\frac{6}{e^4} e^{2x}.$$

$$2^\circ) y' = \tan x + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0$$

Cette équation est sous la forme $y' = f(x)$
On en déduit que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y_k , primitives de y' , définie par :

$$y_k(x) = -\ln(\cos x) - \frac{1}{\cos x} + k$$

Comme $y_k\left(\frac{\pi}{3}\right) = \ln 2$, alors $k = 2$.

$$\text{D'où } y = -\ln(\cos x) - \frac{1}{\cos x} + 2.$$

$$3^\circ) y'' = 2x + 1$$

Cette équation est sous la forme $y'' = f(x)$

On en déduit que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions y_k , primitives secondes ou d'ordre 2 de y'' .

$$y'' = 2x + 1 \Rightarrow y'_k = x^2 + x + k, k \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow y_k = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + kx + k'; (k, k') \in \mathbb{R}^2.$$

On a : $y(0) = 3 \Rightarrow k' = 3$ et $y'(0) = 1$, donc $k = 1$.

$$\text{D'où } y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 3.$$

$$4^\circ) y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants sans second membre.

L'équation caractéristique qui lui est associée est : $r^2 - 4r + 3 = 0$.

Le discriminant Δ de cette équation est :

$$\Delta = 4.$$

On trouve $r = 1$ ou $r = 3$.

Ainsi, les solutions de cette équation sont les fonctions $f_k: x \mapsto Ae^x + Be^{3x}$ avec $(A; B) \in \mathbb{R}^2$.

$$5^\circ) 6y'' - 12y' + 10y = 0.$$

On est en présence d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants sans second membre.

Une équation caractéristique associée est :

$$6r^2 - 12r + 10 = 0.$$

$$\Delta = -96 = (4i\sqrt{6})^2$$

$$\text{On trouve : } r = 1 - i\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ ou } r = 1 + i\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ainsi, les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions : $f_k: x \mapsto (Ax + B)e^x$ avec $(A; B) \in \mathbb{R}^2$.

Activité 2

1.) Résolvons

$$(E') : y'' + 3y' - y = 0.$$

Les solutions de (E') sont les fonctions f_k définies par :

$$f_k: x \mapsto Ae^{\left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right)x} + Be^{\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)x} \text{ avec } (A; B) \in \mathbb{R}^2.$$

2) Déterminons les réels a et b

$$g(x) = ax + b$$

g est solution de (E) si et seulement si

$$g'' + 3g' - g = 2x + 5.$$

g est plus d'une fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = a \text{ et } g''(x) = 0.$$

$$g'' + 3g' - g = 3a - ax - b$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} -a = 2 \\ 3a - b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -11 \end{cases}$$

$$\text{Soit } g(x) = -2x - 11$$

3.) Démonstration

☞ Soit f solution de E .

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } E &\Rightarrow f'' + 3f' - f = 2x + 5 \\ &\Rightarrow f'' + 3f' - f = g'' + 3g - g \text{ (car } g \text{ est} \\ &\quad \text{solution de } (E)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (f'' - g'') + 3(f' - g') - (f - g) = 0$$

$$\Rightarrow (f - g)'' + 3(f - g)' - (f - g) = 0$$

$$\Rightarrow f - g \text{ est solution de } (E'). \quad (1)$$

☞ Soit $f - g$ solution de (E')

$$\text{On a : } (f'' - g'') + 3(f' - g') - (f - g) = 0$$

$$\Rightarrow f'' + 3f' - f = g'' + 3g - g$$

$$\Rightarrow f'' + 3f' - f = 2x + 5 \text{ (car } g'' + 3g - g = 2x + 5)$$

$$\text{D'où } f \text{ est solution de } (E). \quad (2)$$

De (1) et (2), on conclut que f est solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est solution de (E') .

4.) Résolvons (E)

Les solutions de (E) sont les fonctions f telles que $f - g$ soit solution de (E') .

Or les solutions de (E') d'après la question 1) sont les fonctions f_k . On en déduit que $f - g = f_k$.
Soit $f = g + f_k$

$$\text{D'où } h(x) = -2x - 11 + Ae^{\left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right)x} + Be^{\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)x}, (A; B) \in \mathbb{R}^2.$$

5.) Déterminons h.

$$\text{On a : } h(x) = -2x - 11 + Ae^{\left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right)x} + Be^{\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)x}$$

$$h(0) = 1 \Rightarrow A + B = 2$$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},$$

$$h'(x) = -2 + A\left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right)e^{\left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right)x} +$$

$$B\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)e^{\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)x}$$

$$h'(0) = -2 \Rightarrow (-3 - \sqrt{13})A + (-3 + \sqrt{13})B = 0.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ (-3 - \sqrt{13})A + (-3 + \sqrt{13})B = 0 \end{cases}$$

$$\text{On déduit que } A = \frac{-3+\sqrt{13}}{\sqrt{13}} \text{ et } B = \frac{3+\sqrt{13}}{\sqrt{13}}.$$

D'où

$$h(x) = -2x - 11 + \frac{-3+\sqrt{13}}{\sqrt{13}}e^{\left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right)x} + \frac{3+\sqrt{13}}{\sqrt{13}}e^{\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)x}.$$

Activité 3

1.) Résolvons (E')

$$(E') : y'' + 2y' + 2y = 0$$

Les solutions de (E') sont les fonctions f_k définies par : $f_k(x) = (Ax + B)e^{-x}$ avec $(A; B) \in \mathbb{R}^2$.

2.) Déterminons a et b

$$p(x) = e^{-x}(ax + b)$$

$$p \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow p'' + 2p' + 2p = e^{-x}\left(-x + \frac{1}{2}\right)$$

p est plus d'une fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, p'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x}$$

$$p''(x) = (-2a + ax + b)e^{-x}.$$

Par identification, on a : $a = -1$ et $b = \frac{1}{2}$.

$$\text{D'où } \boxed{p(x) = \left(-x + \frac{1}{2}\right)e^{-x}}$$

3.a) Démonstration

☞ Soit q solution (E)

$$\text{On a : } q'' + 2q' + 2q = \left(-x + \frac{1}{2}\right)e^{-x}$$

$$\Rightarrow q'' + 2q' + 2q = p'' + 2p' + 2p \text{ (car p est solution de (E))}$$

$$\Rightarrow (q-p)'' + 2(q-p)' + 2(q-p) = 0$$

$$\Rightarrow (p-q)'' + 2(p-q)' + 2(p-q) = 0$$

$$\Rightarrow p-q \text{ est solution de (E')} \quad (1)$$

☞ Réciproquement, si $p-q$ est solution de (E'), alors on a :

$$(p-q)'' + 2(p-q)' + 2(p-q) = 0$$

$$\Rightarrow q'' + 2q' + 2q = p'' + 2p' + 2p$$

$$\Rightarrow q'' + 2q' + 2q = \left(-x + \frac{1}{2}\right)e^{-x} \text{ (car } p'' + 2p' + 2p = \left(-x + \frac{1}{2}\right)e^{-x})}$$

$$\text{D'où q est solution de (E)} \quad (2)$$

De (1) et (2), on conclut que q est solution de (E) si et seulement si la fonction $p-q$ est solution de (E').

b) Déterminons les solutions de (E)

Les solutions de (E) sont les fonctions q telles que $p-q$ soit solution de (E'). On déduit que

$$p(x) - q(x) = f_k(x) =$$

$$(Ax + B)e^{-x}$$

$$\Rightarrow q(x) = p(x) - (Ax + B)e^{-x}$$

$$\text{D'où } \mathbf{q(x) = \left[(-1 - A)x + \frac{1}{2} - B\right]e^{-x}}.$$

4.a) Déterminons la fonction φ

φ est solution de (E), donc

$$\varphi(x) = \left[(-1 - A)x + \frac{1}{2} - B\right]e^{-x}$$

$$\varphi(0) = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = -\frac{3}{2} - A + B + (1 + A)x$$

$$\varphi(0) = -\frac{3}{2} \Rightarrow B - A = 0 \Rightarrow A = B = \frac{1}{2}$$

$$D'où \boxed{\varphi(x) = -\frac{3}{2}xe^{-x}}$$

Activité 4**1.a) Déterminons m**

$$g_m: x \rightarrow (1 + mx)e^{(m-3)x}, m \in \mathbb{R}$$

g_m est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'_m(x) = (m^2x - 3mx + 2m - 3)e^{(m-3)x}$$

$$g'_m(0) = -1 \Leftrightarrow 2m - 3 = 1 \Leftrightarrow m = 1$$

b) Vérification

$$m^3 + 4m + 1 = 6 \text{ et } m^2 - 1 = 0$$

On a : $6 \equiv 0[6]$, d'où $m^3 + 4m + 1 \equiv m^2 - 1[6]$

2.a) Réécrivons $g_m(x) = h(x)$.

$$\text{On a : } m = \int_0^1 t dt + \ln \sqrt{e} = 1$$

D'où $h(x) = (x + 1)e^{-2x}$.

b) Déterminons a et b

On trouve : (E) : $y'' + 4y' + 4y = 0$.

3.) Démonstration

Soit $p(n)$ la proposition :

« $h^{(n+2)}(x) + 4h^{(n+1)}(x) + 4h^{(n)}(x) = 0$ »

☞ On a :

$$h'(x) = -(2x + 1)e^{-2x}; h''(x) = 4xe^{-2x} \text{ et } h^{(3)}(x) = 4(-2x + 1)e^{-2x}$$

Ainsi, on a :

$$h^{(3)}(x) + 4h''(x) + 4h'(x) = (4 - 8x + 16x - 8x - 4)e^{-2x} = 0, \text{ d'où } p(1) \text{ est vraie.}$$

☞ Soit k un entier naturel non nul.

Si $p(k)$ est vraie, alors

$$h^{(k+2)}(x) + 4h^{(k+1)}(x) + 4h^{(k)}(x) = 0$$

En dérivant, on obtient :

$$h^{(k+3)}(x) + 4h^{(k+2)}(x) + 4h^{(k+1)}(x) = 0$$

Donc $p(k+1)$ est vraie.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*, h^{(n+2)}(x) + 4h^{(n+1)}(x) + 4h^{(n)}(x) = 0$, d'où $h^{(n)}$ est solution de (E).

4) Déterminons parmi les primitives de h celle qui est solution de (E).

Soit g les primitives de h . Il suffit de décomposer h par intégration par partie pour trouver la fonction g .

g est solution de (E) si $g'' + 4g' + 4g = 0$.

On trouve : $g(x) = -\frac{1}{4}(2x + 3)e^{-2x}$.

Séquence 12 : Probabilités**Activité 1****1°) Déterminons le nombre de filles qui suivent les deux cours de langues**

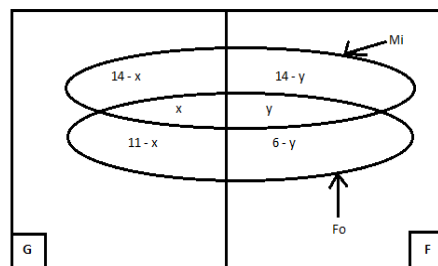
Nous allons utiliser les diagrammes.

G et F représentent respectivement les ensembles des garçons et des filles de cette classe. De plus, M_i et F_o représentent respectivement les ensembles des élèves étudiant le "Mina" et le "Fon".

On désigne respectivement par x et y le nombre de garçons et de filles apprenant les deux langues. On sait que dans cette classe,

- Il y a 16 filles, donc 24 garçons,
- 12 filles, donc 14 garçons apprenant le "Mina",
- 6 filles, donc 11 garçons apprenant le "Fon".

On a les diagrammes ci-après :



Avec ce diagramme, l'effectif des garçons donne : $x + (12-x) + (11-x)$ et celui des filles donne : $y + (14-y) + (6-y)$.

Nous avons de plus que $x+y=7$.

En utilisant l'un ou l'autre des effectifs, (soit ici pour les garçons), on a :

$$\begin{cases} (14-x) + x + (11-x) = 24 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

On en déduit que $x=3$ et $y=4$.

Ainsi, il y a **3 garçons et 4 filles** qui suivent les deux cours de langues.

2°) Déterminons le nombre de filles qui ne suivent aucun cours.

Il y a $16-(8+4+2)$, soit 2 filles dans le cas.

Activité 2

1°) Démontrons que M_2 et M_3 forment une partition de E.

On a : $M_2 = \{4; 8; 10; 16\}$ et $M_3 = \{9; 15; 21\}$

$$M_1 \cup M_3 = E \text{ et } M_2 \cap M_3 = \emptyset$$

Par conséquent, M_2 et M_3 forment une partition de E.

2°) On a : $M_2 = \{4; 8; 10; 12; 16; 18\}$ et $M_3 = \{9; 12; 15; 18; 21\}$

$$M_2 \cup M_3 = F, \text{ mais } M_2 \cap M_3 = \{12; 18\}$$

Donc M_2 et M_3 ne forment pas une partition de F.

3°)

a- Voyons si les ensembles A, B et C forment une partition de G

A, B et C ne constituent pas une partition de G car $A \cup B \cup C \neq G$.

Il y a en effet dans G, des nombres qui ne sont ni multiples de 2, ni multiples de 3,

ou de 6 ; par exemple 5. De plus, on a : $A \cap B = C \neq \emptyset$.

b- Vérification

$$A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; \dots 50\}.$$

$$\text{Card}(A) = 26 ; B = \{0; 3; 6; 9; \dots 48\}$$

$$\text{Card}(C) = 9 ; A \cup B = \{0; 3; 4; 6; 8; 9; 10 \dots 45; 46; 48; 50\}$$

$$\text{Card}(A \cup B) = 34$$

On a : $34 = 26 + 17 - 9$, donc $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(C)$, d'où le résultat.

Activité 3

Avant de commencer par répondre aux questions de cette activité, il est important de faire une application sur la notion d'ordre, ce qu'on aurait pu faire au niveau du résumé du cours, mais que nous n'y avons pas fait et ceci pour respecter la structure du résumé...

Exemple

Une boîte contient 2 boules rouges, 5 boules blanches et une boule jaune. On tire successivement avec remise et au hasard 3 boules de cette boîte. Quelle est le nombre de tirage contenant une boule rouge, une boule blanche et une boule jaune ?

Réponse :

3 tirages successifs avec remise : il y a répétition $\Rightarrow$ 3-listes des 8 boules de la boîte. De plus, pour le tirage demandé, on tire une boule rouge (R) parmi les 2, (2^1) **et** ($\Rightarrow \times$) on tire une boule blanche (B) parmi les 5, (5^1) **et** ($\Rightarrow \times$) on tire une boule jaune (J) (1^1). Pour ce petit exercice, plusieurs élèves vont se précipiter pour dire que le nombre n de tirages

demandés est $n=2^1 \times 5^1 \times 1^1$. **Ceci n'est pas vrai.**

En effet, si l'on suppose qu'on pige en premier lieu R, ensuite B puis J, (tirage RBJ)❶. Le nombre n de tirage pour cette manière de faire le tirage est : $n=2^1 \times 5^1 \times 1^1$ puisqu'on a eu à tirer une boule rouge parmi les 2, boule blanche parmi les 5 et on tire la seule boule jaune existante.

Mais il n'y a pas que cette manière de faire le tirage. On peut avoir les tirages dans les ordres RJB, ❷ ; JRB, ❸ ; JBR, ❹

BJR, ❺ ; BRJ, ❻

On a au total 6 différents types de tirages à cause de l'ordre dans lequel on peut tirer les boules. Comme il y a même nombre de tirages pour chacun des 6 types de tirage, alors $N=2^1 \times 5^1 \times 1^1 \times 6=60$: on dit de façon générale que le nombre de tirage est égal au nombre de tirage qu'on peut avoir pour un type de tirage donné multiplié par le **nombre d'ordre**. Ce nombre d'ordre est l'**anagramme** d'un schéma du tirage, par exemple RBJ.

Tout simplement ici,

$$N=2^1 \times 5^1 \times 1^1 \times \frac{3!}{1!1!1!} = 60$$

Maintenant, revenons à notre activité.

1°) Nombre N de tirages possibles

Le tirage est successif avec remise. Il y a donc répétition d'un même élément. On en déduit qu'il s'agit d'une 3-listes des 8 boules de l'urne.

D'où $N=8^3=512$.

2°) Nombre de tirages contenant :

a) 2 boules rouges

Lorsque quelqu'un effectue les tirages, il peut tirer dans ce cas 2 boules rouges et 1 boule verte, (RRV) dans cet ordre ou bien (+) 2 boules rouges et une noire (RRN) dans cet ordre. Le nombre n de tirage est donné par : $n = n(RRV) + n(RRN)$.

• Nous avons 4 boules rouges et 1 verte, donc le schéma RRV signifie "2 boules rouges tirées parmi 4 (4^2) et (×) une boule verte tirée parmi une (1^1).

Soit $RRV \Rightarrow 4^2 \times 1^1$. Par ailleurs, nous pouvons aussi avoir RVR ou VRR. Dans tous les cas, le tirage contient 2 boules rouges et une boule verte. Mais comme nous ne savons pas dans quel ordre le tirage est effectué, nous dénombrerons les ordres.

$$\text{Soit } n(RRV) = 4^2 \times 1^1 \times \frac{3!}{2! \times 1!}.$$

• Nous avons 3 boules noires, donc RRN signifie 2 boules rouges tirées parmi 4 et une noire tirée parmi 3 (3^1). En dénombrant également les ordres, on a :

$$n(RRN) = 4^2 \times 3^1 \times \frac{3!}{2! \times 1!}.$$

En définitive, le nombre n de tirages est :

$$n = 4^2 \times 1^1 \times \frac{3!}{2! \times 1!} + (4^2 \times 3^1 \times \frac{3!}{2! \times 1!})$$

Soit **n = 192.**

NB : Ou plus simplement, le nombre de tirage est : $4^2 \times 4 \times \frac{3!}{2!1!} = 192$ (qui signifie 2 boules rouges parmi les 04 et une quelconque parmi les 04 autres restantes, multiplié par l'anagramme de RRQ où Q désigne une boule quelconque différente de la rouge).

b- Au moins une boule rouge.

1^{ère} méthode

Ici nous ne voulons pas 0 boule rouge. Or le nombre total N de tirages est la somme du nombre n_0 contenant 0 boule rouge et du nombre n_R contenant au moins une boule rouge.

$$\text{Soit } N = n_0 + n_R$$

En d'autres termes, 0 boule rouge et au moins une boule rouge sont deux événements complémentaires.

Pour tirer 0 boule rouge, tout se passera comme si on avait enlevé les 4 boules rouges dans l'urne. Il restera alors uniquement des boules noires et vertes soit au total 4 boules parmi lesquelles on tire 3. Ainsi, $n_0 = 4^3$
 $n_R = N - n_0$,

Soit $n_R = 512 - 4^3 = 448$.

2^{ème} méthode

Nous pouvons également envisager les schémas de tirages.

$$\text{On a : } \left\{ \begin{array}{l} \text{RNN} + \text{RVV} + \text{RVV} \\ \text{ou} \\ \text{RRN} + \text{RRV} \\ \text{ou} \\ \text{RRR} \end{array} \right.$$

Ainsi $n_R = 4^1 \times 3^1 \times 3 + (4^1 \times 1^2 \times 3) + (4^1 \times 3^1 \times 1^1 \times 6) + (4^2 \times 3^1 \times 3) + (4^2 \times 1^1 \times 3) + 4^3$

Soit $n_R = 448$.

c- Au plus 2 boules vertes

1^{ère} méthode

Soit n_V le nombre de tirages voulu.

Ici, nous ne voulons pas le schéma VVV. Ce que l'on ne veut pas ($\overline{nv}$) et ce que l'on veut, (nv), forment un système complet d'événement ; c'est-à-dire $N = nv + \overline{nv}$
 $\Rightarrow nv = N - \overline{nv}$;

$nv = 512 - 1^3$, soit $nv = 511$.

2^{ème} méthode

Ici, nous voulons les schémas :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{NNN} + \text{RRR} + \text{NNR} + \text{RRN} \\ \text{ou} \\ \text{VNN} + \text{VRR} + \text{VRN} \\ \text{ou} \\ \text{VVV} + \text{VVR} \end{array} \right.$$

Ainsi, $n_V = 3^3 + 4^3 + (3^2 \times 4^1 \times 3) + (4^2 \times 3^1 \times 3) + (1^1 \times 3^2 \times 3) + (1^1 \times 4^2 \times 3) + (1^1 \times 4^1 \times 3^1 \times 6) + (1^2 \times 3^1 \times 3) + (1^2 \times 4^1 \times 3)$

Soit $n_V = 511$.

d- Exactement une boule noire

On a les schémas : RRN + VVN + RNV

Soit n le nombre de tirages,

$n = 4^2 \times 3^1 \times 3 + 1^2 \times 3^1 \times 3 + 4^1 \times 3^1 \times 1^1 \times 6$

Soit $n = 225$

NB : Ou plus simplement, le nombre de tirage est : $3^1 \times 5^2 \times \frac{3!}{2!1!} = 225$, (notion de deux ensembles !!!).

e- Une boule rouge, une noire et une verte

On a : RNV

Soit $n = 4^1 \times 3^1 \times 1^1 \times 6$;

$n = 72$.

f- Le tirage est dans l'ordre RNV

Donc le nombre n de tirages possibles est :

$n = 4^1 \times 3^1 \times 1^1$

soit $n = 12$.

g- Deux couleurs distinctes

On a les schémas : RRN + RRV + NNR + NNV + VVN + VVR

Le nombre n de tirage est donné par :

$n = (4^2 \times 3^1 \times 3) + (4^2 \times 1^1 \times 3) + (3^2 \times 4^1 \times 3) + (3^2 \times 1^1 \times 3) + (1^2 \times 3^1 \times 3) + (1^2 \times 4^1 \times 3)$;

soit $n = 348$

Autre méthode

Ici, nous ne voulons pas les tirages unicolores, ou les tirages tricolores. Comme les tirages unicolores, bicolores, tricolores forment un système complet d'événement, alors on a :

On tire $n_b = N - (n_u + n_t)$

$N_b = 512 - (4^3 + 1^3 + 3^3 + 4^1 \times 3^1 \times 1^1 \times 6)$

Soit $n_b = 348$

h- Il s'agit des tirages unicolores et bicolores

Le nombre n de tirages est donné par :

$$n = 4^3 + 1^1 \times 3^3 + n_b$$

Soit $n = 440$

3°) Nous avons les schémas : RRN ou RNN

Le nombre n de tirages est :

$$n = (4^2 \times 3^1 \times 3) + (4^1 \times 3^2 \times 3)$$

Soit **$n = 252$**

Activité 4

- 1) En 6^{ième}, on a 2 choix possibles et pour chacun des choix, on a 3 choix possibles en 5^{ième} et pour chacun des deux choix, on a 3 choix possibles en 4^{ième} et, ..., on a 7 choix possibles en Terminale ; d'où
 $N = 2 \times 3 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = \mathbf{15120}$.

- 2) Les trois (03) chiffres formant un nombre sont distincts ou non ; autrement un nombre peut contenir plus d'une fois le même chiffre. Il s'agit alors d'une 3-listes des 5 éléments de E.

Ainsi, on a au total $n = 5^3 = 125$ nombres possibles.

- 3) Pour chaque choix, on aura à choisir une (1) moto parmi 6 motos de couleurs distinctes. Donc lorsqu'on y choisit 3, le nombre de possibilités est une 3-listes de 6 motos. On a au total $n = 6^3 = 216$ commandes.

- 4) Il y a 3^{15} **c'est-à-dire 14348907** façons différentes d'effectuer ce rangement.

- 5) Chaque rangement peut être représenté par un quintuplet $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_5)$ où a_i est le numéro du tiroir ayant reçu la i ème paire de chaussettes.

Le nombre de rangements est donc égal au nombre de quintuplet d'un ensemble à trois (3) éléments. C'est-à-dire $3^5 = 243$.

- 6) Si on suppose que les deux premiers éléments du code sont des lettres, (i.e

l'ordre EEF) alors les résultats possibles sont :

AA1 ; AA2 ; BB1 ; BB2 ; CC1 ; CC2 ;

AB1 ; BA1 ; AB2 ; BA2 ; AC1 ; CA1 ;

AC2 ; CA2 ; BC1 ; CB1 ; BC2 ; CB2.

Soit au total 18 résultats possibles qui est bien $n = 3^2 \times 2^1$.

Ceci n'est donc pas le nombre de résultats possibles puisque nous avons également les ordres de tirages FEE puis EFE, soit au total 3 types de classements ou ordre de tirage.

Comme pour chacun des types de tirages des éléments, on aura toujours à choisir 2 lettres parmi les 3 et un chiffre parmi les 2 ie $3^2 \times 2^1$, alors le nombre de résultats possibles est :

$$N = 3^2 \times 2^1 \times 3 = \mathbf{54}.$$

Activité 5

1°) Le nombre N de tirages possibles est :

$$N = A_8^3 = \frac{8!}{5!} = 336.$$

2°) Dénombrons le nombre de tirages dans chacun des cas.

a- Le nombre de tirages contenant deux boules rouges est :

$$n = A_4^2 \times A_1^1 \times 3 + A_4^2 \times A_3^1 \times 3 = 144$$

Soit $n = 144$

NB : Ou plus simplement, le nombre de tirage est : $A_4^2 \times A_4^1 \times \frac{3!}{2!1!} = 144$.

b- Le nombre n de tirages contenant au moins une boule rouge est :

$$n = N - \bar{n} = 336 - A_4^3,$$

Soit $n = 312$

NB : On peut également utiliser la seconde méthode.

c- Dans ‘‘au plus deux boules vertes’’, il y a des tirages contenant deux boules vertes. Or il y a une seule boule verte et ici, elle ne peut pas être tirée plus d’une fois. Les tirages contenant alors deux boules vertes sont impossibles. Par conséquent, cette question ne peut pas être posée ici.

d- On a : $RRN + RVN$

Le nombre de tirages possibles est :

$$n = A_4^2 \times A_3^1 \times 3 + A_4^1 \times A_3^1 \times A_1^1 \times 6$$

Soit $n = 180$.

NB : Ou plus simplement, le nombre de tirage est : $A_3^1 \times A_5^2 \times \frac{3!}{2!1!} = 180$, (hypothèse de deux ensembles !!!)

e- Le nombre n de tirages contenant une boule noire, une boule rouge et une boule verte est : $n = A_4^1 \times A_3^1 \times A_1^1 \times 6$,
soit $n = 72$

f- Le nombre n de tirages contenant une boule noire, une boule rouge et une boule verte dans cet ordre est :
 $n = A_4^1 \times A_3^1 \times A_1^1$,
soit $n = 12$

g- Le nombre n de tirages bicolores est :
 $n = 336 - (A_4^3 + A_3^3 + 72)$,
soit $n = 234$.

h- Le nombre n de tirages unicolores et bicolores est : $n = A_4^3 + A_3^3 + 234$,
soit $n = 264$.

3°) Le nombre n de tirages voulus est :
 $n = A_4^2 \times A_3^1 \times 3 + A_4^1 \times A_3^2 \times 3$,

soit $n = 180$

Activité 6.

Partie A

1)

a- Nombre de codes possibles

On doit utiliser 2 lettres distinctes parmi les 26 et 3 chiffres distincts parmi les 10, et tout ceci sélectionnés successivement et sans remise ; d’où le nombre de résultats possibles est :

$$N = A_{26}^2 \times A_{10}^3 \times \frac{5!}{2!3!} = 4\,680\,000.$$

(permutation de LLCCC où L = lettres et C = chiffres car notion de deux ensembles différents !!!).

b.) Si on enlève le chiffre 7 des 10 chiffres, il en reste 9 et si on enlève la lettre B des 26 lettres, il en reste 25. Donc le nombre de tirages ne comportant pas le chiffre 7 et la lettre B est : $A_{25}^2 \times A_9^3 \times \frac{5!}{2!3!} = 3\,024\,000$

D’où le nombre de tirages recherché est :

$$n = 4\,680\,000 - 3\,024\,000$$

Soit $n = 1\,656\,000$ résultats possibles.

c) Le nombre de codes ne comportant pas le chiffre 5, les lettres M et C est :

$$A_{24}^2 \times A_9^3 \times \frac{5!}{2!3!} = 2\,782\,080$$

D’où le nombre de tirages recherché est :

$$n = 4\,680\,000 - 2\,782\,080.$$

Soit $n = 1\,897\,920$.

e) Les chiffres et les lettres étant connus, il faut simplement les permuter pour obtenir le nombre de codes possibles.

Soit $n = 5! = 120$.

f) Il n’existe qu’un seul code 029KW.

Soit $n = 1$.

Partie B

2) Retrouvons le code oublié

Le premier entier naturel premier est 2. On a : $2+2 = 4$; 4 n’est pas premier. Le 2^{ème} entier premier est 3 ; $3+2=5$ et 5 est premier.

Ainsi, les trois premiers termes de la suite sont respectivement 3, 5, 7.

Par ailleurs, les deux dernières lettres du système hexadécimal sont les lettres E et F. On en déduit que le code de Monsieur Cocouvi est **357EF**

Activité 7

Partie A

1.) On a au total 10 différents livres à permuter.

Soit **$n = 10! = 3\,628\,800$** .

2.a) Les 4 livres de maths forment un bloc d'un seul livre. On a donc au total 7 éléments à permuter. Mais comme les livres de maths sont différenciables les uns des autres, on doit également les permuter à l'intérieur du bloc formé.

D'où **$n = 7! \times 4! = 120\,960$** résultats possibles.

b.) Si les 3 livres de chimie doivent rester ensemble, les 4 de maths ensemble, les 2 de Physique ensemble, alors le nombre de résultats possibles est : $4! \times 4! \times 2! \times 3! = 6912$

Le nombre de tirages recherchés est donc

$N = 120\,960 - 6912 = 114\,048$

c.) Les 4 livres de maths restent ensemble ainsi que les 3 de chimie. On a alors 5 blocs à permuter. Ensuite, on permute les 04 livres de maths entre eux et les 3 de chimie entre eux.

D'où le nombre de résultats possibles est :

$n = 5! \times 4! \times 3! = 17\,280$.

3.) Les deux livres de chimie et le livre de biologie forment un bloc. On doit permuter les deux livres de chimie de bout en bout. Supposons que les 2 livres de Physique restent ensemble.

Voici les deux catégories de schémas :

CCBC **PP** M M M M M ou bien

CBCC **PP** M M M M M

Pour chacun des deux cas, le nombre de résultats possibles est le même.

Dans le bloc **CCBC**, on garde B fixe et on permute les 3 livres de Chimie. On fait de même pour l'autre catégorie.

Le nombre de résultats possibles dans ce cas est : $[6! \times 3! \times 2!] \times 2 = 17\,280$.

Par ailleurs, le nombre de tirages où le livre de Biologie reste parmi les 03 de Chimie est :

$7! \times 3! \times 2! = 60\,480$.

D'où le nombre de résultats recherchés est :

$N = 60480 - 17280 = 43\,200$

Partie B

4.) Ici, c'est un peu comme si les rangs sont distincts. Il faut permuter les 10 lauréats.

D'où $n = 10! = 3\,628\,800$ résultats possibles.

5.) On a alors au total 2 blocs à classer et donc on doit permuter les filles entre elles et les garçons entre eux.

D'où **$n = 6! \times 4! \times 2! = 34\,566$**

6.) Il faut choisir 2 garçons parmi les 6 et les mettre de part et d'autres de Barbara. On forme ainsi le bloc à 3 éléments.

Par la suite, il faut permuter ce bloc avec les 7 personnes restantes, sans oublier de permuter les 2 garçons du bloc.

D'où **$n = \binom{6}{2} \times 8! \times 2! = 1\,209\,600$** .

7.) Il faut choisir un garçon parmi les 6 et une fille parmi les 3, (soit $\binom{6}{1} \times \binom{3}{1}$) et les mettre à côté de Barbara. Ensuite, il reste 7 personnes à permuter avec le bloc formé.

D'où le nombre de résultats possibles est :

$$n = \binom{6}{1} \times \binom{3}{1} \times 8! \times 2! = 1\,451\,520.$$

Partie C

8.) Le cumul étant admis, alors le 1^{er} prix peut être reçu par 10 personnes, (10 possibilités), le 2^{ème} prix par 10 personnes, (10 possibilités), ..., le 5^{ème} prix 10 possibilités.

$$\text{Donc } n = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5.$$

$$n = 100\,000$$

9.) Barbara ayant reçu 2 prix, alors il reste 3 prix à discerner à des personnes choisies parmi les 9.

$$\text{On en déduit que } n = 10^3 = 1000$$

10.) Le cumul n'étant pas possible, on a 10 possibilités pour le 1^{er} prix, 9 possibilités pour le 2^{ème}, ..., 6 possibilités pour le 5^{ème}.

$$\text{D'où } n = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = A_{10}^5$$

$$\text{Soit } n = 30\,240.$$

Activité 8

Partie A

1.) Il y a $6! = 720$ résultats possibles.

2.) Ici, on a : $2! \times 3! \times 3! = 72$ résultats possibles.

3.) Ici, on a : $n = 3! \times 4! = 144$ résultats possibles.

4.) On a les dispositions :

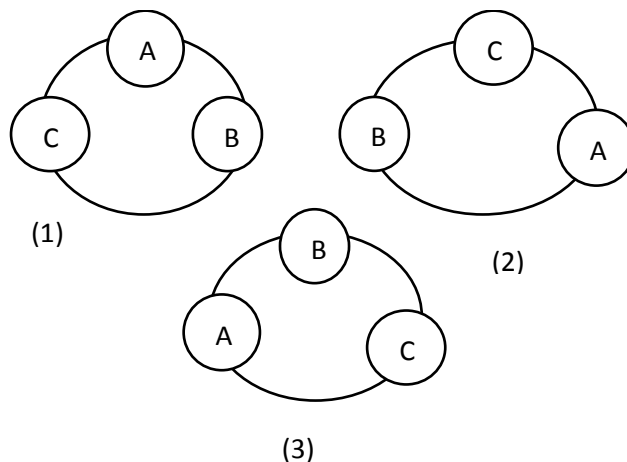
FGFGFG ou bien GFGFGF ; le nombre de tirages étant identique dans chaque cas. On doit permuter les 3 filles et les 3 garçons.

$$\text{D'où } n = 3! \times 3! \times 2 = 72.$$

Partie B

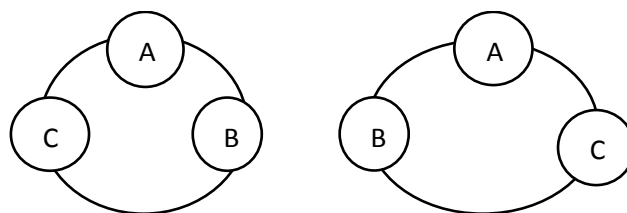
1.) Si les chaises ne sont pas numérotées, alors on ne peut que tenir compte de la position des uns et des autres.

Par exemple si on doit jouer à ce jeu avec A, B et C, considérons les 3 dispositions suivantes :



Il faut voir là que les dispositions (1) et (3) sont identiques puisque les chaises ne sont pas numérotées et on a dans les deux cas A à gauche de B et B à gauche de C.

Pour donc déterminer le nombre de tirages dans ce cas, il faut fixer un élément et permuter les autres autour de lui. Dans cet exemple, on a $(3-1)! = 2$ dispositions possibles qui sont :



En revenant à notre exercice, on comprend aisément qu'on a :

$$n = (6-1)! = 5! = 120 \text{ résultats possibles.}$$

2.) Ici, il faut simplement permuter les garçons entre eux et les filles entre elles.

$$\text{Soit } n = 3! \times 3! = 36.$$

3.) Ici, on fixe le bloc des garçons et on permute les 3 filles, sans oublier de permuter les garçons du bloc.

On a $n = 3! \times 3! = 36$, (il faut comprendre que cette question rejoint la précédente car quel que soit la disposition, les filles vont toujours se retrouver ensemble, étant donné qu'on travaille avec une table ronde.

4.) Ici, on va placer par exemple les 3 garçons autour de la table. On garde ces 3 garçons fixes. Pour cette disposition des garçons, on a $3! = 6$ manières de classer les filles entre eux.

Par la suite, on reprend tout à zéro en enlevant les 3 filles. On fixe un garçon et on permute les 2 autres autour de lui de manière qu'ils n'occupent plus les places qu'ils avaient occupé dans la 1^{ère} disposition. Pour cette nouvelle disposition des garçons, on a encore $3! = 6$ manières de classer les filles entre eux.

D'où le nombre total de résultats possibles est :

$$N = 3! + 3! = 12.$$

Partie C

Comme les places sont numérotées ici, c'est la place occupée par chacun qui va compter ici.

On trouve donc les mêmes résultats qu'en la partie A.

Activité 9

Partie A

1.) Il s'agit de 6 tirages successifs sans remise. On est en présence de 6-arrangements des 20 craies de la boîte. D'où le nombre de résultats possibles est :

$$n = A_{20}^6 = \frac{20!}{14!} = 27\,907\,200$$

b) Voici une vision des tirages possibles :

$$(I): \begin{cases} \text{BBBRJV} \\ \text{RRRBJV} \\ \text{JJJBRV} \\ \text{VVVBJR} \end{cases} \text{ ou bien } (II): \begin{cases} \text{BBRRJV} \\ \text{BBJJRV} \\ \text{BBVVJR} \\ \text{RRJJBV} \\ \text{RRVVBV} \\ \text{JJVVBR} \end{cases}$$

On n'a aucune précision sur l'ordre dans lequel les tirages ont été faits, donc il faut dénombrer les permutations possibles.

Au niveau (I), on a :

$$n_I = A_8^3 \times A_5^1 \times A_4^1 \times A_3^1 \times \frac{6!}{3!1!1!1!} + A_8^1 \times A_5^3 \times A_4^1 \times A_3^1 \times \frac{6!}{3!1!1!1!} + A_8^1 \times A_5^1 \times A_4^3 \times A_3^1 \times \frac{6!}{3!1!1!1!} + A_8^1 \times A_5^1 \times A_4^1 \times A_3^3 \times \frac{6!}{3!1!1!1!}$$

$$= (20160 + 5760 + 2880 + 960) \times 120$$

$$n_I = 3\,571\,200$$

Au niveau (II), on a :

$$n_{II} = A_8^2 \times A_5^2 \times A_4^1 \times A_3^1 \times \frac{6!}{1!2!2!1!} + A_8^2 \times A_5^1 \times A_4^2 \times A_3^1 \times \frac{6!}{1!2!2!1!} + A_8^1 \times A_5^2 \times A_4^2 \times A_3^1 \times \frac{6!}{1!2!2!1!} + A_8^1 \times A_5^2 \times A_4^1 \times A_3^2 \times \frac{6!}{1!2!2!1!} + A_8^1 \times A_5^1 \times A_4^2 \times A_3^2 \times \frac{6!}{1!2!2!1!}$$

$$= 180(13440 + 10080 + 6720 + 5760 + 3840 + 2880) = 7\,689\,600$$

D'où le nombre total de résultats possibles est :

$$N = 3\,571\,200 + 7\,689\,600$$

Soit $n = 11\,260\,800$ résultats possibles.

2.a) Les 6 craies doivent être distribuées à 6 différentes personnes, alors tout se passera comme si on veut permuter 6 craies dont 2 blanches identiques et deux rouges identiques. D'où le nombre de résultats possibles est :

$$N = \frac{6!}{2!2!1!1!} = 180$$

NB : il faut voir là que si toutes les craies étaient distinctes ou différenciables, on aurait $n = \frac{6!}{1!1!1!1!1!} = 720$ résultats possibles.

b.) Ici, tout se passe comme si les deux craies blanches doivent toujours rester ensemble, la jaune seule et la verte aussi seule.

Alors, les deux craies rouges vont se comporter comme une seule craie et les deux blanches également ; soit au total 4 différentes craies à permuter. D'où le nombre de résultats possibles est :

$$N = 4! = 24.$$

Attention : si les 2 craies rouges pouvaient être différenciables l'une de l'autre, de même pour les 2 blanches, alors on aurait permuté les 2 craies à l'intérieur de chaque bloc formé. On aurait donc $n = 4! \times 2! \times 2!$ (car on ne sait pas dans quel ordre les craies ont été introduites dans la boîte).

3.a) Les 2 craies blanches forment alors une seule craie. On a au total 5 craies dont 2 rouges identiques à permuter. D'où le nombre de résultats possibles est :

$$n = \frac{5!}{2!} = 60$$

b.) Les deux craies rouges et la verte se comportent comme une seule craie, donc on a au total 3 éléments à permuter.

$$\text{Soit } n = 3! = 6.$$

Attention : si les 2 craies rouges étaient différenciables, on les aurait permutées de bout en bout !!!

Partie B

$$1.) \text{ On a : } n = 8! = 40320$$

$$2.) n = 7! \times 2! = 10080$$

$$3.) n = 4! \times 4! \times 2! = 1152$$

$$4.) n = 2! \times 5! = 240.$$

$$5.) n = 4! \times 2! \times 2! \times 2! \times 2! = 384.$$

$$6.) \text{ Si Sonia et Cocou doivent rester ensemble, Barbara et Tania ensemble, on a : } 6! \times 2! \times 2! = 2880 \text{ résultats possibles.}$$

$$\text{Si en plus Eliane devait rester avec Carmel, on a : } 5! \times 2! \times 2! \times 2! = 960 \text{ résultats possibles.}$$

On en déduit que le nombre de résultats recherché est :

$$N = 2880 - 960$$

$$\text{Soit } n = 1920$$

Activité 10

1°) Le tirage est fait d'un seul trait. Il s'agit d'une 3-combinaison des 8 boules de l'urne, soit au total $N = C_8^3 = 56$ tirages possibles.

2°) a- Le nombre n de tirages contenant 2 boules rouges est :

$$n = C_4^2 \times C_3^1 + C_4^1 \times C_3^2, \text{ soit } n = 24$$

NB : Ou plus simplement, le nombre de tirage est : $C_4^2 \times C_4^1 = 24$.

b- Le nombre n de tirages contenant au moins une boule rouge est : $n = C_8^3 - C_4^3$ soit $n = 52$.

NB : On peut également utiliser la seconde méthode en envisageant les schémas possibles.

c- Cette question ne peut pas être posée, car il existe une seule boule verte.

d- Le nombre n de tirages contenant exactement une boule noire est :

$$n = C_4^2 \times C_3^1 + C_3^1 \times C_4^1 \times C_1^1; \text{ soit } n = 30.$$

NB : Ou plus simplement, le nombre de tirage est : $C_3^1 \times C_5^2 = 30$.

e- Le nombre n de tirages contenant une boule noire, une boule rouge, et une verte est :

$$n = C_4^1 \times C_3^1 \times C_1^1,$$

$$\text{Soit } n = 12.$$

f- Cette question ne peut pas être posée ici car tout est tiré au même moment donc il n'y a pas l'ordre de succession des boules.

g- Le nombre n de tirages unicolores et bicolores est : $n = C_8^3 - (C_4^3 + C_3^3 + C_4^1 \times C_3^1 \times C_1^1)$, soit $n = 39$.

h- Le nombre n de tirages unicolores ou bicolores est : $n = (C_4^3 + C_3^3) + 39$,

soit $n = 44$.

3°) Le nombre n de tirages voulus est :
 $n = C_4^2 \times C_3^1 + C_4^1 \times C_3^2$,

soit $n = 30$.

Activité 11

1°- a) Le nombre de tirages distincts de 5 cartes quelconques est **$n = C_{32}^5 = 201376$.**

b) Nous avons au total 4 As. Donc ici, on choisira 2 As parmi les 4, et 3 autres parmi les 28 restantes. Le nombre n de tirages est alors :
 $n = C_4^2 \times C_{28}^3$ soit **$n = 19656$.**

c) Ici, nous ne voulons pas les tirages ne contenant pas d'As. On en déduit que le nombre de tirages possibles est $n = C_{32}^5 - C_{28}^5$, soit **$n = 103096$.**

d- Ici, soit le tirage est constitué uniquement de Trèfles, soit de Piques, soit de Cœurs, ou soit de Carreau. Donc, on aura à tirer 5 cartes parmi les 8 cartes de Trèfles, ou 5 parmi les 8 de Piques, ou 5 parmi les 8 de Cœurs, ou enfin 5 parmi les 8 de Carreau.

Le nombre n de tirages est donc : $n = C_8^5 + C_8^5 + C_8^5 + C_8^5$, soit **$n = 224$.**

2°) Le nombre n de tirages possibles est :
 $n = n_1 + n_2$ où n_1 est le nombre de tirages contenant "un cœur, 2 Rois, et au plus 3 carreaux" et n_2 le nombre de tirages contenant "exactement 2 Valets".

• **Déterminons n_1**

On a les schémas : CTTTT + CTTTP + CTTTPP + CTPPP + CPPPP + CKTTT + CKTTP + CKTPP + CKKTT + CKKTP + CKKPP + CKKKT + CKKKP.

Par ailleurs, le tirage doit contenir 2 Rois. Il faut alors envisager chaque fois les combinaisons possibles des cartes pour que l'ensemble contienne 2 Rois.

Soit par exemple, le type de tirage : CTTTP.

Soit c'est (C et T) qui ont les Rois, ou soit c'est (C et P) qui ont les Rois, ou soit c'est (T et P).

On fait de même l'analyse pour le reste.

Le nombre n_1 de tirages est : $n_1 = C_7^3 + 6(C_7^2 + 2C_7^2 \times C_7^1) + 3(2C_7^1 \times C_7^2 + C_7^1 \times C_7^1 \times C_7^1) + 9(C_7^2 \times C_7^1 + C_7^1 \times C_7^1 \times C_7^1)$,

soit **$n_1 = 8330$.**

• **Déterminons n_2**

Le nombre n_2 de tirages est : $n_2 = C_4^2 \times C_{28}^3 = 19656$.

En définitive, $N = 8330 + 19656$,
 soit **$N = 27986$.** D'où le résultat.

Activité 12

a) On doit choisir 4 élèves parmi les 50. Ici, nous ne voulons pas nous intéresser à un quelconque ordre dans lequel les responsables sont choisis. Ils sont choisis en même temps car rien ne précise d'ailleurs que le choix est successif. Le nombre n de tirages possibles est donc :
 $n = C_{50}^4 = 230000$.

b) Le nombre n de comités contenant 2 filles est : **$n = C_{30}^2 \times C_{20}^2 = 625$.**

c) Le nombre n de comités contenant au moins une fille est : **$n = C_{50}^4 - C_{20}^4 = 225455$.**

- d) Nous ne voulons pas 3 ni 4 garçons : le nombre n de comités dans ce cas est :
- $$n = C_{50}^4 - (C_{20}^4 + C_{20}^3 \times C_{30}^1).$$

soit $n = 191255$.

Activité 13

1°) Chaque façon de garer les 20 voitures dans les 20 places du parking est une permutation de ces 20 places. Le nombre de façons est donc $20! = 2,433 \times 10^{18}$.

2°) a- Les 10 voitures occupent les 10 places de la rangée A, soit $10!$ possibilités. Le nombre total de façons de garer les 10 voitures est donc : $2 \times 10! = 7257600$.

b- Il y a C_{10}^6 choix possibles des voitures garées dans la rangée A, puis A_{10}^6 façons de les garer et A_{10}^4 façons de garer les 4 autres dans la rangée B.

Le nombre total de façons de garer les 10 voitures est donc : $n = C_{10}^6 \times A_{10}^6 \times A_{10}^4$
soit $n \approx 1,6 \times 10^{11}$.

c - Le nombre de façons de ne garer aucune voiture dans la rangée A est $10!$; Donc le nombre de façons de garer au moins une voiture dans la rangée A est :

$$A_{20}^{10} - 10! = 6,7 \times 10^{11}.$$

Activité 14

Partie A

1°) Chaque classement est un arrangement de 5 mathématiciens parmi 20. Le nombre de classements possibles est : $A_{20}^5 = 1860480$

2°) a- Chaque classement est un quintuplet (a, b, c, d, e) tel que :

- (a, b) est un arrangement de 2 femmes choisies parmi 8,

- (a, d, e) est un arrangement de 3 chanteurs pris parmi les 12 restants.

Le nombre de classements ainsi obtenus est : $A_8^2 \times A_{12}^3 = 73920$.

b- Il faut choisir 2 femmes parmi 8 et 3 hommes parmi 12 puis faire une permutation de ces 5 éléments. Le nombre de classements ainsi obtenus est :

$$C_8^2 \times C_{12}^3 \times 5! = 739200.$$

c- Les classements ne comportant pas au moins 2 femmes, sont les classements comportant 0 ou 1 femme :

- Le nombre de classements comportant 0 femme est : A_{12}^5
- Le nombre de classements comportant 1 femme est : $C_8^1 \times C_{12}^4 \times 5!$
- Le nombre de classements comportant au moins 2 femmes est donc :

$$A_{20}^5 - (A_{12}^5 + C_8^1 \times C_{12}^4 \times 5!) = 1290240.$$

3°) Le nombre de classements ne comportant pas d'étrangers est : A_{14}^5 ; donc le nombre de classements comportant au moins 1 étranger est : $A_{20}^5 - A_{14}^5 = 1620240$.

4°) Il y a deux cas : le Mathématicien étranger est une femme ou un homme.

- Si c'est une femme, on a choisi: 1 femme parmi 2 étrangères, 1 femme parmi 6 non étrangères, et 3 hommes parmi 8 non étrangers ; on fait ensuite une permutation de ces 5 élus. On a : $2 \times 6 \times C_8^3 \times 5! = 80640$ choix possibles.
- Si le Mathématicien étranger est un homme, on a choisi : 1 homme parmi 4 étrangers, 2 hommes parmi 8 non étrangers, et 2 femmes parmi 6 non étrangères ; on fait ensuite une permutation de ces 5 élus. On a : $4 \times C_8^2 \times C_6^2 \times 5! = 201600$ choix possibles.

Le nombre n de classements contenant exactement 1 étranger et 2 femmes est alors :

$$\underline{\underline{n = 282240}}$$

Partie B

1.) Les 6 craies sont choisies simultanément. D'où le nombre de résultats possibles est une 6-combinaison des 20 craies de la boîte.

$$\text{Soit } n = C_{20}^6 = \frac{20!}{14!6!} = 38\,760$$

2.) Il faut toujours envisager les schémas possibles comme nous l'avons fait dans l'autre exemple ; seulement que ici, on ne va pas dénombrer les permutations, puisque tout est choisi d'un seul trait.

Au niveau (I), on a :

$$n_I = C_8^3 \times C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1 + C_8^1 \times C_5^3 \times C_4^1 \times C_3^1 + C_8^1 \times C_5^1 \times C_4^3 \times C_3^1 + C_8^1 \times C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^3$$

$$= 3360 + 960 + 480 + 160$$

$$n_I = 4960$$

Au niveau (II), on a :

$$n_{II} = C_8^2 \times C_5^2 \times C_4^1 \times C_3^1 + C_8^2 \times C_5^1 \times C_4^2 \times C_3^1 + C_8^1 \times C_5^2 \times C_4^2 \times C_3^1 + C_8^1 \times C_5^1 \times C_4^2 \times C_3^2 + C_8^1 \times C_5^2 \times C_4^1 \times C_3^2 + C_8^1 \times C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^2$$

$$= 3360 + 2520 + 1680 + 1440 + 960 + 720 = 10680$$

D'où le nombre de résultats possibles est $n = 15\,640$.

3.) Ici, on a $n = 4! \times 3! = 144$ résultats possibles.

Activité 17

Soit M l'événement : « l'individu est malade » et P , l'événement « l'individu a un test positif »

Les informations de l'activité nous permettent d'établir que :

$$\begin{aligned} 3\% M & \begin{cases} 95\% P \\ 5\% \bar{P} \end{cases} \\ 97\% \bar{M} & \begin{cases} 1\% P \\ 99\% \bar{P} \end{cases} \end{aligned}$$

1- a) L'événement « l'individu est malade et a un test positif » est $M \cap P$.

$$p(M \cap P) = p_M(P) \times p(M)$$

On a : $p_M(P) = 0,95$ et $p(M) = 0,03$:

$$\text{Donc } \underline{\underline{p(M \cap P) = 0,0285}}$$

b- L'événement « l'individu est malade et a un test négatif » est $M \cap \bar{P}$

$$p(M \cap \bar{P}) = p_M(\bar{P}) \times p(M).$$

$p_M(\bar{P}) = 0,05$ et $p(M) = 0,03$

$$\text{donc } \underline{\underline{p(M \cap \bar{P}) = 0,0015}}$$

Autre méthode

Nous savons que dans la classe, les individus malades sont formés des individus malades qui ont un test positif et des individus malades qui ont un test négatif. En conséquence,

$$p(M) = p(M \cap P) + p(M \cap \bar{P}) \Rightarrow$$

$$p(M \cap \bar{P}) = p(M) - p(M \cap P)$$

$$p(M \cap \bar{P}) = 0,03 - 0,0285$$

$$\text{soit } \underline{\underline{p(M \cap \bar{P}) = 0,0015}}.$$

2°) Nous voulons calculer ici la probabilité des événements : $\bar{M} \cap P$ et $\bar{M} \cap \bar{P}$.

Soit A cet événement, $p(A) = p(\bar{M} \cap P) + p(\bar{M} \cap \bar{P})$

$$\bullet \quad p(\bar{M} \cap P) = p_{\bar{M}}(P) \times p(\bar{M}) = 0,01 \times 0,97 = 0,0097$$

$$\bullet \quad p(\bar{M} \cap \bar{P}) = p_{\bar{M}}(\bar{P}) \times p(\bar{M}) = 0,97 \times 0,99 = 0,9603$$

$$\text{Ainsi, } \underline{\underline{p(A) = 0,97}}.$$

NB : On pouvait aussi remarquer que $A = \bar{M}$ et que donc $p(A) = p(\bar{M})$, puisque un individu non malade est un individu non malade et qui a un test positif ou bien est un individu non malade et qui a un test négatif.

3°) Ici, nous voulons calculer la probabilité de l'événement P puis de $\bar{P}$.

- Un individu ayant un test positif est un individu qui a un test positif et qui est malade ou un test positif et non malade. Donc $p(P) = p(P \cap M) + p(P \cap \bar{M})$. Soit **$p(P) = 0,0382$**
- De même, $p(\bar{P}) = p(\bar{P} \cap M) + p(\bar{P} \cap \bar{M}) = \mathbf{0,9618}$.

La deuxième méthode et la plus simple d'ailleurs pour le 2^{ème} résultats est que :
 $p(\bar{P}) = 1 - p(P) = 1 - 0,0382 = 0,9618$

4°) On a : $p_P(\bar{M}) = \frac{p(P \cap \bar{M})}{p(P)}$
 soit **$p_P(\bar{M}) = 0,253926701$**

5°) On a : $p_{\bar{P}}(\bar{M}) = \frac{p(\bar{P} \cap \bar{M})}{p(\bar{P})}$ soit
 $p_{\bar{P}}(\bar{M}) = 0,998440424$.

Activité 19

- a) Soit A l'événement : « l'employé n'a jamais été absent », on a : 25% des employés qui ont été absents au moins un jour. On en déduit que 75% des employés n'ont jamais été absents.
 D'où **$p(A) = \frac{75}{100} = 0,75$** .
- b) Soit B l'événement « l'employé a été absent au moins un jour », on a :
 $p(B) = \frac{25}{100} = 0,25$.
- c) La probabilité $p(C)$ de l'événement l'employé a été absent exactement 2 jours » est **$p(C) = \frac{4}{100} = \frac{12-8}{100} = 0,04$** .
- d) La probabilité $p(D)$ de l'événement « l'employé a été absent moins de 4 jours » est :
 $p(D) = \frac{2+4+13+75}{100} = 1 - \frac{6}{100} = 0,94$.

Activité 20

- a) La probabilité de l'événement A : « la machine est en état de marche » est :
 $p(A) = 1 - \frac{5}{200} = 0,975$
- b) La probabilité de l'événement B : « la machine A est en panne » est :
 $p(B) = \frac{5}{200} = 0,025$.
- c) La probabilité de l'événement C : « la machine C ou la machine D est en panne » est :
 $p(C) = \frac{3}{200} + \frac{10}{200} - \left(\frac{3}{200} \times \frac{10}{200}\right) = 0,06425$.
- d) La probabilité de l'événement : « aucune machine n'est en panne » est : **$p(D) = \left(1 - \frac{5}{200}\right) \times \left(1 - \frac{5}{200}\right) \times \left(1 - \frac{5}{200}\right) = 0,91235625$** .
- e) La chance qu'aucune machine ne soit en panne est très élevée, soit 91,235625%. D'où, l'atelier de Blagbotho peut bien fonctionner à cette allure.

Activité 21

1) a- Preuve

La boule verte tirée est soit de l'urne U_1 , soit de l'urne U_2 , ou soit de l'urne U_3 . Donc la probabilité p de tirer une boule verte est de :
 $p = p_1 + p_2 + p_3$ où p_1 , p_2 et p_3 désignent la probabilité que la boule verte soit tirée de l'urne U_1 , de U_2 , de U_3 .

- Avant de se diriger vers l'urne U_1 , il faut avoir obtenu le numéro 1 puis après on tire une boule verte.

Donc $p_1 = p(1 \cap V) = p(1) \times p_1(V)$: soit
 $p_1 = \frac{1}{6} \times \frac{3}{k}$.

- Avant de se diriger vers U_2 , il faut avoir obtenu le chiffre 3 ou le chiffre 6 puis après on tire une boule verte.

Soit $p_2 = \frac{1}{6} \times \frac{2}{k} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{k} = \frac{4}{6k}$.

- Pour U_3 , il ne reste que les chiffres 2, 4, et 5. Donc $p_3 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{k} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{k} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{k} = \frac{1}{6k}$.

Ainsi, $p = \frac{3}{6k} + \frac{4}{6k} + \frac{3}{6k}$.

Soit $p = \frac{5}{3k}$. D'où le résultat.

Déduction

On a : $p(V) + p(R) = 1 \Rightarrow p(R) = 1 - p(V)$.

Soit $p(R) = \frac{3k-5}{3k}$.

b) Calculons $p_R(3k)$

$$p_R(3k) = \frac{p(3k \cap R)}{p(R)},$$

donc $p(3k \cap R) = p_{3k}(R) \times p(3k)$

$$p(3k \cap R) = \frac{k-2}{k} \times \frac{1}{3}$$

$$p(3k \cap R) = \frac{k-2}{3k}$$

$$\text{D'où } p_R(3k) = \frac{k-2}{3k} \times \frac{3k}{3k-5}$$

$$\text{Soit } p_R(3k) = \frac{k-2}{3k-5}.$$

c) Calculons la probabilité $p(5 \cap V)$

Si le dé ramène 5, le joueur doit se diriger vers U_3

On a :

$$p(5 \cap V) = p_5(V) \times p(5) = \frac{1}{k} \times \frac{1}{6}$$

$$\text{soit } p(5 \cap k) = \frac{1}{6k}.$$

2°) Déterminons k.

La probabilité p d'obtenir une boule verte est :

$$\frac{5}{3k}, \text{ donc } p > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{3k} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow k < 5.$$

Comme $k \geq 3$, alors $k = 4$.

3°) Déterminons k

$$\text{On a : } \frac{3k-5}{3k} = 0,99917369 \Rightarrow k = \frac{5}{3(1-0,99917369)}, \text{ soit } k = 2017.$$

4°) Soit p' cette probabilité.

$$p' = p(3k \cap R) + p(2 \cap V).$$

$$p(2 \cap V) = \frac{1}{6k} \text{ donc } p' = \frac{k-2}{3k} + \frac{1}{6k} = \frac{2k-3}{6k}.$$

$$\text{Pour } k = 2017, \text{ on a : } p' = \frac{4031}{12102}.$$

Activité 22

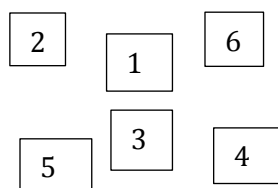
Partie A

1.) Soit Ω l'univers des éventualités associé à cette expérience aléatoire.

On a 6 résultats possibles pour chacun des dés.

D'où $\text{card } \Omega = 6^6$.

Nous voulons après immobilisation un tirage pêle-mêle contenant :



Ceci est bien sur un résultat possible après le lancer des 6 dés.

Mais quel dé a libéré le chiffre 1 ? le chiffre 2 ?, ..., le chiffre 6 ? On ne saurait le dire.

Puisque nous ne savons pas quel dé a donné tel ou tel chiffre, alors il faut permuter les 6 chiffres sur les 6 dés. Le nombre de résultats possibles est donc :

$n = 6!$ (=permutation de 6 chiffres sur 6 espaces (= 6 dés)).

$$\text{D'où } p = \frac{6!}{6^6}$$

$$\text{Soit } p = 0.015432099$$

Remarque : Si on avait spécifié les chiffres donnés par chacun des dés, on se retrouverait avec un résultat, tel que donné et dans ce cas, $p = \frac{1}{6^6}$, donc il faut beaucoup faire attention !!!

2.) Nous devons permuter 6 éléments dont 3 sont identiques et 3 autres identiques sur 6 espaces.

On a donc $n = \frac{6!}{3!3!} = 20$ résultats possibles.

$$\text{Donc } p = \frac{20}{6^6} = 0.000428669$$

3.) On serait précipité de dire ici qu'on a 6 choix pour le 1^{er} chiffre et 5 choix pour le

deuxième sachant le premier. Ensuite, dire qu'il faut permuter les 6 chiffres obtenus sur les 6 dés. Avec cette interprétation, on arrive à la conclusion qu'on a :

$$n = 6 \times 5 \times \frac{6!}{3!3!} = 600 \text{ résultats possibles.}$$

Alors on dira que $p = \frac{600}{6^6}$

Ceci n'est pas vrai.

En effet, considérons les deux choix suivants :

$\boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2}$ puis

$\boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \boxed{1}$

Si on choisit successivement, nous obtenons cela en choisissant d'abord 1 puis ensuite 2 et pour l'autre 2 suivi de 1. Avec un tel choix, on dénombre des arrangements (on compte ces résultats 2 fois) alors que ces deux résultats en combinaison, c'est la même chose, (donc on devrait prendre ça pour un seul résultat en comptant ça une fois) car tout est pêle-mêle au sol et il n'y a pas un ordre de succession des éléments tirés, car tout tombe au sol au même moment.

Par conséquent, il faut choisir simultanément les deux chiffres.

On a donc $n = C_6^2 \times \frac{6!}{3!3!} = 300$ (C_6^2 = choisir 2 chiffres parmi les 6 et $\frac{6!}{3!3!}$ = permuter les 6 dés).

D'où $p = \frac{300}{6^6} = \mathbf{0.006430041}$

4.) Ici, il faut faire encore beaucoup attention. Considérons :

$\boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2}$ puis

$\boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{1} \quad \boxed{1}$

Ce n'est pas du tout la même chose. C'est bien sur deux résultats différents. Par conséquent, il faut choisir ses deux chiffres successivement, c'est-à-dire dénombrer des arrangements.

Ainsi, on a $n = 6 \times 5 \times \frac{6!}{4!2!}$ résultats possibles.

D'où $p = \mathbf{0.009645}$

Partie B

5.) Soit Ω l'espace échantionnal associé à cette expérience aléatoire.

On a 6 résultats possibles pour le dé 1 et pour chacun des 6 résultats on en a 6 pour le dé 2 et ..., on en a 6 pour le dé 6,

D'où **card $\Omega = 6^6$**

On déduit que $p = \frac{6!}{6^6}$

Soit $p = \mathbf{0.015432099}$

6.) Ici encore, on a $p = \frac{20}{6^6}$

7.) Par contre ici, il faut noter que si les dés sont lancés successivement, l'ordre de succession des chiffres obtenus est important. Cela implique que

$\boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2}$ puis

$\boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{1} \quad \boxed{1}$ sont deux résultats différents.

Par conséquent, on a $n = 6 \times 5 \times \frac{6!}{3!3!} = 600$ résultats possibles.

D'où $p = \mathbf{0.12860082}$

4.) Ici, on a $p = \frac{6 \times 5 \times \frac{6!}{3!3!}}{6^6}$

Soit $p = \mathbf{0.009645}$

Activité 23

1.) Soit Ω l'univers des éventualités associé à cette expérience aléatoire.

Card $\Omega = C_{54}^5 = 3162510$

Nous avons 2 jokers parmi lesquels il faut en piger 2, 4 As parmi lesquels il faut en piger 2 et une simple carte à piger du reste (=54-6=48)

Le nombre de résultats possibles est donc :

$$n = C_2^2 \times C_4^2 \times C_{48}^1 = 6 \times 48 = 288$$

D'où $p = \frac{288}{\text{Card } \Omega} = \mathbf{0.000091067}$

2.) Le tirage doit contenir 2 jokers et au moins 2 As.

(J pour Joker, A pour As, et I pour Inconnu)

On a : $\boxed{JJAAI}$ ou $\boxed{JJAAA}$

Le nombre de résultats possibles est donc :

$$n = C_2^2 \times C_4^2 \times C_{48}^1 + C_2^2 \times C_4^3 = 292$$

D'où $\boxed{p = 0.00092332}$

3.) Le nombre de résultats possibles donne :

$$n = C_{13}^2 \times C_{13}^1 \times C_{13}^1 \times C_{13}^1 \times 4 = 685464$$

D'où $\boxed{p = 0.216746825}$

Activité 28

L'univers Ω des possibilités est constitué de 6 événements élémentaires $w_1, w_2, \dots, w_6$ définis par :

$\{w_i\} = \text{« le numéro } i \text{ est obtenu par ce lancé »}$

$$\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$$

Munissons Ω de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$, la probabilité étant définie $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ on a :
 $p(\{w_i\}) = P_i$.

1°) Les six nombres P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , et P_6 forment une suite arithmétique.

Notons a le réel $\frac{P_3+P_4}{2}$ et r la raison. Nous pouvons écrire : $P_1 = a - \frac{5}{2}r$; $P_2 = a - \frac{3}{2}r$;
 $P_3 = a - \frac{1}{2}r$; $P_4 = a + \frac{1}{2}r$; $P_5 = a + \frac{3}{2}r$ et $P_6 = a + \frac{5}{2}r$. Les six réels P_i doivent vérifier :

$$(1) P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1.$$

(2) D'autre part, sachant que P_3, P_5, P_6 forment une suite géométrique, ils doivent vérifier $P_3 \times P_6 = (P_5)^2$.

Exprimons (1) et (2) en reprenant les expressions des P_i en fonction de a et r .

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 6a = 1 \text{ et}$$

$$P_3 \times P_6 = (P_5)^2 \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}r\right) \left(a + \frac{5}{2}r\right) = \left(a + \frac{3}{2}r\right)^2.$$

De la 1^{ère} égalité, nous déduisons $a = \frac{1}{6}$. La

seconde s'écrit alors : $\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}r\right) \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{2}r\right) = \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{2}r\right)^2$.

$\Rightarrow 126r^2 + 6r = 0$. Cette équation possède les deux solutions $r = 0$ ou $r = -\frac{1}{21}$.

Nous devons rejeter $r = 0$ qui impliquerait $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = \frac{1}{6}$. Car toutes les faces ne possèdent pas la même probabilité d'apparaître. Nous obtenons donc $r = -\frac{1}{21}$ puis on a : $P_1 = \frac{6}{21}$; $P_2 = \frac{5}{21}$; $P_3 = \frac{4}{21}$; $P_4 = \frac{3}{21}$; $P_5 = \frac{2}{21}$; $P_6 = \frac{1}{21}$.

2°) Soit A l'événement « faire apparaître un nombre paire »

$A = \{w_2, w_4, w_6\}$ donc $P(A) = P(\{w_2\} \cup \{w_4\} \cup \{w_6\}) = P(\{w_2\}) + P(\{w_4\}) + P(\{w_6\})$

Les événements élémentaires étant 2 à 2 incompatibles, $P(A) = P_2 + P_4 + P_6 = \frac{3}{7}$. Soit $P(A) = \frac{3}{7}$.

• Soit B l'événement « faire apparaître un multiple de 3 »

$$B = \{w_3, w_6\}$$

$$P(B) = P_3 + P_6 = \frac{5}{21}.$$

Activité 29

1°) Valeurs possibles de X

$$X = \{500 - x ; 800 - x ; 300 - x\}$$

2°) Loi de probabilité de X

• Pour gagner 500 F, il faut avoir obtenu le numéro 2 ou 4 ou 6 ou 8 ou 10 ou 12. Soit
 $p(X = 500 - x) = \frac{6}{12}$.

- Pour gagner 800 F, il faut avoir obtenu le numéro 1 ou 3 ou 5.

$$\text{Soit } p(800 - x) = \frac{3}{12}.$$

- De même, $p(X = 300 - x) = \frac{3}{12}$.

La loi de probabilité de X est donc :

x_i	$500 - x$	$800 - x$	$300 - x$
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

3°) Espérance mathématique.

$$E(X) = \frac{1}{2}(500 - x) + \frac{1}{4}(800 - x) + \frac{1}{4}(300 - x).$$

$$\text{Soit } E(X) = 525 - x.$$

Le jeu est équitable si $E(X) = 0$ soit $x = 525F$.

Ecart-type de X

$$V(X) = (500 - 525)^2 x \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(800 - 525)^2 + \frac{1}{4}(300 - 525)^2.$$

$$\text{Soit } V(X) = 31875.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 25\sqrt{51}.$$

Activité 30

1- Loi de probabilité de X

Les valeurs possibles de X sont : $\{0, 1, 2, 3\}$

- Si aucune boule verte n'est tirée avant la première boule rouge, on a les schémas suivants :

$$RRRR + RVRR + RVVR + RVVV$$

Ici, on doit obligatoirement tirer en première position la boule rouge, ce n'est donc que les 3 autres qui suivent (R) et qu'on peut permuter. On dénombrera donc les ordres pour ces 3 éléments.

Soit Ω l'univers des éventualités associé à cette expérience aléatoire.

$$\text{Card}(\Omega) = A_8^4 = 1680.$$

$$\text{On a : } p(X=0) = \frac{1}{1680}(A_5^4 + A_5^1 \times A_3^1 \times A_4^2 \times 3 + A_5^1 \times A_3^2 \times A_4^1 \times 3 + A_5^1 \times A_3^3) = \frac{1050}{1680}$$

$$\text{Soit } p(X=0) = \frac{35}{56}.$$

- Si la boule verte est tirée avant la 1^{ère} boule rouge, on a les schémas suivants :

$$VRRR + VRVR + VRVV$$

$$\text{On a : } p(X=1) = \frac{1}{1680}(A_3^1 \times A_5^3 + A_3^1 \times A_5^1 \times A_2^1 \times A_4^1 \times 2 + A_3^1 \times A_5^1 \times A_2^2) = \frac{450}{1680}.$$

$$\text{Soit } p(X=1) = \frac{15}{56}.$$

- Si 2 boules vertes sont tirées avant la 1^{ère} boule rouge alors on a les schémas :

$$VVRR + VVRV$$

$$\text{On a : } p(X=2) = \frac{1}{1680}(A_3^2 \times A_5^2 + A_3^2 \times A_5^1 \times A_4^1) = \frac{150}{1680}.$$

$$\text{Soit } p(X=2) = \frac{5}{56}.$$

- Si 3 boules vertes ont été tirées avant la 1^{ère} rouge, on a les schémas suivants :

$$VVVR.$$

$$\text{On a : } p(X=3) = \frac{1}{1680}(A_3^3 \times A_5^1) = \frac{30}{1680} = \frac{1}{56}.$$

La loi de probabilité de X est donc :

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{35}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

2- Espérance mathématique

$$E(X) = (0 \times \frac{35}{56}) + (1 \times \frac{15}{56}) + (2 \times \frac{5}{56}) + (3 \times \frac{1}{56})$$

$$E(X) = \frac{1}{2}$$

Ecart-type de X.

$$V(X) = (0^2 \times \frac{35}{56}) + (1^2 \times \frac{15}{56}) + (2^2 \times \frac{5}{56}) + (3^2 \times \frac{1}{56}) - [E(x)]^2 \text{ soit } V(X) = \frac{15}{28}.$$

On a : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ d'où $\sigma(X) = \sqrt{\frac{15}{28}}$.

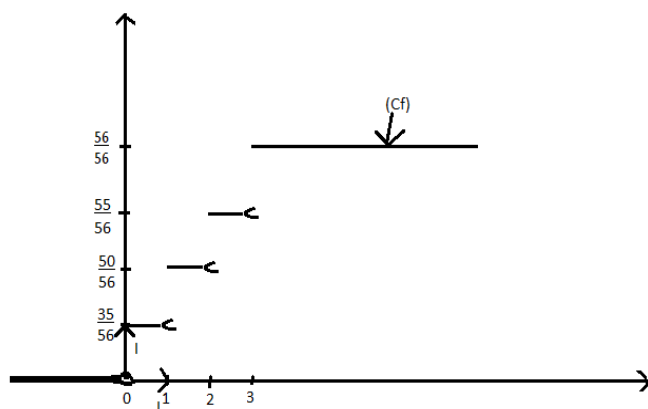
3- Définissons la fonction de répartition F de X.

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0 ; 1]$$

$$t \mapsto p(X \leq t)$$

- Pour $t \in]-\infty ; 0]$, $p(t) = 0$
- Pour $t \in [0 ; 1]$, $p(t) = \frac{35}{56}$
- Pour $t \in [1 ; 2]$, $p(t) = \frac{50}{56}$
- Pour $t \in [2 ; 3]$, $p(t) = \frac{55}{56}$
- Pour $t \in [3 ; +\infty[$, $p(t) = 1$

Représentation de (C_t) .



4°) Calculons $p(X)$ avec $0, 23 \leq x \leq 2, 5$

Si $p(0,23 \leq x \leq 2,5) = F(2.5) - F(0.23)$

$$p(X) = \frac{2}{5}$$

Activité 31

1°) Ensemble des valeurs prises par X.

Les différents types de tirages avec la somme de leurs points :

- BB $\longrightarrow$ -4points
 NN $\longrightarrow$ 14 points
 RR $\longrightarrow$ 4 points
 BN $\longrightarrow$ 5 points

- BR $\longrightarrow$ 0 point
 NR $\longrightarrow$ 9 points.

Les valeurs possibles de X sont donc :

$$X = \{0, -4, 4, 9, 14\}$$

2°) Loi de probabilité de X

Soit Ω l'univers des éventualités associé à cette expérience aléatoire.

$$\text{Card}(\Omega) = C_{10}^2 = 45.$$

$$p(X = 0) = \frac{1}{45} (C_5^1 \times C_3^1) = \frac{1}{9}$$

$$p(X = -4) = \frac{1}{45} (C_5^2) = \frac{2}{9}$$

$$p(X = 4) = \frac{1}{45} (C_5^2) = \frac{1}{15}$$

$$p(X = 5) = \frac{1}{45} (C_5^1 \times C_2^1) = \frac{2}{9}$$

$$p(X = 9) = \frac{1}{45} (C_2^1 \times C_3^1) = \frac{2}{15}$$

$$p(X = 14) = \frac{1}{45} (C_2^2) = \frac{1}{45}$$

La loi de probabilité de X se résume dans le tableau ci-après :

X	-4	0	4	5	9	14
p(X)	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{45}$

3°) Déterminons la probabilité :

i.) D'obtenir 2 boules noires

Soit Ω l'univers des possibles, $\text{card}(\Omega)$

$$= C_{n+5}^2 = \frac{(n+5)(n+4)}{2}$$

Soit p cette probabilité ; $p = \frac{2}{(n+4)(n+5)}$

ii.) Aucune boule blanche

Soit p' cette probabilité ;

$$p' = \frac{2}{(n+4)(n+5)} C_5^2 = \frac{20}{(n+4)(n+5)}$$

b) On a : $p = \frac{20}{(n+4)(n+5)}$

c) Déterminons n

On a : $\frac{20}{(n+4)(n+5)} = \frac{2}{11}$

$$\Rightarrow 2n^2 + 18n - 180 = 0$$

La résolution de cette équation aboutit à **n = 12**.

Activité 32

1.) L'expérience présente 2 éventualités : obtenir une pile ou une face.

De ce fait, on est en présence d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0.7$ (probabilité d'obtenir la pile).

Si on réalise 10 lancers, alors la variable aléatoire réelle X prenant pour valeur le nombre de piles obtenus suivra une loi Binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.7$.

Par conséquent, la probabilité d'obtenir 3 piles à l'issu des 10 épreuves est :

$$p(X = 3) = C_{10}^3 (0.7)^3 (1 - 0.7)^{10-3}$$

Soit **p(X = 3) = 0.0090017**

2.) Pour répondre à cette question, il est nécessaire de comprendre le fond de la loi Binomiale telle que nous l'avons expliqué dans le résumé du cours.

Nous voulons par exemple :

P F F F F P P | F F F

Les éléments du 8^{ième} au 10^{ième} nous ont été imposés. Il faut alors permuter le reste des éléments sur les espaces de 1 à 7 soit au total sur 7 endroits.

$$\text{Donc } p = \frac{7!}{4! \times 3!} (0.7)^3 (1 - 0.7)^7$$

Soit **p = 0.002625494**

3.) Soit :

A l'événement : « obtenir Face du 8^{ième} au 10^{ième} lancer »

B l'événement : « obtenir 3 piles et 7 faces »

En (2), on a calculé $p(A \cap B)$.

Ici, nous voulons $p_B(A)$

Par définition, $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

De tout ce qui précède, on a :

$$p_B(A) = \frac{0.0026255}{0.0090017}$$

Soit **p_B(A) = 0.29166713**

4.) Ici, on veut par exemple :

P F P F P F P F P F ou bien

F P F P F P F P F P

Les ordres sont tels imposés.

$$\text{D'où } p = (0.7)^5 (1 - 0.7)^5 \times 2$$

Soit **p = 0.00081682**

5.) On veut avoir :

P F P F P F P F P ou bien

F P F P F P F P F P

D'où on a :

$$p = (0.7)^5 (1 - 0.7)^4 + (0.7)^4 (1 - 0.7)^5$$

Soit **p = 0.00194481**

6.) Si Y désigne le nombre de faces obtenues sur les 40 lancers, alors Y suit une loi Binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0.3$

On veut $p(Y \geq 4)$

$$p(Y \geq 4) = p(Y = 4) + p(Y = 5) + \dots + p(Y = 40)$$

Tout simplement,

$$p(Y \geq 4) = 1 - \{p(Y = 0) + p(Y = 1) + p(Y = 3)\}$$

Soit **p(Y \geq 4) = 0.999402072**

Activité 33

1.) Soit Ω l'espace échantionnal associé à cette expérience aléatoire.

$$\text{card } \Omega = C_{12}^5 = 792$$

Pour gagner il faut que le tirage présente l'un des « visages » suivants :

RRBVJ ou RBBVJ ou RBVVJ

Donc le nombre de résultats possibles est :

$$n = C_5^2 \times C_4^1 \times C_2^1 \times C_1^1 + C_5^1 \times C_4^2 \times C_2^1 \times C_1^1 + C_5^1 \times C_4^1 \times C_2^2 \times C_1^1 = 160$$

La probabilité de gagner est donc :

$$p = \frac{160}{792} = \frac{20}{99}$$

2.a) Si on effectue 4 fois cette expérience, à chaque épreuve, soit on gagne ou soit on ne gagne pas. Autrement dit, soit on obtient un succès (gagner) ou soit un échec (ne pas gagner).

On en déduit que **X suit une loi Binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{20}{99}$**

b) Il nous faut d'abord déterminer la fonction de masse de probabilité de X.

$X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$\begin{aligned} \bullet p(X=0) &= C_4^0 \left(\frac{20}{99}\right)^0 \left(1 - \frac{20}{99}\right)^{4-0} \\ &= 0.405478272 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet p(X=1) &= C_4^1 \left(\frac{20}{99}\right)^1 \left(1 - \frac{20}{99}\right)^{4-1} \\ &= 0.410610908 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet p(X=2) &= C_4^2 \left(\frac{20}{99}\right)^2 \left(1 - \frac{20}{99}\right)^{4-2} \\ &= 0.155928193 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet p(X=3) &= C_4^3 \left(\frac{20}{99}\right)^3 \left(1 - \frac{20}{99}\right)^{4-3} \\ &= 0.026316995 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet p(X=4) &= C_4^4 \left(\frac{20}{99}\right)^4 \left(1 - \frac{20}{99}\right)^{4-4} \\ &= 0.001665633 \end{aligned}$$

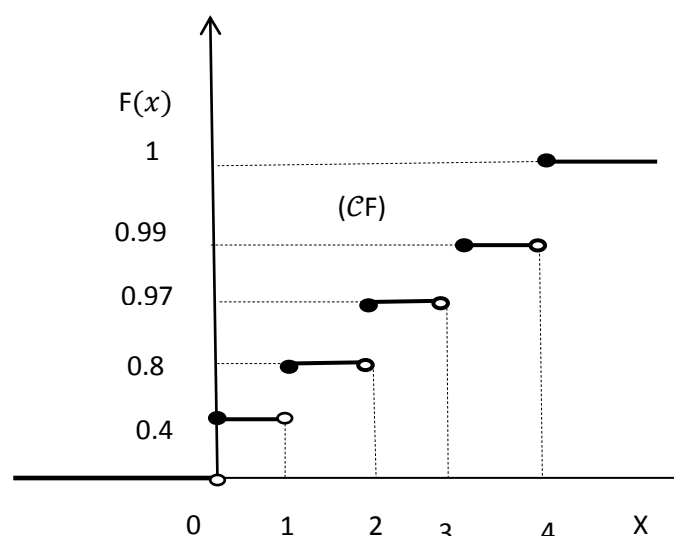
La fonction de répartition F de X est définie par :

$$F(x) = p(X \leq x)$$

On déduit que :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.405478272, & 0 \leq x < 1 \\ 0.81608918, & 1 \leq x < 2 \\ 0.972017373, & 2 \leq x < 3 \\ 0.998334368, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

c) La courbe (CF) de F est la suivante :



3.a) On a :

$$\begin{aligned} p(1.4 < X \leq 3) &= p(X \leq 3) - p(X < 4) \\ &= F(3) - F(1.4) \end{aligned}$$

$$\{ 3 \in [3; 4[\Rightarrow F(3) = 0.998334368$$

$$\{ 1.4 \in [1; 2[\Rightarrow F(1.4) = 0.812245188$$

$$\text{D'où } \boxed{p(1.4 < X \leq 3) = 0.182245188}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } p(X > 2.5) &= 1 - p(X \leq 2.5) \\ &= 1 - F(2.5) \end{aligned}$$

Comme $2.5 \in [2; 3[$, alors

$$F(2.5) = 0.9720017373$$

$$\text{D'où } \boxed{p(X > 2.5) = 0.027982627}$$

Partie B

4.) La boule pigée n'étant pas remise à chaque pige, alors le nombre d'essai sera maximal s'il ne reste que dans l'urne les 02 boules vertes.

On en déduit que $Y \in \{1, 2, \dots, 11\}$.

5.a) A chaque essai on a deux éventualités : soit on obtient la première boule verte avec probabilité p et on s'arrête ou soit on ne l'obtient pas avec probabilité $1 - p$ puis on continue.

Si on l'a obtenue au $k^{\text{ième}}$ essai, cela signifie qu'on a obtenu successivement rien que des échecs sur les $k - 1$ premiers essais.

L'ordre d'obtention est donc tel, donc

$$p(Y = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

b.) On a : $3.5 \in [3 ; 4[$

Il nous faut donc déterminer la fonction de répartition de Y sur $[3 ; 4[$.

La fonction de masse de probabilité de Y donne :

$$\bullet p(Y = 1) = p = \frac{C_2^1}{C_{12}^1} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\bullet p(Y = 2) = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36}$$

$$\bullet p(Y = 3) = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}$$

$\vdots$ $\vdots$

On déduit que :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \frac{1}{6}, & 1 \leq y < 2 \\ \frac{11}{36}, & 2 \leq y < 3 \\ \frac{91}{216}, & 3 \leq y < 4 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

D'où $\boxed{F_Y(3.5) = \frac{91}{216}}$

c.) On veut $p(Y \geq 2)$

$$p(Y \geq 2) = 1 - p(Y < 2) = 1 - \frac{1}{6}$$

Soit $\boxed{p(Y \geq 2) = \frac{5}{6}}$

Ensuite, on veut $p(Y \leq 4) = F_Y(4)$

$$\text{On a : } p(Y = 4) = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3 = 0.09645062$$

$$\text{Donc } F_Y(y) = p(Y = 4) + \frac{91}{216}, 4 \leq y < 5$$

D'où $\boxed{p(Y \leq 4) = 0.517746913}$

d.) On a :

$$p(1.5 \leq Y \leq 1.8) = p(Y \leq 1.8) - p(Y \leq 1.5)$$

$$= F_Y(1.8) - F_Y(1.5) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$$

$$\boxed{p(1.5 \leq Y \leq 1.8) = 0}$$

Ce résultat se comprend aisément car sur l'intervalle $[1.5; 1.8[$, Y n'y prend aucune valeurs puis que les valeurs de Y sont les entiers $1, 2, \dots, 11$.

Partie C

6.a) Si on a tout pigé et il ne reste que les deux boules vertes dans l'urne, il faudrait faire le 12^{ième} essai pour obtenir la deuxième boule verte (ce qui représente le nombre maximal d'essais possibles). De plus, il faut au moins 2 essais pour obtenir la deuxième boule verte.

D'où $\mathbf{Z \in \{2, 3, 4, \dots, 12\}}$

b.) La 2^{ième} boule verte est obtenue au k ^{ième} essai avec probabilité $= \frac{1}{6}$. Cela signifie que sur les $k - 1$ essais précédents, on a obtenu quelque part la première boule verte.

Mais à quel endroit ? On ne saurait le dire.

Par conséquent, nous devons permuter la première boule verte sur les $k - 1$ essais précédents.

Sur les $k - 1$ premiers essais, nous avons obtenu $k - 2$ autres boules en plus de la première boule verte.

Donc, il y a

$$\frac{(k-1)!}{1! \times (k-2)!} = C_{k-1}^1 = C_{k-1}^{2-1} = \binom{k-1}{2-1}$$

différentes manières de placer la première boule verte sur les $k - 1$ premiers essais.

Comme nous avons obtenu au total 2 boules vertes avec probabilité p^2 et $k - 2$ autres boules vertes avec probabilité $(1 - p)^{k-2}$, alors :

$$p(Z = k) = \binom{k-1}{2-1} p^2 (1-p)^{k-2}$$

c.) On déduit de ce qui précède que :

$$p(Z = 5) = \binom{5-1}{2-1} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3$$

Soit $p(Z = 5) = 0.004300412$

d.) On veut : $p(Z \geq 4)$

$$p(Z \geq 4) = 1 - p(Z < 4)$$

$$= 1 - \{p(Z = 2) + p(Z = 3)\}$$

Soit $p(Z \geq 4) = \frac{25}{27}$

7.)

On a : $p(2 \leq Z < 4.12) = F_Z(4.12) - F_Z(2)$

La fonction de masse de probabilité de Z en quelques points donne :

$$p(Z = 2) = \frac{1}{36}$$

$$p(Z = 3) = \frac{5}{108} \text{ et } p(Z = 4) = \frac{25}{432}$$

Donc on a :

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 2 \\ \frac{1}{36}, & 2 \leq z < 3 \\ \frac{2}{27}, & 3 \leq z < 4 \\ \frac{19}{144}, & 4 \leq z < 5 \\ \vdots & \end{cases}$$

Alors $F_Z(4.12) = \frac{19}{144}$ et $F_Z(2) = \frac{1}{36}$

D'où $p(2 \leq Z < 4.12) = \frac{5}{48}$

Activité 34

1°) Loi conjointe de (X,Y)

L'univers Ω est l'ensemble des couples $(b,r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, avec $1 \leq b \leq 4$ et $1 \leq r \leq 3$; soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3\}$. Les valeurs possibles de $(X; Y)$ sont :

$$(X,Y)(\Omega) = \{(1,1); (2,1); (3,1); (4,1); (2,2); (3,2); (4,2); (3,3); (4,3)\}$$

Si $(X; Y) = (1; 1)$ alors la boule blanche tirée porte le numéro 1 et 1 est le plus petit des numéros portés par b et r. Autrement, on a r qui peut porter 1 ou 2 ou 3.

Donc $p[(X; Y) = (1,1)] = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$, soit $p[(X; Y) = (1,1)] = \frac{3}{12}$

On détermine de même les autres probabilités.

La loi conjointe (X,Y) se résume dans le tableau ci-après :

$x_i \backslash y_j$	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{3}{12}$	0	0	$\frac{3}{12}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{3}{12}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	1

2- Les lois de probabilité de X et Y se résument dans le tableau ci-après :

x_i	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

3- X et Y sont indépendants si et seulement si $\forall x_i \in X(\Omega), \forall y_j \in Y(\Omega)$,

$$p[(X; Y) = (x_i; y_j)] = p(X = x_i) \times p(Y = y_j)$$

Nous constatons par exemple :

$$p[(X ; Y) = (1 ; 2)] = 0$$

$$p(X = 1) \times p(Y = 2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

Donc $p[(X ; Y) = (1 ; 2)] \neq p(X=1) \times p(Y=2)$

Par conséquent, X et Y ne sont donc pas indépendants.

4-a) La probabilité p de réussir cette

expérience est : $p = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

b) I- Déterminons la probabilité de réussir au moins une fois

On est en présence d'un processus de Bernoulli de paramètre $n = 4$ et de probabilité de succès $p = 1/12$.

La probabilité d'obtenir k succès à l'issue des 4 épreuves est :

$$p(X = k) = C_4^k \left(\frac{1}{12}\right)^k \left(1 - \frac{1}{12}\right)^{4-k}$$

Le contraire de "au moins une fois" est 0 fois.

$$p(X = 0) = C_4^0 \left(\frac{1}{12}\right)^0 \left(\frac{11}{12}\right)^4$$

$$p(X = 0) = \frac{14641}{20736}$$

On en déduit que la probabilité p de réussir au moins une fois est : $p = 1 - p(X=0)$.

$$\text{Soit } p = \frac{6095}{20736}$$

ii) Exactement 2 fois

On calcule $p(X=2)$

iii) Si l'expérience est réussie de la 2^{ème} à la 4^{ème} répétition, alors on a obtenu 3 succès.

On calcule donc $p(X=3)$

c) Espérance mathématique

$$E(X) = n.p = 4 \times \frac{1}{12}$$

$$\text{Soit } E(X) = \frac{1}{3}$$

La variance

$$V(X) = n.p(1-p) = \frac{1}{3} \times \frac{11}{12} = \frac{11}{36}$$

Séquence 13 : Suites Numériques

Activité 1

1 .a) sens de variation de f sur I

$$f(x) = \frac{3x+1}{2x+4}$$

f est définie, continue et dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I, f'(x) = \frac{10}{(2x+4)^2}$$

$f'(x) > 0, \forall x \in I$, donc f est strictement croissante sur I.

b) Démonstration

f étant strictement croissante alors $\forall x \in I$ c'est dire $x \in [0, \frac{1}{2}]$, on a $f(x) \in [f(0), f(\frac{1}{2})]$.

$$\bullet F(0) = \frac{1}{4}$$

$$\bullet F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

Donc $f(x) \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \subset I$, alors $\forall x \in I$ on a $f(x) \in I$.

2.a) démonstration

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n+1}{2U_n+4} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc on a $U_{n+1} = f(U_n)$ où $f(x) = \frac{3x+1}{2x+4}$

Raisonnons par récurrence

- Pour $n=0, U_0=0 \in I$. La proposition est vraie au premier rang.
- Supposons que $U_n \in I$ et démontrons que $U_{n+1} \in I$

Par hypothèse de récurrence on a : $U_n \in I$

Or $U_{n+1} = f(U_n)$. Comme de tout ce qui précède $\forall x \in I$, on a $f(x) \in I$, alors $f(U_n) \in I$ car $U_n \in I$. D'où $U_{n+1} \in I$.

En conclusion $U_n \in I$.

b) sens de variation de (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_{n+1}}{2U_{n+4}} - U_n$$

$$U_{n+1} - U_n = -\frac{(2U_n^2 + U_{n-1})}{2U_{n+4}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$, donc $U_n \geq 0$ soit $2U_n + 4 > 0$

$U_{n+1} - U_n$ a donc le signe de $-(2U_n^2 + U_n - 1)$.

Un encadrement permet d'établir que $2U_n^2 + U_{n-1} \in [1, 0]$ donc $-(2U_n^2 + U_n - 1) \geq 0$

Soit $U_{n+1} - U_n \geq 0$

Il en résulte que (U_n) est strictement croissante $\forall n \in \mathbb{N}$.

NB :

On peut également faire un raisonnement par récurrence et aboutir à la même conclusion.

c) Dédution

$\forall x \in \mathbb{N}, U_n \in [0, \frac{1}{2}]$ donc U_n est majorée par $\frac{1}{2}$.

De plus (U_n) est croissante. Par conséquent, (U_n) est convergente.

Calculons sa limite l

$$U_{n+1} = f(U_n)$$

l vérifie $f(l) = l$ c'est à dire $\frac{3l+1}{2l+4} = l$

Résolvons cette équation

$$\frac{3l+1}{2l+4} = l \Leftrightarrow 2l^2 + l - 1 = 0$$

$$\Delta = 9$$

On trouve $l = -1$ ou $l = \frac{1}{2}$

Comme $l \in I$, alors $l = \frac{1}{2}$

Soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1}{2}$

Activité 2

1.a) Démonstration

Nous intégrons par rapport à la variable x .

De ce fait, il est clair que : $n \leq x \leq n+1$

$$\text{donc } \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$$

Comme $n < n+1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx$$

Comme $\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx = \frac{1}{n+1}$ et $\int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx = \frac{1}{n}$
alors $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}$; d'où le résultat.

b) Dédution

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_n^{n+1} = \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$\text{D'où } \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

Nous savons maintenant que $\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$. Cela nous amène à écrire que :

$$\ln(2) - \ln(1) \leq \frac{1}{1}$$

$$\ln(3) - \ln(2) \leq \frac{1}{2}$$

$$\ln(4) - \ln(3) \leq \frac{1}{3}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

En faisant la somme membre à membre, on obtient après simplification :

$$\ln(n+1) - \ln(1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\text{D'où } \ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

2.a) sens de variation de (v_n)

$$V_{n+1} = V_n + \frac{1}{n+1} \Rightarrow V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n+1} > 0$$

D'où (V_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

b) limite de V_n en $+\infty$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq V_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty.$$

Activité 3

Partie A

$$1.a) D = \mathbb{R} - \{-2\}$$

b) limites de f_n aux bornes de D

$$\lim_{-\infty} f_n = 0, \lim_{+\infty} f_n = +\infty$$

$$\lim_{\substack{-2 \\ <}} f_n = +\infty; \lim_{\substack{-2 \\ <}} f_n = -\infty$$

c) branches infinies de (C_n)

- $\lim_{-\infty} f_n = 0$, la droite d'équation $y=0$ est asymptote à (C_n) en $-\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f_n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} f_n = -\infty$, la droite d'équation $x=-2$ est asymptote à (C_n)
- $\lim_{+\infty} f_n = +\infty$. calculons :

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2x+3}{x+2} \cdot \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} \cdot \frac{1}{n}$$

$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. On conclut que (C_n) admet un branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées en $+\infty$.

2) sens de variation de f_n

$$\forall x \in D, f'_n(x) = (2x^2 + 7x + 6 + n) \cdot \frac{e^{\frac{x}{n}}}{n(x+2)^2}$$

$$\forall x \in D, \frac{e^{\frac{x}{n}}}{n(x+2)^2} > 0, \text{ donc } f'_n(x) \text{ a le signe de } 2x^2 + 7x + 6 + n.$$

$$\text{Posons : } 2x^2 + 7x + 6 + n = 0$$

$$\Delta = 1 - 8n < 0$$

$$\text{Ainsi, } 2x^2 + 7x + 6 + n > 0, \text{ soit } f'_n(x) >$$

0. Par conséquent, f_n est strictement croissante sur $] -\infty, -2[$ et sur $] -2, +\infty[$

3.) Tableau de variation

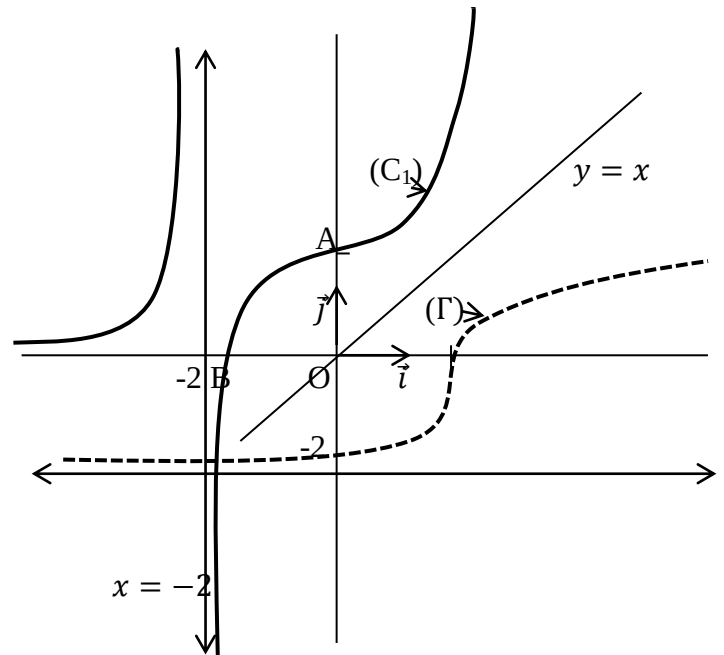
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'_n(x)$	+		+
$f_n(x)$	0 ↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗ $+\infty$

4).a) Points de concours

$$f_n(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow (C_n) \cap (Ox) = \{A(0, \frac{3}{2})\}$$

$$f_n(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3=0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$(C_n) \cap (Ox) = \{B(-\frac{3}{2}, 0)\}$$

b.) Construisons C_1 

5) a. $J = \mathbb{R}$

b. Démonstration

La fonction f est continue et strictement croissante sur $] -2, +\infty[$. Comme

$\forall x \in] -2, +\infty[f(x) = g_n(x)$, alors g_n est une bijection de $] -2, +\infty[$ sur J .

c.) Construction (voir figure)**Partie B****6) Interprétation géométrique de U_n**

$$U_n = \int_0^2 f_n(x) dx$$

U_n est l'aire, en unité d'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équations $x=0$, $x=2$, l'axe des abscisses et la courbe (C_n) .

7.) Sens de variation de U_n

$$U_{n+1} = \int_0^2 \frac{2x+3}{x+2} e^{\frac{x}{n+1}} dx$$

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^2 \frac{2x+3}{x+2} (e^{\frac{x}{n+1}} - e^{\frac{x}{n}}) dx$$

Le signe de $U_{n+1} - U_n$ est celui de $(e^{\frac{x}{n+1}} - e^{\frac{x}{n}})$ car d'une part, $0 < 2$ et d'autre part $\frac{2x+3}{x+2} > 0, \forall x \in [0; 2]$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n+1 > n \text{ donc } \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \text{ (car } x > 0)$$

$\Rightarrow e^{\frac{x}{n+1}} < e^{\frac{x}{n}}$ (car la fonction e est croissante)

$$\Rightarrow e^{\frac{x}{n+1}} - e^{\frac{x}{n}} < 0$$

Ainsi $U_{n+1} - U_n < 0$, soit (U_n) est strictement décroissante.

8.a) Démonstration

$$\forall x \in [0, 2], 0 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{x}{n} \leq \frac{2}{n} \Rightarrow 1 \leq e^{\frac{x}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3}{x+2} \leq \frac{2x+3}{x+2} e^{\frac{x}{n}} \leq \frac{2x+3}{x+2} e^{\frac{2}{n}} \text{ (car } \frac{2x+3}{x+2} > 0 \forall x \in [0, 2])$$

$$\text{Ainsi, } \frac{2x+3}{x+2} \leq f_n(x) \leq \frac{2x+3}{x+2} e^{\frac{2}{n}}.$$

b. Vérification

$$2 - \frac{1}{x+2} = \frac{2x+4-1}{x+2} = \frac{2x+3}{x+2}$$

Déduisons I

$$\text{On a : } I = \int_0^2 2 - \frac{1}{x+2} dx$$

$$\text{D'où } I = 4 - \ln 2.$$

9.a. Démonstration

$$\text{On a } \forall x \in [0, 2], \frac{2x+3}{x+2} \leq f_n(x) \leq \frac{2x+3}{x+2} e^{\frac{2}{n}}$$

$$\text{donc } \int_0^2 \frac{2x+3}{x+2} dx \leq \int_0^2 f_n(x) dx \leq$$

$$e^{\frac{2}{n}} \int_0^2 \frac{2x+3}{x+2} dx$$

$$\text{Or } \int_0^2 f_n(x) dx = U_n \text{ et } \int_0^2 \frac{2x+3}{x+2} dx = I$$

$$\text{D'où } I \leq U_n \leq e^{\frac{2}{n}} I.$$

b. Dédution

(U_n) est bornée et décroissante, d'où (U_n) est convergente.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{2}{n}} I = I$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = I$, $I \in \mathbb{R}$ d'où (U_n) converge vers I .

Activité 4

1) Déterminons a et b

On trouve $a=2$ et $b=0$.

2) a. Démonstration

Il faut faire la démonstration en deux étapes.

• φ solution de (E) $\Rightarrow \varphi - p$ solution de (E'), (1)

• $\varphi - p$ solution de (E') $\Rightarrow \varphi$ est solution de (E) (2)

On conclut de (1) et (2) l'équivalence.

b. Résolvons (E')

Les solutions de (E') sont les fonctions

$$f_k : x \mapsto ke^x, k \in \mathbb{R}.$$

c. Déterminons φ

Les solutions de E sont les fonctions $\varphi_k :$

$$x \mapsto 2x + ke^x$$

$$\varphi(0)=1 \Rightarrow K=1;$$

$$\text{d'où } \varphi(x) = 2x + e^x.$$

Partie B

3.a. Variations de f

$$f(x) = 2x + e^x$$

f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} f'(x) = 2 + e^x$$

$f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{-\infty} f = -\infty \text{ et } \lim_{+\infty} f = +\infty$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

b) Démonstration

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

c) Branches infinies de (c)

$$\bullet \lim_{-\infty} f = -\infty \text{ et } \lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

$$\lim_{-\infty} [f(x) - 2x] = 0$$

D'où la droite d'équation $y=2x$ est asymptote à (c) en $-\infty$.

$$\bullet \lim_{+\infty} f = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

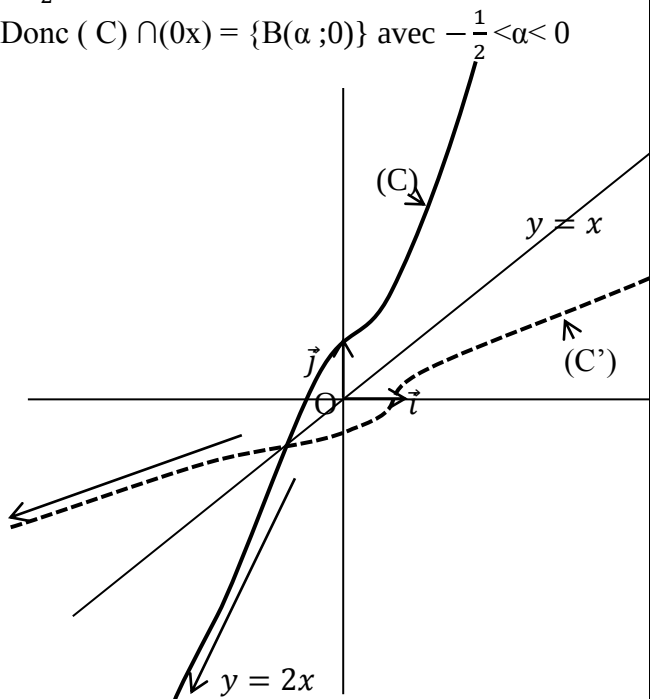
D'où (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

Construisons (C) et (C')

$$f(0)=1 \text{ donc } (C) \cap (0y) = \{A(0,1)\}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 + e^{-\frac{1}{2}} < 0$$

$$\text{Donc } (C) \cap (0x) = \{B(\alpha; 0)\} \text{ avec } -\frac{1}{2} < \alpha < 0$$



4) Démonstration

$$f(x) = x \Rightarrow f(x) - x = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = 0$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = f'(x) - 1$$

$$g'(x) = 1 + e^x > 0 \text{ donc } g \text{ est strictement}$$

croissante sur $\mathbb{R}$

- $g(-1) = -1 + e^{-1} < 0$

- $g(0) = 1$

$g(-1) \times g(0) < 0$, donc l'équation $g(x) = 0$

admet une solution unique telle que $-1 < x_0 < 0$

Par suite, $f(x) = x$ admet une unique solution

x_0 .

5) a. Justification

$$h = f^{-1}$$

$$\text{On a : } f(x_0) = x_0$$

$$\text{Donc } f^{-1}(x_0) = x_0$$

$$\text{Soit } h(x_0) = x_0$$

b) Démonstration

f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. $]-\infty; x_0] \subset \mathbb{R}$

Donc f est aussi une bijection de $]-\infty; x_0]$

$$\text{vers } f(]-\infty; x_0]) =]-\infty; x_0].$$

Sa réciproque h est donc définie de $]-\infty; x_0]$

vers $]-\infty; x_0]$ par suite, $\forall x \in]-\infty; x_0]$, on a :

$$h(x) \in]-\infty; x_0].$$

6) a. Démonstration

$$h'(x) = \frac{1}{f'[h(x)]} = \frac{1}{2 + e^{h(x)}}$$

$$\forall x \in]-\infty; x_0], e^{h(x)} > 0$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2 + e^{h(x)}} < \frac{1}{2}$$

$$\text{De plus } \frac{1}{2 + e^{h(x)}} > 0,$$

$$\text{D'où } 0 < h'(x) < \frac{1}{2}.$$

b) Démonstration

h est dérivable sur $]-\infty; x_0]$ et $\forall x \in]-\infty; x_0]$

$$|h'(x)| < \frac{1}{2}.$$

Comme $x_0 \in]-\infty; x_0]$ et soit $x \in]-\infty; x_0]$

En appliquant le théorème des

accroissements finis à h sur $]-\infty; x_0]$ entre x

$$\text{et } x_0 \text{ on a : } |h(x) - h(x_0)| \leq \frac{1}{2} |x - x_0|$$

comme $h(x_0) = x_0$, alors

$$|h(x) - x_0| \leq \frac{1}{2} |x - x_0|, \text{ d'où le résultat.}$$

Partie C

7) Démonstration

Raisonnons par récurrence.

- la proposition est vraie au 1^{er} rang car

$$U_0 = -1 \in]-\infty; x_0]$$

- supposons que $U_n \in]-\infty; x_0]$ et

démontrons que $U_{n+1} \in]-\infty; x_0]$

De la question 5), on a : $\forall x \in]-\infty; x_0]$,

$$h(x) \in]-\infty; x_0]$$

Or par hypothèse de récurrence, $U_n \in]-\infty; x_0]$.

Comme $U_{n+1} = h(U_n)$, alors $U_{n+1} \in]-\infty; x_0]$

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in]-\infty; x_0]$.

8) a. Démonstration.

De ce qui précède, on a :

$$\forall x \in]-\infty; x_0], |h(x) - x_0| \leq \frac{1}{2} |x - x_0|$$

Comme $U_n \in]-\infty; x_0]$, alors

$$|h(U_n) - x_0| \leq \frac{1}{2} |U_n - x_0| \text{ et } h(U_n) = U_{n+1},$$

$$\text{D'où } |U_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2} |U_n - x_0|.$$

b) Démonstration

Raisonnons par récurrence

- pour $n=0$, $U_0 = -1$

$$\text{on a : } -1 < x_0 < 0 \Rightarrow 0 < -x_0 < 1$$

$$\Rightarrow -1 < U_0 - x_0 < 0$$

$$\Rightarrow |U_0 - x_0| < 1 \leq \frac{1}{2} |U_0 - x_0|$$

La propriété est vraie au premier rang

- supposons que $|U_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - x_0|$

$$\text{et démontrons que } |U_{n+1} - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |U_0 - x_0|$$

De ce qui précède, on a : $2|U_{n+1} - x_0| \leq |U_n - x_0|$

Comme d'après l'hypothèse de récurrence

$$|U_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - x_0|, \text{ alors}$$

$$2|U_{n+1} - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - x_0|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 2|U_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - x_0|$$

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $|U_n - x_0| \leq$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - x_0|.$$

c) Dédution

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - x_0| = 0 \text{ car } 0 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\text{Comme } |U_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - x_0| \text{ alors}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = x_0$$

Nous pouvons conclure que (U_n) est convergente et converge vers x_0 .

Activité 5

1.) Justification

$$V_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t) dt$$

La fonction $t \mapsto t^n \ln(1+t)$ est définie et continue sur $[0,1]$. Par conséquent, elle admet de primitives sur cet intervalle et donc

$\int_0^1 t^n \ln(1+t) dt$ existe, soit V_n existe.

2.a.Démonstration

$$x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x+1 \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \ln(x+1) \leq \ln 2 \text{ (car } \ln \text{ est croissante)}$$

$$\Rightarrow 0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln 2 \text{ (car } \forall n \in \mathbb{N}^*, x^n \geq 0)$$

$$\text{Ainsi, } 0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln 2$$

De cette relation, on déduit que $\ln(x+1) \leq \ln 2$

Comme si $x \in [0,1]$, $x-1 \leq 0$ alors $(x-1)\ln(x+1)$.

b. Justification

$$V_{n+1} - V_n = \int_0^1 (t+1)t^n \ln(1+t) dt$$

De ce qui précède, $\forall t \in [0,1]$, $t^n \ln(1+t) \geq 0$ et $(t-1) \leq 0$

$$\text{Donc } t^n \ln(1-t) \times (t-1) \leq 0$$

$$\text{Soit } \int_0^1 (t+1)t^n \ln(1+t) dt \leq 0$$

Donc $V_{n+1} - V_n \leq 0$. Par conséquent la suite (V_n) est une suite décroissante

c) Dédution

$$\text{On a : } 0 \leq t^n \ln(1+t)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 0 dt \leq \int_0^1 t^n \ln(1+t) dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq V_n$$

Ainsi, v_n est minorée et décroissante. Par conséquent elle est convergente.

3.a) Dédution

$$\text{On a } 0 \leq V_n \text{ et } t^n \ln(1+t) dt \leq t^n \ln 2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 t^n \ln(1+t) dt \leq \int_0^1 t^n \ln 2 dt$$

$$\Rightarrow V_n \leq \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} + 1 \times \ln 2 \right]_0^1$$

$$\Rightarrow V_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$$

$$\text{Ainsi, } 0 \leq V_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$$

D'où le résultat.

b) Calculons la limite de (V_n)

$$0 \leq V_n \leq \frac{\ln 2}{n+1} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$$

Activité 6

1.a) Sens de variation de I_n

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+n+t} dt$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-t^2} \left(\frac{1}{2+n+t} - \frac{1}{1+n+t} \right) dt$$

On a $\forall t, e^{-t^2} > 0$

De plus $\forall t \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2+n+t > 1+n+t$

$$\Rightarrow \frac{1}{2+n+t} < \frac{1}{1+n+t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2+n+t} - \frac{1}{1+n+t} < 0$$

Soit $I_{n+1} - I_n < 0$

D'où (I_n) est décroissante.

b) Montrons que (I_n) est positive

$\forall n \in \mathbb{N}$, et $\forall t \in [0,1]$

$$\frac{e^{-t^2}}{1+n+t} > 0$$

Comme $0 < 1$ alors $\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+n+t} > 0$

D'où $I_n > 0$

c) Montrons

Il est clair que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in [0,1], 1+n+t \geq n+1$

$$\text{donc } \frac{1}{1+n+t} \leq \frac{1}{n+1} \quad (1)$$

de même $e^{-t^2} < 1 \quad (2)$

d'où on obtient en faisant $(1) \times (2)$

$$\frac{e^{-t^2}}{1+n+t} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Déduction

On obtient de ce qui précède que

$$\int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+n+t} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{n+1} dt$$

$$\Rightarrow I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Comme $I_n \geq 0$ alors on conclut que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

(I_n) est décroissante et bornée, d'où (I_n) est convergente.

2) a) Sens de variation de f

f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -e^{-x} + 1$$

Posons : $1 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\forall x \in [0,1], 1 - e^{-x} \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$ soit f est strictement croissante sur $[0,1]$

$f(0) = 0$ et $f(1) = e^{-1}$, on déduit que $f(x) > 0$

$\Leftrightarrow x \in]0,1[$ et $f(0) = 0$.

b. Sens de variation de g

$$g(x) = 1 - x - e^{-x} + \frac{x^2}{2} = -(e^{-x} + x + 1) + \frac{x^2}{2}$$

$$g(x) = -f(x) + \frac{x^2}{2}$$

g est dérivable sur $[0,1]$ et on a :

$$g'(x) = -f'(x) + x$$

$$g'(x) = f(x)$$

d'où $\forall x \in [0,1], g'(x) \geq 0$. Par conséquent, g est strictement croissante sur $[0,1]$

c) Etablissons l'encadrement

• De ce qui précède, on a : $f(x) \geq 0$ c'est-à-dire $e^{-x} \geq 1 - x$

soit $1 - x \leq e^{-x} \quad (1)$

• on a : $g(0) = 0$ et $g(1) = \frac{1}{2} - e^{-1} > 0$

donc $\forall x \in [0,1], g(x) \geq 0$

c'est-à-dire $1 - x + \frac{x^2}{2} \geq e^{-x}$

soit $e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} \quad (2)$

De (1) et (2), nous établissons que $\forall x \in$

$[0,1]$, on a : $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$

d) Déduction

On déduit de ce qui précède que $\forall t \in [0,1]$,

on a : $1 - t \leq e^{-t} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}$

Il est clair que si $t \in [0,1]$, $-t \in [-1,0]$ de même $-t^2 \in [-1,0]$, donc on déduit que

$$1 - t \leq e^{-t} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}.$$

e) Etablissons l'encadrement

il est clair que si $t \in [0,1]$

$$\frac{1}{2+n} \leq \frac{1}{1+n+t} \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Or } 1 - t \leq e^{-t} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}$$

$$\text{Donc } \frac{1-t}{2+n} \leq \frac{e^{-t}}{1+n+t} \leq \frac{1-t+\frac{t^2}{2}}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2+n} \int_0^1 (1-t) dt \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \int_0^1 \left(1-t + \frac{t^2}{2}\right) dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2(n+2)} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n+1)}$$

$$\text{On a } \frac{2}{3} < \frac{23}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3(n+1)} < \frac{23}{30(n+1)} \quad (\text{car } \frac{1}{n+1} > 0)$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2(n+2)} \leq I_n \leq \frac{23}{30(n+1)}$$

$$\text{On déduit de même que } \frac{2}{3(n+1)} \leq I_n$$

$$\text{Donc } \frac{2}{3(n+2)} \leq I_n \leq \frac{23}{30(n+1)}$$

$$\text{Puis } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

Activité 7

1. Calcul de I_1 et I_2

On a :

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t} dt = \left[\frac{2}{3} (1+t) \sqrt{1+t} \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} (2) \sqrt{2} - \frac{2}{3}$$

$$\text{D'où } I_0 = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}$$

$$\text{On a : } I_1 = \int_0^1 t \sqrt{1+t} dt$$

$$\text{Posons : } u(t) = t \text{ et } v'(t) = \sqrt{1+t}$$

$$\text{Alors } I = \left[\frac{2}{3} t(1+t) \sqrt{1+t} \right]_0^1 - \frac{2}{3} \int_0^1 (1+t)^2 dt$$

$$= \left[\frac{2}{3} t(1+t) \sqrt{1+t} \right]_0^1 - \frac{2}{3} \left[\frac{1}{5} (1+t)^5 \right]_0^1 = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 0 - \frac{2}{3} \left(\frac{8\sqrt{2}}{5} - \frac{2}{5} \right)$$

$$\text{Donc } I_1 = \frac{4+4\sqrt{2}}{15}$$

$$2. a) \forall t \in [0, 1], t^n \geq 0 \text{ pour } n > 0$$

$$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow \forall n > 0, t \times t^n \leq t^n$$

$$\text{Donc } \forall t \in [0, 1] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, t^{n+1} \leq t^n$$

$$b) \text{ On a : } \forall t \in [0, 1] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, t^{n+1} \sqrt{1+t} \leq t^n \sqrt{1+t} \text{ puisque les fonctions } t \mapsto t^n \sqrt{1+t}$$

$$\text{sont continues sur } [0, 1], \text{ alors on a : } \int_0^1 t^{n+1} \sqrt{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n \sqrt{1+t} dt, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\sqrt{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n \sqrt{1+t} dt, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Soit, } \forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} \leq I_n$$

$$\text{Par ailleurs } I_1 \leq I_0$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} \leq I_n; \text{ ce qui signifie que la suite } (I_n) \text{ est décroissante.}$$

$$3) 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{1+t} \leq \sqrt{2} \quad \forall t \in [0, 1] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } t^n \leq t^n \sqrt{2}$$

Puisque les fonctions $t \mapsto t^n \sqrt{1+t}$ sont positives sur $[0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors on a :

$$\int_0^1 t^n dt \leq \int_0^1 t^n \sqrt{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n \sqrt{2} dt$$

$$\text{Soit } \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \leq I_n \leq \sqrt{2} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

$$\text{Or } I_0 = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}$$

$$\text{On a bien } 1 \leq I_0 \leq \sqrt{2} \text{ c'est-à-dire}$$

$$\frac{1}{0+1} \leq I_0 \leq \frac{\sqrt{2}}{0+1}$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

4.a) Posons $f(t) = \sqrt{1+t}$, $t \in [0, 1]$ f est dérivable sur $[0, 1]$ et $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1+t}}$

$$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{1+t} \leq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2 \leq 1 \sqrt{1+t} \leq 2 \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{1+t}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc on a : } \forall t \in [0, 1], \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Soit } t \in [0, 1], \text{ on a } [t, 1]$$

Le théorème des inégalités des accroissements finis appliqué à f sur $[t, 1]$, nous donne :

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} (1-t) \leq f(1) - f(t) \leq \frac{1}{2} (1-t)$$

$$\text{Soit } \frac{1}{2\sqrt{2}} (1-t) \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2} (1-t)$$

$$\text{Or } \forall t \in [0, 1], \frac{1}{2\sqrt{2}} (1-t) \geq 0$$

$$\text{Donc on a : } \forall t \in [0, 1], 0 \leq \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \leq \frac{1}{2} (1-t)$$

$$\text{b) Dédisons que } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq I_n \leq$$

$$\frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

$$\forall t \in [0, 1] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a :}$$

$$0 \leq t^n \sqrt{2} - t^n \sqrt{2} - t^n \leq \frac{1}{2} t^n - \frac{1}{2} t^{n+1}$$

$$\text{Soit } \frac{1}{2} t^{n+1} - \frac{1}{2} t^n \leq t^n \sqrt{1+t} - t^n \sqrt{2} \leq 0$$

Ce qui donne successivement :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right) \leq I_n - \frac{\sqrt{2}}{n+1} \times \frac{1}{2} \left(\frac{n+1-n-2}{(n+1)(n+2)} + \frac{\sqrt{2}}{n+1} \right)$$

$$\leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{-1}{(n+1)(n+2)} + \frac{\sqrt{2}}{n+1} \right) \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)(n+2) > n^2$, d'où

$$\frac{-1}{(n+1)(n+2)} > \frac{-1}{n^2}$$

$$\text{Donc on a : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

c) Détermination de $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } \frac{n\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n} \leq nI_n \leq \frac{n\sqrt{2}}{n+1}$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\sqrt{2}}{n+1} = 1$$

$$\text{Donc } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = 1.}$$

Activité 11

1.a) Déterminons a et b

$\varphi(x) = e^{-x}(ax^2 + bx)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = e^{-x}[-ax^2 + (2a - b)x + b]$$

φ est solution de (E_1) si et seulement si pour tout réel x , $\varphi'(x) + \varphi(x) = e^{-x}(2x + 2)$ ce qui conduit à $e^{-x}(2ax + b) = e^{-x}(2x + 2)$

On déduit que **a=1 et b=2**.

b) Démonstration

$g - \varphi$ est solution de $(E_2) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (g - \varphi)'(x) + (g - \varphi)(x) = 0$

$$\Leftrightarrow g'(x) - \varphi'(x) + g(x) - \varphi(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow g'(x) + g(x) = \varphi'(x) + \varphi(x)$$

$\Leftrightarrow g'(x) + g(x) = e^{-x}(2x + 2)$, car φ est solution de (E_1) .

Donc g est solution de (E_1) .

c) Résolvons l'équation (E_2)

(E_2) est une équation de la forme $ay' + by = 0$ avec $a=b=1$ donc les solutions de (E_2) sont les fonctions $y_k(x) = ke^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$

Déduction

$g - \varphi$ est solution de $(E_2) \Leftrightarrow g$ est solution de (E_1) donc on a : $(g - \varphi)(x) = ke^{-x} \Rightarrow g(x) = \varphi(x) + ke^{-x}$.

soit $g(x) = (x^2 + 2x)e^{-x} + ke^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$

Les solutions de (E_1) sont donc les fonctions

$$y_k(x) = (x^2 + 2x + k)e^{-x} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

2) Démonstration

f étant solution de (E_1) , on a pour tout réel x ,

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 2x + k), k \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow k = 1$$

$$\text{D'où } f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}.$$

3) Limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)^2 e^{-x} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x}) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$$

4)a. Sens de variation de f

f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\text{on a : } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (-x^2 + 1)e^{-x}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $-x^2 + 1$

En posant $-x^2 + 1 = 0$ on obtient $x = -1$ ou $x = 1$

Donc $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $f'(x) < 0$ et $\forall x \in]-1, 1[$, $f'(x) > 0$.

Il en résulte que f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$ puis strictement croissante sur $[-1; 1]$.

b) Tableau de variation de f

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		$\circ$	$\circ$	
$f(x)$	$+\infty$	$\swarrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$
		0		0

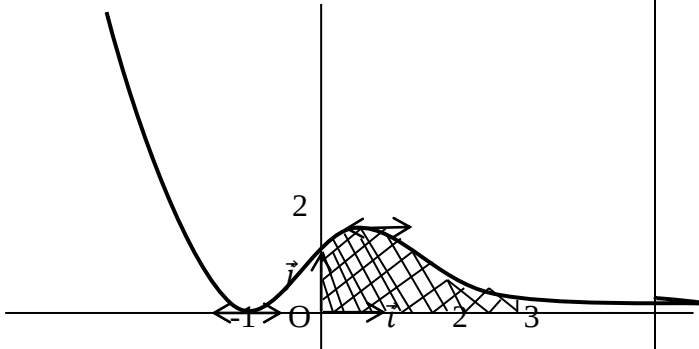
5) a. Branche infinies de (c)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe (c) au voisinage de $+\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

Donc la courbe (c) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

b. Construisons la courbe



6)a. Démonstration

F est une solution de l'équation différentielle (E₁), donc $f'(x) + f(x) = 2(x+1)e^{-x}$, ce qui conduit à $f(x) = 2(x+1)e^{-x} - f'(x)$.

b. Calculons L

posons : $u(x) = 2x+2$ et $v'(x) = e^{-x}$ on a :
 $u'(x) = 2$, prenons $v(x) = -e^{-x}$
 alors on a :

$$I = \int_0^{2\sqrt{2}} (2x+2)e^{-x} dx = 2 \int_0^{2\sqrt{2}} (x+1)e^{-x} dx$$

$$\text{soit } I = (-4\sqrt{2} - 4)e^{-2\sqrt{2}} + 4.$$

c) Dédution

soit A cette aire. On a :

$$A = \left(\int_0^{2\sqrt{2}} f(x) dx \right) \times 10000 \text{ cm}^2$$

De la question 6.a) on déduit que

$$\int_0^{2\sqrt{2}} f(x) dx = L - [f(x)]_0^{2\sqrt{2}}$$

$$= 5 - (13 + 8\sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}}$$

$$\text{Soit } A = (5 - (13 + 8\sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}}) \times 10000 \text{ cm}^2$$

Comme $10000 \text{ cm}^2 = 1 \text{ ha}$, alors

$$A = (5 - (13 + 8\sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}}) \text{ ha}.$$

7.a) Démonstration

$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = -x = 0$$

$\Leftrightarrow h(x) = 0$ avec $h(x) = f(x) - x$ h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = f'(x) - 1$

$$\forall x \in [1; +\infty[\left\{ \begin{array}{l} f'(x) \leq 0 \\ -1 < 0 \end{array} \right. \text{ donc } h'(x) < 0, \forall x$$

$\in [1; +\infty[$ il en résulte que h est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$; $h(1) = -1 + 4e^{-1} > 0$ et

$$h\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{25}{3}e^{-\frac{3}{2}} < 0$$

$h(1) \times h\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ donc l'équation $h(x) = 0$ admet dans $[1; +\infty[$ une unique solution α comprise entre 1 et $\frac{3}{2}$, d'où le résultat.

b) Démonstration

- f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$, donc $f\left(\left[1, \frac{3}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{3}{2}\right); f(1)\right]$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{25}{3}e^{-\frac{3}{2}} \approx 1,39 \text{ et } f(1) = \frac{4}{e} \approx 1,47$$

$$\text{On a donc } f\left(\left[1, \frac{3}{2}\right]\right) \subset \left[1; \frac{3}{2}\right].$$

$$\text{D'où } \forall x \in \left[1, \frac{3}{2}\right], f(x) \in \left[1, \frac{3}{2}\right], f(x) \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$$

- On a $|f'(x)| = (x^2 - 1)e^{-x}$

$$\forall x \in \left[1; \frac{3}{2}\right], x^2 - 1 \leq \frac{5}{4} \text{ et } e^{-x} \leq \frac{1}{e} \text{ d'où}$$

$$|f'(x)| \leq \frac{5}{4e}.$$

c)

De 7b) et à l'aide du théorème des inégalités des accroissements finis appliqué à la

fonction f sur $\left[1, \frac{3}{2}\right]$, on a :

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{5}{4e} |x - \alpha|$$

Comme $f(\alpha) = \alpha$, alors on a le résultat.

8)a. Démonstration

$$U_0 = 1 \text{ et } 1 \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

Supposons que pour tout $n \geq 0$; $U_n \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$ et

démontrons que $U_{n+1} \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$

$$U_{n+1} = f(U_n) \text{ et } U_n \in \left[1, \frac{3}{2}\right].$$

D'après la question 6.b), $U_{n+1} \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$.

En conclusion $U_n \in \left[1, \frac{3}{2}\right], \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Démonstration

En utilisant les résultats des questions 7.c) et 8.a), on a : $|f(u_n) - \alpha| \leq \frac{5}{4e}|U_n - \alpha|$, ce qui donne : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{4e}|U_n - \alpha|$. L'application de ce résultat donne :

$$|u_1 - \alpha| \leq \frac{5}{4e}|U_0 - \alpha|$$

$$|u_2 - \alpha| \leq \frac{5}{4e}|U_1 - \alpha|$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{5}{4e}|U_{n-1} - \alpha|$$

En multipliant membre à membre ces inégalités, on obtient après simplification :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{4e}\right)^n |U_0 - \alpha|.$$

On sait que $1 < \alpha < \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < U_0 - \alpha < 0$

$$\Rightarrow |U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{5}{4e}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4e}\right)^n$$

$$\text{D'où } |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4e}\right)^n.$$

NB : on peut également faire ici un raisonnement par récurrence comme nous l'avons fait dans l'activité 5.

c) Déduction

De ce qui précède, on a $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4e}\right)^n$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{4e}\right)^n = 0$, on déduit que la suite (u_n) converge vers α . Ainsi, la production annuelle de provende sera stabilisée à long terme à **10 α de tonnes**.

Activité 14

1) Montrons

Le montant qui s'ajoute au capital d'une année C_n est égal à 6% de 3000F c'est-à-dire $3000 \times \frac{6}{100} = 180F$

$$\text{D'où } C_{n+1} = C_n + 180$$

La suite C_n est donc une suite arithmétique de raison 180 et de premier terme $C_0 = 3000$.

2) Expression de C_n

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, C_n = C_0 + n \cdot r = 180n + 3000$$

$$\text{Soit } C_n = 180n + 3000.$$

3) Au bout de 10 ans, Yaovi disposera de $C_{10} = 3000 + 180 \times 10$.
Soit 4800f.

4) Résolution :

$$C_n \geq 2C_0 \Leftrightarrow n \geq \frac{3000}{180}$$

Comme $n \in \mathbb{N}$, on a $n \geq 17$.

Le capital de Yaovi aura donc doublé au bout de 17ans.

5) Réolvons $C_n \geq 10000$

$$C_n \geq 10000 \Leftrightarrow n \geq \frac{7000}{180}$$

comme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 39$.

Le capital de Yaovi aura donc atteint 10000 F au bout de 39ans.

Activité 15

Partie A

En désignant par U_n le prix du $n^{\text{ième}}$ mètre, $U_n = 100 + (n-1) \times 40$

Puis $U_1 + U_2 + \dots + U_n = 76800$ donne $n = 60$.

La réponse est donc une profondeur de 60m.

Partie B

1) Montrons que (P_n) est une suite géométrique

Une diminution de 4% se traduisant par

$$1 - \frac{4}{100} = 0.96$$

$$\text{On a donc } P_{n+1} = 0.96P_n$$

On déduit que P_n est donc une suite géométrique de raison 0,96.

2) Explications P_n

On déduit ce qui précède que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = 25000 \times 0.96^n$, ce qui permet de calculer $P_5 = 25000 \times 0.96^5 \approx 20384,32$.

3) Nous allons chercher pour quelle valeur de n on aura $P_n = 25000 \times (0.96)^n \leq 1500$

$$\text{On a : } (0.96)^n \leq \frac{3}{5}$$

$$\text{D'où } n \geq \frac{\ln(\frac{3}{5})}{\ln(0.96)} \approx 12.51$$

Comme $n \in \mathbb{N}$, on retrouve bien $n \geq 13$.

Activité 16

1) Démonstration

Pour tout entier naturel k de $[2; n]$, on a

$$v_k = \frac{1}{2} v_{k-1}, \text{ donc } (v_k) \text{ est une suite}$$

géométrique de n termes, de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme v_1 pour tout entier naturel k de $[2; n]$, on a $v_k = v_1 \times (\frac{1}{2})^{k-1}$.

2)a.

Le nombre total de voix réunies par les n candidats est la somme des n termes de cette suite géométrique.

$$S_n = v_1 \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}.$$

$$\text{Soit } S_n = 2v_1 [1 - (\frac{1}{2})^n]$$

$$\text{b) On a : } S_n < 2v_1 \Leftrightarrow v_1 > \frac{1}{2} S_n$$

donc le candidat placé au premier rang est élu au premier tour.

$$\text{3) On a : } S_n = 945 \text{ et } V_1 = 480$$

$$\text{Donc } 945 = 960 [1 - (\frac{1}{2})^n]$$

Soit $n = 6$.

Activité 17

1) Déterminons la raison de (U_n)

On a : $U_{10} = U_1 \cdot q^9$ et $U_6 = U_1 \cdot q^5$, en notant q la raison.

$$\text{Ainsi, } 81U_1 q^9 = 16U_1 q^5$$

Nous pouvons simplifier par U_1 et q^5 , ces deux réels étant non nuls, donc $81q^4 = 16 \Rightarrow$

$$q^4 = (\frac{2}{3})^4 \text{ d'où } q = \frac{2}{3} \text{ ou } q = -\frac{2}{3}$$

Mais nous devons retenir $q = \frac{2}{3}$, l'énoncé indiquant une raison strictement positive.

Explicitons U_n

$$U_n = q^{n-1} \cdot U_1$$

$$\text{soit } U_n = \frac{1}{2} (\frac{2}{3})^{n-1}$$

2) Calculons S_n

$$S_n = U_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{2}{3})^n}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$\text{Soit } S_n = \frac{3}{2} [1 - (\frac{2}{3})^n].$$

Limite de S_n

On sait que, si $|q| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} [1 - (\frac{2}{3})^n] = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{2}.$$

3) Calculons p_n

$$\text{Posons : } V_n = \ln(U_n)$$

$$\text{On a : } V_{n+1} = \ln(U_{n+1})$$

$$\text{Or } U_{n+1} = \frac{2}{3} U_n$$

$$\text{Donc } V_{n+1} = \ln(\frac{2}{3}) + \ln(U_n)$$

$$V_{n+1} = V_n + \ln(\frac{2}{3})$$

On en déduit que (V_n) est une suite arithmétique de raison $\ln(\frac{2}{3})$.

Ainsi, la somme S'_n :

$$S'_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n \text{ c'est à dire}$$

$$S'_n = \ln(U_1) + \ln(U_2) + \dots + \ln(U_n)$$

$$\text{donne : } S'_n = \frac{n(V_n + V_1)}{2}$$

$$S'_n = \frac{n}{2} [(n-3)\ln 2 - (n-1)\ln 3]$$

$$p_n = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$$

$$\text{Donc } \ln P_n = S'_n$$

$$\Rightarrow P_n = e^{S'_n}$$

$$\text{D'où } \boxed{P_n = e^{\frac{n}{2}[(n-3)\ln 2 - (n-1)\ln 3]}}$$

Limite de P_n

Il est évident que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 0$ car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} [(n-3)\ln 2 - (n-1)\ln 3] = 0$$

4) Calculons W_n

$$W_n = \frac{e^{S_n}}{P_n}$$

$$\text{Soit } W_n = e^{\frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right] - \frac{n}{2} [(n-3)\ln 2 - (n-1)\ln 3]}$$

Limite de W_n

$$\lim_{+\infty} W_n = +\infty$$

5) Déterminons u_n et q

u_0, u_1, u_2 étant trois termes consécutifs d'une suite géométrique, alors on a :

$$u_1^2 = u_0 \times u_2$$

$$\text{Ainsi } u_1^2 = \frac{25}{4} \text{ et } u_1 = \frac{5}{2} \text{ ou } -\frac{5}{2}$$

Envisageons $u_1 = \frac{5}{2}$, la première condition

$$\text{devient } u_0 + \frac{5}{2} = -\frac{13}{2}, \text{ soit } u_0 = -\frac{18}{2}$$

$$\text{Or } u_0 = \frac{1}{q} u_1, \text{ d'où } q = \frac{u_1}{u_0} = -\frac{5}{18}$$

Cette situation est à rejeter puisque la raison doit être positive.

Reprenons $u_1 = -\frac{5}{2}$, ce qui nous donne :

$$u_0 = -4 \text{ et } q = \frac{5}{8}.$$

b) calculons

$$S_{10} = u_0 + u_1 + \dots + u_9$$

$$S_{10} = u_0 \times \frac{1-q^{10}}{1-q},$$

$$\text{soit } S_{10} = -\frac{32}{3} \left[1 - \left(\frac{5}{8} \right)^{10} \right].$$

Activité 19

1) Calculons (U_n)

$$U_n = [-4e^{-\frac{x}{4}}]_{n-1}^n$$

$$\text{soit } U_n = 4(e^{\frac{1}{4}} - 1)e^{-\frac{n}{4}}.$$

2.a) Démonstration

$$u_{n+1} = 4(e^{\frac{1}{4}} - 1)e^{-\frac{n+1}{4}}$$

$$u_{n+1} = 4(e^{\frac{1}{4}} - 1)e^{-\frac{n}{4}}e^{-\frac{1}{4}}$$

$$\text{Soit } u_{n+1} = e^{-\frac{1}{4}}u_n$$

D'où u_n est une suite géométrique de raison

$$q = e^{-\frac{1}{4}} \text{ et } u_1 = 4 - 4e^{-\frac{1}{4}}.$$

b) Limite de u_n

$$\lim_{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4(e^{\frac{1}{4}} - 1)e^{-\frac{n}{4}}$$

$$\text{Soit } \lim_{+\infty} u_n = 0$$

2) Déterminons S_n

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$S_n = u_1 \times \frac{1 - e^{-\frac{n}{4}}}{1 - e^{-\frac{1}{4}}}$$

$$\text{Soit } S_n = 4 - 4e^{-\frac{n}{4}}$$

2^{ème} méthode

$$S_n = \int_0^1 e^{-\frac{x}{4}} dx + \int_1^2 e^{-\frac{x}{4}} dx + \dots + \int_{n-1}^n e^{-\frac{x}{4}} dx$$

En appliquant de façon successive la relation de Chasles, on obtient :

$$S_n = \int_0^n e^{-\frac{x}{4}} dx = [-4e^{-\frac{x}{4}}]_0^n \text{ soit } S_n = -4e^{-\frac{n}{4}} + 4$$

$$\text{Par suite, } \lim_{+\infty} S_n = 4.$$

4) a) Démonstration

$$V_n = \ln(u_n)$$

$$\text{Donc } V_{n+1} = \ln(U_{n+1})$$

$$\text{Or } u_{n+1} = e^{-\frac{1}{4}}u_n, \text{ donc } v_{n+1} = \ln e^{-\frac{1}{4}} \ln u_n$$

$$v_{n+1} = v_n - \frac{1}{4}, \text{ d'où } (v_n) \text{ est une suite}$$

$$\text{arithmétique de raison } -\frac{1}{4}.$$

b) Calculons w_n

$$w_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$w_n = \frac{n(v_1 + v_n)}{2}$$

$$\text{Soit } w_n = \frac{n}{2} \left[5\ln 2 - \frac{n}{4} + \ln(e^{\frac{1}{4}} - 1) \right].$$

Déduisons p_n

$$p_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$\ln(p_n) = \ln(u_1) + \ln(u_2) + \dots + \ln(u_n)$$

$$\text{Soit } \ln(p_n) = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$\text{Donc } \ln(p_n) = w_n$$

$$\text{D'où } p_n = e^{w_n}$$

$$p_n = e^{\frac{n}{2}[5\ln 2 - \frac{n}{4} + \ln(e^{\frac{1}{4}} - 1)]}$$

Séquence 14 : Statistiques

(pas corrigés)

SA n°3 : Lieux géométriques dans le plan

Séquences 1 & 2 : Isométries du plan- Applications affines

Activité 1

1) Démontrons que $S_{OA} \circ S_{OB} = S_{OB} \circ S_{OC}$.

$S_{OA} \circ S_{OB} = r(0; -\frac{4\pi}{3})$ et $S_{OB} \circ S_{OC} = r(0; -\frac{4\pi}{3})$. En conséquence,
 $S_{OA} \circ S_{OB} = S_{OB} \circ S_{OC}$.

2) Nature et les éléments caractéristiques de la transformation $S_{OA} \circ S_{OB} \circ S_{OC}$.

On a : $S_{OA} \circ S_{OB} = S_{OB} \circ S_{OC}$, donc $S_{OA} \circ S_{OB} \circ S_{OC} = S_{OB} \circ S_{OC} \circ S_{OC} = S_{OB}$ (car $S_{OC} \circ S_{OC} = \text{Id}$).

$S_{OA} \circ S_{OB} \circ S_{OC} = S_{OB}$, c'est donc la symétrie orthogonale S_{OB} d'axe (OB).

3) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques $S_{BC} \circ S_{AC}$ et $S_{BC} \circ S_{OA}$.

- $(AB) \cap (AC) = \{A\}$ et $2\text{mes}(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) = -\frac{2\pi}{3}$, d'où $S_{AB} \circ S_{AC}$ est la rotation de centre A et d'angle de rotation $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$.
- Soit $(BC) \cap (OA) = \{H\}$. On a $2\text{mes}(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{BC}) = \pi$, d'où $S_{BC} \circ S_{OA}$ est la symétrie de centre H.

NB : On peut aussi dire que c'est la rotation de centre H et d'angle π . Mais le terme adéquat est le premier.

4) Déterminons la nature et l'élément caractéristique de la transformation f

$$f = r(A, \frac{\pi}{3}) \circ r(B, \frac{\pi}{3}) \circ r(C, \frac{\pi}{3}).$$

On a $f(C) = A$ et comme $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$, alors f est la symétrie de centre G milieu de [AC].

Activité 2

1) Déterminons (Δ) telle que :

a) $S_{\Delta} \circ S_{AD} = t_{\overrightarrow{AB}}$

Soit I milieu de [AB] et J celui de [DC].

$t_{\overrightarrow{AB}} = t_{2\overrightarrow{AI}}$, d'où (Δ) = (IJ).

b) $S_{\Delta} \circ S_{BC} = t_{\overrightarrow{AB}}$

(Δ) est l'image de (BC) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

c) $S_{AD} \circ S_D = t_{\overrightarrow{AB}}$

(Δ) est l'image de (AD) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

2) Déterminons la nature et les caractéristiques des transformations :

a) $S_{OA} \circ S_{OB}$

$2\text{mes}(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA}) = \pi$, d'où $S_{OA} \circ S_{OB}$ est la symétrie centrale de centre O.

b) $S_{OA} \circ S_{OD}$

$2\text{mes}(\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{2}$, d'où $S_{OA} \circ S_{OD}$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

c) $S_{OA} \circ S_{OB} \circ S_{OC} \circ S_{OD}$

$S_{OC} \circ S_{OD} = \text{Id}$ car (OC) = (OD)

Ainsi, $S_{OA} \circ S_{OB} \circ S_{OC} \circ S_{OD} = S_{OA} \circ S_{OB}$

Comme $S_{OA} \circ S_{OB}$ est la symétrie centrale de centre O, alors cette transformation est la symétrie centrale de centre O.

3) Déterminons les applications suivantes :

a) $f = r(A, \frac{\pi}{4}) \circ r(B, \frac{\pi}{4})$

On a : $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, donc f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soit H le milieu de $[BC]$ et K celui de $[AD]$.

On a : $r(A; \frac{\pi}{4}) = S_{AH} \circ S_{AB}$ et $r(B; \frac{\pi}{4}) = S_{AB} \circ S_{BK}$

Ainsi, $f = S_{AH} \circ S_{AB} \circ S_{AB} \circ S_{BK} = S_{AH} \circ S_{BK}$.

Posons $\{P\} = (AH) \cap (BK)$

f est la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) $f = r(A; \frac{\pi}{2}) \circ r(B; \frac{\pi}{2})$

On a : $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, donc f est une symétrie centrale.

$r(A; \frac{\pi}{2}) = S_{AC} \circ S_{AB}$ et $r(B; \frac{\pi}{2}) = S_{AB} \circ S_{BD}$; donc $f = S_{AC} \circ S_{BD}$

D'où f est la symétrie centrale de centre I .

c) $f = r(A; \frac{\pi}{2}) \circ r(B; -\frac{\pi}{2})$

On a : $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$. Comme de plus $f(B) = D$, alors **f est la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.**

d) $f = t_{\overrightarrow{AB}} \circ r(B; \frac{\pi}{4})$

Il est clair que f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$ et (Δ') la bissectrice de l'angle $\widehat{CAD}$.

On a : $t_{\overrightarrow{AB}} = S_{\Delta} \circ S_{AD}$ et $r(B; \frac{\pi}{4}) = S_{AD} \circ S_{\Delta'}$

Ainsi, on $f = S_{\Delta} \circ S_{\Delta'}$

Par suite, **f est la rotation de centre Ω , point d'intersection de (Δ) et (Δ') et d'angle de rotation $\frac{\pi}{4}$.**

e) $f = t_{\overrightarrow{AB}} \circ r(I; \frac{\pi}{2}) \circ t_{\overrightarrow{CD}}$

Il est clair que f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

En décomposant ces isométries, on trouve que **f est la rotation de centre J , image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.**

f) $f = t_{\overrightarrow{AB}} \circ r(B; \frac{\pi}{2}) \circ t_{\overrightarrow{BA}}$

En décomposant ces isométries, on trouve que **f est la rotation de centre G , symétrique de A par rapport à B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.**

4) Démontrons que f est une identité.

$f = r(A; \frac{\pi}{2}) \circ r(B; \frac{\pi}{2}) \circ r(C; \frac{\pi}{2}) \circ r(D; \frac{\pi}{2})$

On a : $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi \Rightarrow 0 \text{ rad.}$

Comme de plus $f(D) = D$, alors f n'est pas une translation.

Par conséquent, f est la transformation identique.

Activité 3

1.) Déterminons la droite (Δ) telle que :

a) $r(A; \frac{\pi}{3}) = S_{\Delta} \circ S_{OA}$

Dans ce cas, (Δ) est la droite (OA)

b) $r(O; \frac{2\pi}{3}) = S_{\Delta} \circ S_{OA}$

Ici, (Δ) est la droite (OC) .

2) Déterminons les applications suivantes :

a) $f = r(B; \frac{\pi}{3}) \circ r(A; -\frac{\pi}{3})$

$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0$. Comme de plus $f(A) = D$ avec

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$, alors **f est la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.**

b) $f = r(O; \frac{2\pi}{3}) \circ r(C; \frac{\pi}{3})$

On a : $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$, donc f est une symétrie centrale.

Comme $f(C) = A$, alors **f est la symétrie centrale H milieu de $[AC]$.**

c) $f = r(A; \frac{\pi}{3}) \circ t_{\overrightarrow{AB}}$

Nous savons que f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$

Par ailleurs, $f(A) = C$. On en déduit que **le centre de cette rotation est le symétrique de B par rapport à O .**

d) $f = r(C; \frac{\pi}{3}) \circ r(B; \frac{\pi}{3}) \circ r(A; \frac{\pi}{3})$

La somme des angles de rotation donne π .

Comme f laisse invariant le point B , alors **f est la symétrie centrale de centre B .**

a) Démontrons que H est le symétrique de A par rapport à C .

Il revient à démontrer que $AC = CH$

ADC étant un triangle inscrit dans un cercle de diamètre [AD], alors (CD) est perpendiculaire à (AC).

Par ailleurs, $\text{mes}(\widehat{CDH}) = \frac{\pi}{6} = \text{mes}(\widehat{CAD})$, donc

AHD est un triangle isocèle en D.

(CD) étant la hauteur relative au sommet principal, on a : $AC=CH$, d'où H est le symétrique de A par rapport à C.

b) Déterminons f(A)

$$f = S_{BD} \circ S_C \circ S_{AB}$$

$$S_{AB}(A) = A \Rightarrow S_C \circ S_{AB}(A) = S_C(A) = H$$

$$H \in (BD), \text{ donc } S_{BD}(H) = H$$

$$\text{Ainsi, } f(A) = H.$$

Nature et les éléments caractéristiques de f

$$\text{On a : } S_{BD} \circ S_{DC} = r(D; -\frac{2\pi}{3}); S_{CA} \circ S_{AB} =$$

$$r(A; \frac{2\pi}{3}) \text{ et } S_{DC} \circ S_{CA} = r(C; \pi).$$

$$\text{Ainsi, on a : } f = S_{BD} \circ S_{DC} \circ S_{CA} \circ S_{AB}$$

$$\text{Soit } f = r(D; -\frac{2\pi}{3}) \circ r(A; \frac{2\pi}{3})$$

La somme des angles de rotation est nulle et comme $f(A) = H$, alors **f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AC}$.**

b) Nature de $S_{BD} \circ S_C$

$$S_{BD} \circ S_C = S_{BD} \circ S_{DC} \circ S_{AB} \circ S_{AB}$$

$$= t_{\overrightarrow{AH}} \circ S_{AB}$$

Comme (AH) n'est pas orthogonale à (AB), alors **$S_{BD} \circ S_C$ est une symétrie glissée.**

Activité 4

1. Images de A, B, C et D par f

$$f(A) = C; f(B) = D; f(C) = A \text{ et } f(D) = B.$$

2. Nature de f

f est la symétrie centrale de centre le point O.

3.a) Déterminons l'image de C par $r_2 \circ r_1$ puis donnons sa nature et son élément caractéristique

$$\text{On trouve } r_2 \circ r_1(C) = A$$

$r_2 \circ r_1$ est donc la symétrie de centre I milieu de [AC] car la somme des angles de rotations donne π .

b) Déterminons l'image de C par $r_3 \circ r_1$ puis donnons sa nature et son élément caractéristique

$$r_3 \circ r_1(C) = r_3(A) = D$$

Comme la somme des angles de rotations est nulle, alors $r_3 \circ r_1$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.

c) Déterminons la nature et l'élément caractéristique de $r_3 \circ r_2$

$r_3 \circ r_2(C) = r_3(A) = D$. Comme de plus la somme des angles de rotations est nulle, alors $r_3 \circ r_2$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

4) Précisons la nature et les éléments caractéristiques de $r_2 \circ r_1 \circ r_3$.

La somme des angles de rotations donne $\frac{\pi}{2}$.

Cette transformation est donc une rotation.

Par ailleurs, $r_1 = S_{AB} \circ S_{BD}; r_2 = S_{AC} \circ S_{AB}; r_3 = S_{AC} \circ S_{\Delta}$.

$$\text{Ainsi, } r_2 \circ r_1 \circ r_3 = S_{AC} \circ S_{AB} \circ S_{AB} \circ S_{BD} \circ$$

$$S_{AC} \circ S_{\Delta} = S_{AC} \circ S_{BD} \circ S_{AC} \circ S_{\Delta}$$

Les droites (AC), (BD) et (Δ) sont concourantes en O. D'où $r_2 \circ r_1 \circ r_3$ est la rotation de centre O et d'angle de rotation $\frac{\pi}{2}$.

Activité 6

1.a) Etudions les variations de la fonction u

$$u(x) = x^2 - 2\ln x$$

u est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, u'(x) = \frac{2x^2 - 2}{x}.$$

Puisque $x > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $u'(x)$ a le signe de $2x^2 - 2$. On en déduit que $u'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0; 1[$, $u'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]1; +\infty[$ et $u(1) = 0$. Il en résulte que u est strictement

décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

$$\text{On a: } \lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty.$$

On en déduit le tableau de variation ci – contre :

x	-1	0	$+\infty$
$u'(x)$		- 0 +	
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow \quad \nearrow$ 1	$+\infty$

b)Signe de $u(x)$

Du tableau de variation, on déduit que $u(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}_+^*$;

2.a)Etudions la continuité de f en $x_0=0$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2 - 2\ln x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2 - 2\ln x} = 0 = f(0),$$

donc f est continue à droite en 0.

Etudions la dérivabilité de f au point $x_0=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3 - 2x\ln x} = +\infty$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x\ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 - 2x\ln x = 0^+ \end{cases}$$

Il en résulte que f n'est pas dérivable à droite en 0.

b)Donnons une interprétation géométrique des résultats obtenus.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty, \text{ donc (c)admet}$$

en 0 une demi – tangente d'équation :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

c)Achevons l'étude des variations de f .

f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{-2x^2 + 2}{x(x^2 - 2\ln x)^2}$$

Pour $x \in]0; 1[$, $f'(x) > 0$; $\forall x \in]1; +\infty[$, $f'(x) < 0$ et $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Il en résulte que f est strictement croissante sur $]0; 1]$ puis strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

$$\text{On a: } \lim_{+\infty} f = 0 \text{ et } \lim_{0^+} f = 0$$

Le tableau de variations de f est le suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+ 0 -	
$f(x)$		$\nearrow \quad \searrow$ 1	0

d)Construisons la courbe (c).

Il faut étudier les branches infinies de (c) et construire la courbe.

3. a)Démontrer qu'il existe une droite Δ et un vecteur $\vec{u}$ non nul tels que $(\Gamma) = (t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta})(c)$

On a (Γ) :

$$\begin{cases} y > 2 \\ x = \frac{1}{(y-2)^2 - \ln(y-2)} + 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y > 2 \\ x = \frac{1}{(y-2)^2 - 2\ln(y-2)} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 2 \\ x = f(y-2) + 1 \end{cases}$$

f admet une bijection réciproque f^{-1} sur $[1; +\infty[$, car continue et strictement décroissante sur cet intervalle. Ainsi,

$$\begin{cases} y > 2 \\ x = f(y - 2) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 2 \\ y - 2 = f^{-1}(x - 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y > 2 \\ y = f^{-1}(x - 1) + 2 \end{cases}$$

On en déduit que (Γ) est l'image de (c^{-1}) par la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}(1; 2)$ où (c^{-1}) est la courbe représentative de f^{-1} . On a ainsi $(\Gamma) = t_{\vec{u}}(c^{-1})$. Or $(c^{-1}) = S_{\Delta}(c)$ où Δ est la droite d'équation $y = x$.

Donc $(\Gamma) = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$.

En conclusion, (Γ) est l'image de (c) par la composée $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ où $t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}(1; 2)$ et S_{Δ} la symétrie orthogonale d'axe Δ .

b) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$.

$\vec{u}'(1; 1)$ dirige Δ .

$\vec{u} \cdot \vec{u}' = 3$, donc $\vec{u}$ n'est pas un vecteur normal à Δ . Par conséquent $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ est une symétrie glissée.

Soit (D) l'axe de la symétrie glissée et soit $\vec{v}$ son vecteur.

Posons : $g = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$

On a : $t_{\vec{u}}: \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = x + 2 \end{cases}$ et $\Delta: \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

- Le vecteur $\vec{v}$ est $\vec{v} = \frac{1}{2} \overrightarrow{Og \circ g(0)}$

$$g \circ g(0) = B(3; 3)$$

Soit $\vec{v}(\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$.

- Soit $O' = g(0)$. On a : $O'(1; 2)$. $\vec{v}(\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$

dirige (D) et $J(\frac{1}{2}; 1)$ milieu de $[OO']$

appartient à (D) . On a :

$$(D): \begin{cases} x = t + \frac{1}{2} & (1) \\ y = t + 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \text{ donne : } x - y + \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{Soit } (D): x - y + \frac{1}{2} = 0$$

En conclusion, $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ est la symétrie glissée d'axe $(D): x - y + \frac{1}{2} = 0$ et de vecteur

$$\vec{v}(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}).$$

4) Trouvons une transformation qui permet de passer de la courbe (c) à la courbe (c') .

$$\text{On a : } g(x) = -f(-x + 2) + 5$$

$$g(x) = -f[-(x - 2)] + 5$$

Une analyse attentive de cette fonction permet d'arriver à la conclusion que la fonction f a d'abord été soumise à la translation t de vecteur $\vec{n}(2; -5)$ qui la transforme en $h(x) = f(x - 2) - 5$. Par suite, h a été soumise à la symétrie orthogonale d'axe $d = (OY)$ qui la transforme en $i(x) = f[-(x - 2)] - 5$. En fin, i a été soumise à la symétrie orthogonale d'axe $d' = (OX)$ qui la transforme définitivement en $g(x) = -i(x) = -f[-(x - 2)] + 5 = -f(-x + 2) + 5$.

Ainsi, $(c') = S_{d'} \circ S_d \circ t(c)$.

Or $d \perp d'$ et comme on est dans le plan, alors $S_{d'} \circ S_d = S_O$ où S_O est la symétrie centrale de centre O . Donc $(c') = S_O \circ t(c)$. S_O et t étant des transformations planes, alors $S_O \circ t(c)$ est une transformation plane.

En conclusion, (c') est l'image de (c) par la transformation plane $S_O \circ t$ où S_O est la symétrie centrale de centre O et t la translation de vecteur $\vec{n}(2; -5)$.

Activité 7

1.a) Déterminons le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \text{ avec :}$$

$$\mathcal{D}_1 = \{x \in \mathbb{R} - \{1\} \text{ tq } |x| - 1 \neq 0\} \text{ et}$$

$$\mathcal{D}_2 = \{1\}$$

$|x| - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$. On déduit que $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$$\text{D'où } \mathcal{D} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Réécrivons f

On a :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{-x-1} & \text{si } x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\\ \frac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{si } x \in [0; +\infty[\\ f(x) = -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

b) Etudions la continuité de f en 1

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 2) = -1 \end{aligned}$$

• On montrera de même que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$$

Comme :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -1,$$

alors on conclut que f est continue en 1.

Ensemble de continuité de f

☞ La fonction $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{-x-1}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$ en particulier sur $] -\infty; -1[\cup] -1; 0[$, comme étant une fonction rationnelle. (1)

☞ La fonction $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x-1}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0; 1[\cup]1; +\infty[$, comme étant une fonction rationnelle. (2)

☞ Comme la fonction f est de plus continue en 1, alors on conclut de (1) et (2) que f est continue en tout point de $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{-1\}$.

2.a) Etudions la dérivabilité de f en 1 et 0

Dérivabilité en 1

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} + 1}{x - 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{(x - 1)^2}{(x - 1)^2} \right) = 1 \end{aligned}$$

Comme $1 \in \mathbb{R}$, alors on déduit que f est dérivable à gauche en 1 et que $f'_g(1) = 1$.

• On démontre de même que f est dérivable à droite en 1 et que $f'_d(1) = 1$.

Comme $f'_g(1) = f'_d(1)$, alors on conclut que f est dérivable en 1.

Dérivabilité en 0

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\frac{x^2 - 3x + 2}{-x - 1} + 2}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x - 5}{-x - 1} \right) = 5 \end{aligned}$$

$5 \in \mathbb{R}$, donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 5$.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} + 2}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 - x}{x(x - 1)} \right) = 1. \end{aligned}$$

On déduit que f est dérivable à droite en 0

et $f'_d(0) = 1$.

Comme $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, alors on conclut que f n'est pas dérivable en 0.

Interprétation graphique des résultats

• De ce qui précède, on déduit que $(\mathcal{C})$ admet en $N(1; -1)$ une tangente (Γ) d'équation $y = x - 2$.

• $(\mathcal{C})$ admet à gauche en 0 puis à droite en 0 au point $M(0; -2)$ des demi-tangentes définies respectivement par :

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y = 5x - 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

b.) Ensemble de dérivabilité $\mathcal{E}$ de f.

De tout ce qui précède, comme f n'est pas dérivable en 0, alors on conclut que $\mathcal{E} = \mathcal{D} - \{0\} = \mathbb{R} - \{-1; 0\}$ puisque f est la réunion de deux fonctions rationnelles toutes dérivables en tout point de $\mathcal{D}$.

3.a) Calculons la dérivée première f' de f

f est dérivable sur $\mathcal{E}$ et on a :

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 5}{(x+1)^2}, \forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\\ f'(x) = 1, \forall x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

Signe de $f'(x)$

En étudiant le signe de chacune des dérivées de f , on obtient en résumé que :

$$\begin{cases} f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1 - \sqrt{6}[\\ f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1 - \sqrt{6}; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; +\infty[\\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{6} \end{cases}$$

b) Limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f &= +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1} f &= +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1} f = -\infty \end{aligned}$$

Tableau des variations de f

De tout ce qui précède, on déduit que f est strictement croissante sur $[-1 - \sqrt{6}; -1[\cup]-1; +\infty[$ puis strictement décroissante sur $] -\infty; -1 - \sqrt{6}]$.

x	$-1 - \sqrt{6}$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$- \quad \circ \quad +$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $5+2\sqrt{6}$ $\nearrow$ $+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

4.a) Etudions les branches infinies de $(\mathcal{C})$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = 4.$$

On déduit que la droite d'équation $y = -x + 4$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$.

• On démontre de même que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.

• La droite d'équation $x = -1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

b) Démonstration

Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, on a :

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

La fonction $x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ n'est pas définie en 1 et pour tout x différent de 1, on a :

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = x - 2.$$

Il en résulte que la fonction $x \mapsto x - 2$ est le prolongement par continuité de la

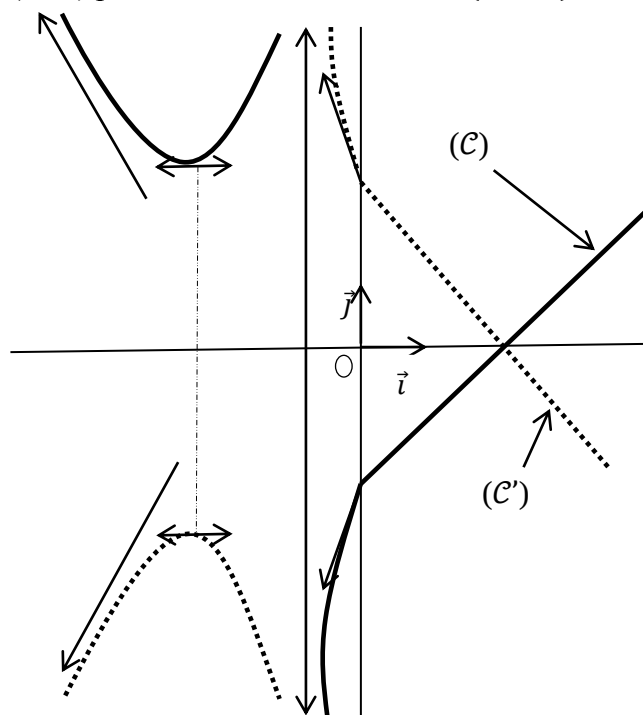
fonction $x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ en 1.

Dédution

La droite d'équation $y = x - 2$ étant asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$, et puisque sur l'intervalle $]0; +\infty[$, $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = x - 2$, alors $(\mathcal{C})$ est confondue avec cette asymptote sur $]0; +\infty[$.

Construction de $(\mathcal{C})$

L'étude des points remarquables nous permet de dire que $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses en $(2; 0)$ puis l'axe des ordonnées en $(0; -2)$.

**c) Justification**

On a : $f(x) = -g(x)$.

Les images d'un point quelconque d'abscisse x par les fonctions f et g étant opposées, alors

on déduit que $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Construction de $(\mathcal{C}')$: (voir graphique)

5.) a) Déterminons les coordonnées de A' et B'

$$\begin{cases} x_{A'} = 3 - y_A \\ y_{A'} = 1 + x_A \end{cases} \Rightarrow A'(2; 1)$$

$$\begin{cases} x_{B'} = 3 - y_B \\ y_{B'} = 1 + x_B \end{cases} \Rightarrow B(6; 3)$$

Vérification

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

$$\|\overrightarrow{A'B'}\| = \sqrt{(6-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{20}$$

$$\text{On a donc : } \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\| = \sqrt{20}$$

b) Justification

Par définition, on a :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\|^2 &= \|\overrightarrow{OA}\|^2 + \|\overrightarrow{OB}\|^2 \\ &\quad + 2\|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OB}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}}) \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OB}\| = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\|^2 - \|\overrightarrow{OA}\|^2 - \|\overrightarrow{OB}\|^2)}{\cos(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}})}$$

Comme $\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, et $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, alors on a :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OB}\| &= \sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) \cdot \frac{(\|\vec{u}\|^2 - \|\overrightarrow{OA}\|^2 - \|\overrightarrow{OB}\|^2)}{\cos(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}})} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On a :

$$\begin{cases} x_{\vec{u}} = x_{\overrightarrow{OA}} + x_{\overrightarrow{OB}} \\ y_{\vec{u}} = y_{\overrightarrow{OA}} + y_{\overrightarrow{OB}} \end{cases}$$

On déduit que $\vec{u}(2; -2)$.

De même, après calculs, on obtient $\vec{v}(2; -2)$.

c) Déduction

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}}) = \frac{(\|\vec{u}\|^2 - \|\overrightarrow{OA}\|^2 - \|\overrightarrow{OB}\|^2)}{2 \cdot \|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OB}\|}$$

On calcule et on trouve :

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}}) = -\frac{3}{2\sqrt{13}}.$$

Par ailleurs, r conserve les distances, donc on a : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{O'A'}\|$ puis $\|\overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{O'B'}\|$. On en déduit que $\cos(\widehat{\overrightarrow{O'A'}; \overrightarrow{O'B'}}) = -\frac{3}{2\sqrt{13}}$.

Montrons :

$$\text{On a : } \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}}) = \cos(\widehat{\overrightarrow{O'A'}; \overrightarrow{O'B'}}).$$

Comme de plus les angles $(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{O'A'}; \overrightarrow{O'B'}})$ sont des angles orientés indirects, alors on déduit que :

$$\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}}) = \text{mes}(\widehat{\overrightarrow{O'A'}; \overrightarrow{O'B'}}).$$

6. a) Prouvons que r est une isométrie positive (déplacement).

De la question 11.a), on déduit que r conserve les distances et de la question 11.c) r conserve les angles orientés, d'où r est un déplacement.

b) Déterminons l'ensemble des points invariants par r .

Un point $M(x; y)$ est laissé invariant par r si son image par r est M lui-même.

Nous devons résoudre $\begin{cases} x = 3 - y \\ y = x + 1 \end{cases}$

On obtient le singleton $\Omega(1 ; 2)$.

c) Dédution

L'unique déplacement laissant globalement invariant un seul point est la rotation de centre le point invariant, (à noter que la symétrie centrale est un cas particulier de la rotation). D'où r est la rotation de centre $\Omega(1 ; 2)$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} & \cos(\widehat{\overrightarrow{\Omega O} ; \overrightarrow{\Omega O'}}) \\ &= \frac{(\|\overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{\Omega O'}\|^2 - \|\overrightarrow{\Omega O}\|^2 - \|\overrightarrow{\Omega O'}\|^2)}{2 \cdot \|\overrightarrow{\Omega O}\| \cdot \|\overrightarrow{\Omega O'}\|} \\ &= \frac{(\|\overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{\Omega O'}\|^2 - 2\|\overrightarrow{\Omega O}\|^2)}{2\|\overrightarrow{\Omega O}\|^2} \\ &= \frac{(\sqrt{10})^2 - 2(\sqrt{5})^2}{2(\sqrt{5})^2} = 0 \end{aligned}$$

Comme de plus l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}})$ est un angle orienté direct, alors on déduit que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{2}$. Il en résulte que l'angle de rotation est $\frac{\pi}{2}$.

7.) Déterminons (τ).

($\mathcal{C}$) est l'ensemble des points définis par :

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{|x| - 1}$$

r est inversement définie par : $\begin{cases} y = 3 - x' \\ x = y' - 1 \end{cases}$

On déduit que $r\{(\mathcal{C})\}$ vérifie :

$$\begin{aligned} 3 - x' &= \frac{(y' - 1)^2 - 3(y' - 1) + 2}{|y' - 1| - 1} \\ \Rightarrow x' &= \frac{3|y' - 1| - 3 - y'^2 + 5y' - 6}{|y' - 1| - 1} \end{aligned}$$

En conclusion, (τ) est l'ensemble des points définis par :

$$x = \frac{3|y - 1| - y^2 + 5y - 9}{|y - 1| - 1}$$

Activité 8

1) Identification

a) $r \circ S \circ r^{-1}$

$S \circ r^{-1}$ est un antidéplacement (car composée d'un déplacement et d'un antidéplacement). Par conséquent $r \circ S \circ r^{-1} = r \circ (S \circ r^{-1})$ est un antidéplacement puisque r est un déplacement.

b) $S \circ r \circ S$

$r \circ S$ est un antidéplacement (car composée d'un déplacement et d'un antidéplacement), d'où $S \circ r \circ S = S \circ (r \circ S)$ est un déplacement puisque S est un antidéplacement.

c) $t \circ S \circ t^{-1}$

$S \circ t^{-1}$ est un antidéplacement (car composée d'un déplacement et d'un antidéplacement), d'où $t \circ S \circ t^{-1} = t \circ (S \circ t^{-1})$ est un antidéplacement puisque t est un déplacement.

d) $S \circ t \circ S$

$t \circ S$ est un antidéplacement (car composée d'un déplacement et d'un antidéplacement), d'où $S \circ t \circ S = S \circ (t \circ S)$ est un déplacement puisque S est un antidéplacement.

Prouvons maintenant ces résultats à partir de l'écriture simplifiée de ces transformations.

a) $r \circ S \circ r^{-1}$

$r \circ S \circ r^{-1} = S_{OK} \circ S_{OJ} \circ S_{OI} \circ S_{OI} \circ S_{OJ} = S_{OK}$
Ceci prouve que $r \circ S \circ r^{-1}$ est un antidéplacement.

b) $S \circ r \circ S$

$S \circ r \circ S = S_{OI} \circ S_{OK} \circ S_{OI} \circ S_{OI} = S_{OI} \circ S_{OK} = r(O ; -\frac{2\pi}{3})$ d'où $S \circ r \circ S$ est un déplacement.

c) $t \circ S \circ t^{-1}$

Il faut donner l'écriture simplifiée et trouver une symétrie orthogonale donc un antidéplacement.

d) $S_O \circ S$

Il faut donner l'écriture simplifiée et trouver une rotation, donc un déplacement.

2. Démontrons que :

a) $S_{MH} \circ S_{EN}$ et $S_{EMN} \circ S_{DS}$ sont des déplacements.

- $S_{MH} \circ S_{EN}$ est la rotation de centre le point d'intersection de (MH) et de (EN). C'est donc un déplacement.
- (DS) est orthogonale à (EMN). Donc $S_{EMN} \circ S_{DS}$ est la symétrie de centre leur point d'intersection. D'où il s'agit d'un déplacement.

b) $S_{MN} \circ S_{DT} \circ S_{AS}$ et $S_{EMN} \circ S_{AST} \circ S_{AEM} \circ S_{EHN}$ sont des antidéplacements.

- $S_{DT} \circ S_{AS}$ est une translation dont le vecteur est un vecteur directeur de (MS).

On est donc en présence d'une symétrie glissée, d'où un antidéplacement.

- $S_{EMN} \circ S_{AST}$ est le demi-tour d'axe OO' où O est milieu de [EM] et O' celui de [HN]. $S_{AEM} \circ S_{EHN}$ est le demi-tour d'axe [EM]. Il en résulte que cette transformation est la symétrie orthogonale d'axe perpendiculaire aux droites (OO') et (EM). C'est donc un antidéplacement.

3. Déterminons les isométries

a) Il s'agit de la symétrie orthogonale d'axe (OR).

b) Il s'agit de la rotation de centre O et d'angle de rotation $\frac{2\pi}{3}$.

c) On est en présence d'une symétrie orthogonale d'axe (OK).

4. a) Vérifions que les transformations Id , S_L , S_A et $S_{A'}$ appartiennent à (E).

Les images du quadruplet de points (A,B,C,D) par les transformations Id , S_O , S_A et $S_{A'}$ sont respectivement : (A, B, C, D) ; (C,D,A,B) ; (B,A,D,C) et (D,C,B,A).

Le rectangle ABCD est donc globalement invariant par ces isométries. D'où elles appartiennent à (E).

b) Dressons le tableau des composées des éléments de (E).

$\circ$	Id	S_O	S_A	$S_{A'}$
Id	Id	S_O	S_A	$S_{A'}$
S_O	S_O	Id	$S_{A'}$	S_A
S_A	S_A	$S_{A'}$	Id	S_O
$S_{A'}$	$S_{A'}$	S_A	S_O	Id

c) Déduisons de ce tableau que (E) est un groupe de transformations.

On remarque de ce tableau que :

- ✓ la composée de deux éléments de (E) est un élément de (E).
- ✓ la réciproque de tout élément de (E) est un élément de (E).

(E) donc un groupe de transformation.

Activité 9

1. Démonstration

Soit S une symétrie orthogonale laissant globalement invariant le triangle ABC. La symétrie S conserve l'isobarycentre, donc O est invariant par S. Ainsi, O appartient à l'axe de S. L'image d'un sommet est un sommet, le point A a donc pour image soit A, soit B, soit C. Ces trois cas correspondent respectivement à $S = S_{OA}$, $S = S_{OC}$ et $S = S_{OB}$, d'où le résultat.

2. Démonstration

Soit f une rotation laissant globalement invariant le triangle ABC. La rotation f

conserve l'isobarycentre, donc O est invariant par f. Ainsi, O est le centre de f (si $f \neq \text{Id}$).
L'image d'un sommet est un sommet, le point A a donc pour image soit A, soit B, soit C. Ces 3 cas correspondent respectivement à $f=\text{Id}$, $f=r$ et $f=r^{-1}$.

3. Dressons le tableau des composées de (E)

	Id	r	r^{-1}	S_{OA}	S_{OB}	S_{OC}
Id	Id	r	r^{-1}	S_{OA}	S_{OB}	S_{OC}
r	r	r^{-1}	Id	S_{OC}	S_{OA}	S_{OB}
r^{-1}	r^{-1}	Id	r	S_{OB}	S_{OC}	S_{OA}
S_{OA}	S_{OA}	S_{OB}	S_{OC}	Id	r	r^{-1}
S_{OB}	S_{OB}	S_{OC}	S_{OA}	r^{-1}	Id	r
S_{OC}	S_{OC}	S_{OA}	S_{OB}	r	r^{-1}	Id

Déduction

D'après le tableau ci-joint, (E) est stable par composition et par passage à l'inverse, c'est donc un groupe de transformation du plan.

Activité 11

1.a) Déterminons f(A), f(B)

On a $f(A)=B$ et $f(B)=C$.

Déduction

$S_{(IK)}$ étant un antidéplacement et $r_{(A, \frac{\pi}{2})}$ un déplacement, alors $S_{(IK)} \circ r_{(A, \frac{\pi}{2})}$ est un antidéplacement.

f étant un antidéplacement, alors elle est soit une symétrie orthogonale soit une symétrie glissée.

Supposons que f est une symétrie orthogonale. Donc si $f(A)=B$, alors $f(B)=A$. Or $f(B)=C$ et $C \neq A$, donc f n'est pas une symétrie orthogonale. Elle est donc une symétrie glissée.

b) Déterminons f(I) et déduisons-en la forme réduite de f.

$f(I)=J$.

D'après 1.a) on pose $f = t_{\vec{u}} \circ S_{(IJ)}$

$$f(I)=J \Rightarrow t_{\vec{u}} \circ S_{(IJ)}(I)=J \Rightarrow t_{\vec{u}}(I)=J \Rightarrow \vec{u} = \vec{IJ}$$

$$\text{Soit } f = t_{\vec{IJ}} \circ S_{(IJ)}$$

2. Déterminons g(A) et g(B)

$g(A)=D$ et $g(B)=A$

Déduction

g est un antidéplacement car composée d'un antidéplacement et d'un déplacement. Puisque g est ainsi, supposons qu'elle est une symétrie orthogonale.

On a : $g(B)=A \Rightarrow g(A)=B$. Or $g(A)=D$ et $D \neq B$, donc g est une symétrie glissée.

Précisons l'axe et le vecteur.

$g(A)=D$ et $g(B)=A$, donc les points L et I, milieux respectifs de [AD] et [AB] appartiennent à l'axe.

D'où l'axe de g est (LI).

$$g(I)=L \Rightarrow t_{\vec{u}} \circ S_{(LI)}(I)=L \Rightarrow \vec{u} = \vec{IL}$$

$\vec{IL}$ est donc le vecteur de g.

3) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

$$a) f_1 = r_{(A, -\frac{\pi}{2})} \circ S_{(IK)}$$

$$f_1 = [S_{(IK)} \circ r_{(A, \frac{\pi}{2})}]^{-1} ; S_{(IK)} \circ r_{(A, \frac{\pi}{2})} = f =$$

$$t_{\vec{IJ}} \circ S_{(IJ)}, \text{ donc } f_1 = [t_{\vec{IJ}} \circ S_{(IJ)}]^{-1}$$

$$\text{Soit } f_1 = S_{(IJ)} \circ t_{\vec{IJ}}$$

D'où f_1 est une symétrie glissée d'axe (IJ) et de vecteur $\vec{IJ}$

$$b) f_2 = S_{(IK)} \circ r_{(A, -\frac{\pi}{2})}$$

$$f_2 = g^{-1} = S_{(LI)} \circ t_{\vec{IL}}$$

D'où f_2 est une symétrie glissée d'axe (IL) et de vecteur $\vec{IL}$.

c) g of

$g \circ f$ donne $r(A; \pi)$. Il s'agit donc de la symétrie centrale de centre A.

4.a/b) Déterminons $f \circ g(B)$ et $f \circ g(E)$.

On trouve $f \circ g(B) = B$ et $f \circ g(E) = J$.

c) Dédisons-en la nature et les éléments caractéristiques de $f \circ g$.

$f \circ g$ est une rotation de centre O et d'angle π .
C'est donc la symétrie centrale de centre O.

Activité 12

1. a) Démontrons que : $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{OI}$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\ \Rightarrow \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{OI}$$

Déduction

La droite (OI) est la médiatrice de [BC],
donc $(AM) \perp (BC)$

b) Démontrons que les points M et H sont confondus.

On a de même $(BM) \perp (AC)$ et $(CM) \perp (AB)$,
donc M est l'orthocentre du triangle ABC.
Soit M et H sont confondus.

2.a) Déterminons $f(P)$

$$f(P) = t_{\overrightarrow{HA}}(S_{(BC)}(P)) = t_{\overrightarrow{HA}}(H) = A$$

$$f(P) = A$$

b) Déterminons Δ

$$\text{D'après 1.a), } \overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{OI}$$

Soit Δ la parallèle à (BC) passant par O.

$$\text{On a : } t_{\overrightarrow{HA}} = S_{(\Delta)} \circ S_{(BC)}$$

c) Déduction

On déduit de a) et b) que $f = S_{(\Delta)}$.

Or le cercle (Γ) est globalement invariant par $S_{(\Delta)}$, donc P appartient au cercle (Γ).

Nous venons d'établir le théorème suivant :

« Dans un triangle, le symétrique de l'orthocentre par rapport à l'un des côtés appartient au cercle circonscrit ».

Activité 13

1. Démontrons que $r \circ r^{-1} = r'^{-1} \circ r^{-1} = S_K$

$r \circ r'$ est la composée de deux quarts de tour directs, c'est donc une symétrie centrale. De plus, $r \circ r'(F) = D$, donc $r \circ r' = S_K$.

$r'^{-1} \circ r^{-1}$ est la composée de deux quarts de tour indirects ; c'est donc une symétrie centrale. De plus, $r'^{-1} \circ r^{-1}(D) = F$, donc $r'^{-1} \circ r^{-1} = S_K$

$$\text{Ainsi, } r \circ r^{-1} = r'^{-1} \circ r^{-1} = S_K$$

2) Déterminons $S_K(AH)$

L'image de (AH) par r' est la perpendiculaire à (AH) et passe par $r'(A) = C$; donc $r(AH) = BC$.
De même, $r(BC) = AH$.

On a ainsi $S_K(AH) = AH$.

Déduction

Les points A, H et K sont donc alignés.

3.a) Démontrons que $r(C) = A'$

$$\text{On a : } r \circ r'(A) = A' \Rightarrow r(C) = A'.$$

Déduction

La rotation r applique (C ; E) sur (A' ; B'),
donc $(EC) \perp (A'B)$.

b) Démontrons que $(BG) \perp (A'C)$

On a : $r'^{-1} \circ r^{-1}(A) = A' \Rightarrow r'^{-1}(B) = A'$. La rotation r'^{-1} applique (B ; G) sur (A' ; C), donc $(BG) \perp (A'C)$.

Déduction

Les droites (EC), (BG) et (AH) sont les trois hauteurs du triangle $A'BC$; elles sont donc concourantes.

Activité 14

1. Expression analytique de φ

Soit $M(x; y)$ un point du plan et $M'(x'; y')$ son image par φ . Soit $H(x_H; y_H)$ le projeté de M sur (D) suivant (Δ).

$$\text{On a : } \overrightarrow{M'H} = 2\overrightarrow{MH}$$

Déterminons H

$$H \in (D), \text{ donc } x_H - y_H + 1 = 0$$

$(HM) \parallel (\Delta)$, donc on a : $\overrightarrow{MH} = \alpha \vec{u}$ avec α un réel et $\vec{u}(2; 1)$ un vecteur directeur de (Δ).

Ainsi, on a :
$$\begin{cases} x_H = 2\alpha + x \\ y_H = \alpha + y \\ x_H - y_H + 1 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant les deux premières lignes dans la troisième, on trouve : $\alpha = -x + y - 1$.

Ainsi, on a :
$$\begin{cases} x_H = -x + 2y - 2 \\ y_H = -x - 2y - 1 \end{cases}$$

Etablissons l'expression analytique de φ

On a : $\overrightarrow{M'H} = 2\overrightarrow{MH} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2x - x_H \\ y' = 2y - y_H \end{cases}$

D'où
$$\varphi : \begin{cases} x' = 3x - 2y + 2 \\ y' = x + 1 \end{cases}$$

2) Déterminons les images par cette affinité des droites suivantes:

a) $(\Delta_1): x = 0$

$\varphi(\Delta_1) = \Delta'$ d'équation : $y = 1$

b) $(\Delta_2): y = 3$

De l'expression analytique de φ , on a :

$y = \frac{2+3x-x'}{2} = \frac{2+3(y'-1)-x'}{2}$. Ainsi, $y = 3 \Leftrightarrow$

$\frac{2+3(y'-1)-x'}{2} = 3 \Leftrightarrow -x' + 3y' - 7 = 0$

Soit $\varphi(\Delta_2) = \Delta'$ d'équation $x + 3y - 7 = 0$

c) $(\Delta_3): 2x - y + 1 = 0$

On a :
$$\begin{cases} x = y' - 1 \\ y = \frac{1}{2}(-x' + 3y' - 1) \end{cases}$$

Ainsi, $2x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(y' - 1) -$

$\frac{1}{2}(-x' + 3y' - 1) = 0$.

$\Leftrightarrow x' + y' - 1 = 0$

Soit $\varphi(\Delta_3) = \Delta'$ d'équation $x + y - 1 = 0$.

3) Déterminons l'image (Γ) du cercle (c) de centre I(-1 ; 2) et de rayon $r = \sqrt{3}$

Le cercle (c) a pour équation :

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 3$.

$\varphi(c) = (\Gamma) \Leftrightarrow (y' - 1 + 1)^2 + \left[\frac{1}{2}(-x' + 3y' - 1) - 2\right]^2 = 3 \Leftrightarrow x'^2 + 13y'^2 + 10x' - 30y' - 6x'y' + 13 = 0$

Soit $(\Gamma): x^2 + 13y^2 + 10x - 30y - 6xy + 13 = 0$.

4. Démontrons que f est une affinité par rapport à une droite (D) de direction $\vec{\delta}$ et de rapport k.

Il revient à montrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite, et que si $f(M) = M'$ (si $M \neq M'$), le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.

Déterminons l'ensemble des points invariants par f

On a f :
$$\begin{cases} x' = -x - 2y + 2 \\ y' = -x + 1 \end{cases}$$

$f(M) = M(x; y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x - 2y + 2 \\ y = -x + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x + y - 1 = 0$

L'ensemble des points invariants par f est la droite (D) : $x + y - 1 = 0$ (1)

Montrons que $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.

$\overrightarrow{MM'} = (x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j} = (-x - 2y + 2 - x)\vec{i} + (-x + 1 - y)\vec{j}$

$\overrightarrow{MM'} = (-x - y + 1)(2\vec{i} + \vec{j})$

Posons : $-x - y + 1 = \alpha$ et $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$

On a : $\overrightarrow{MM'} = \alpha \vec{u}$.

Donc $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe qui est celle de $\vec{u}$ (2).

De (1) et (2), on conclut que f est une affinité du plan.

Eléments caractéristiques de f

Soit H(X ; Y) le projeté de M sur (D) suivant (Δ) dirigée par $\vec{u}(2; 1)$.

On a : $H \in (D)$ et $(HM) // (\Delta)$ donc :

$$\begin{cases} X = x + 2\alpha \\ Y = y + \alpha \\ X + Y - 1 = 0 \end{cases}$$
 . En remplaçant les 2 premières lignes dans la dernière, on trouve $\alpha = \frac{1}{3}(-x - y + 1)$.

On obtient ensuite H :
$$\begin{cases} X = \frac{1}{3}(x - 2y + 2) \\ Y = \frac{1}{3}(-x + 2y + 1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{HM'} \begin{cases} x' - X = \frac{1}{3}(-4x - 4y + 4) \\ y' - Y = \frac{1}{3}(-2x - 2y + 2) \end{cases} \text{ et}$$

$$\overrightarrow{HM} \begin{cases} x' - X = \frac{1}{3}(2x + 2y - 2) \\ y' - Y = \frac{1}{3}(x - y - 1) \end{cases}$$

On remarque que $\overrightarrow{HM'} = -2\overrightarrow{HM}$, d'où f est l'affinité de rapport $k = -2$, de direction $\vec{u}(2; 1)$ et d'axe $x + y - 1 = 0$.

NB :

On peut rapidement déterminer k par calcul.

On a par définition :

$$k = \frac{x' + y' - 1}{x + y - 1} = \frac{-x - 2y + 2 - x + 1 - 1}{x + y - 1} = \frac{-2x - 2y + 2}{x + y - 1} = -2$$

On a donc $k = -2$.

Activité 15

1) Déterminons l'expression analytique de f.

L'expression analytique de f est sous la

$$\text{forme : } \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

L'application vectorielle φ qui lui est associée est définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = a'x + b'y \end{cases}$$

$$\text{On a : } \varphi(\vec{u}) = \vec{u} \Rightarrow \begin{cases} 1 = a + 2b \\ 2 = a' + 2b' \end{cases}$$

$$\varphi(\vec{v}) = -\frac{1}{2}\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} = a + b \\ -\frac{1}{2} = a' + b' \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, on a : } \begin{cases} a + 2b = 1 \\ a + b = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a' + 2b' = 2 \\ a' + b' = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{On trouve } a = -2; b = \frac{3}{2}; a' = -3 \text{ et } b' = -\frac{5}{2}$$

Par ailleurs, $f(A) = A$, donc

$$\begin{cases} 0 = b + c \\ 1 = b' + c' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -b \\ c' = 1 - b' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -\frac{3}{2} \\ c' = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

L'expression analytique de f est donc :

$$f : \begin{cases} x' = -2x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2} \\ y' = -3x + \frac{5}{2}y - \frac{3}{2} \end{cases}$$

2) Déterminons l'ensemble des points invariants par f.

L'ensemble des points invariants par f est la droite (D) : $2x - y + 1 = 0$.

3.a) Démontrons que $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe que l'on précisera

$$\overrightarrow{MM'} = (x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j} = \left(-3x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}\right)\vec{i} + \left(-3x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}\right)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{MM'} = \alpha(\vec{i} + \vec{j}) \text{ avec } \alpha = -3x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}$$

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a donc une direction fixe qui est celle de $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.

b) Déduisons-en les éléments caractéristiques de f.

L'ensemble des points invariants par f étant une droite et puisque si $f(M) = M'$, on a $\overrightarrow{MM'}$ qui a une direction fixe, alors f est une affinité du plan.

$$\text{Le rapport k est : } k = \frac{2x' - y' + 1}{2x - y + 1} = -\frac{1}{2}$$

En conclusion, f est l'affinité de rapport $k = -\frac{1}{2}$, d'axe (D) : $2x - y + 1 = 0$ et de direction celle de $\vec{v}(1; 1)$.

4) Vérifions si g est une application affine.

Posons : $z = x + iy$; $z' = x' + iy'$

On a : $x' + iy' = i(x - iy) + 2 - i$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = y + 2 \\ y' = x - 1 \end{cases}$$

L'expression analytique de g est celle d'une application affine, d'où **g est une application affine.**

b) Calculons OM et O'M'

$$g(O) = O' \Leftrightarrow O'(2; -1)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad OM &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \bullet \quad O'M' &= \sqrt{(x' - 2)^2 + (y' + 1)^2} \\ &= \sqrt{(y + 2 - 2)^2 + (x - 1 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Soit } O'M' = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Déduction

On a : $OM = O'M'$

g conserve donc la distance, d'où elle est une isométrie.

c) Démontrons que f est un antidéplacement.

g étant une isométrie, alors elle est un antidéplacement si

- ☞ l'ensemble des points invariants par g est une droite.
- ☞ ou que si g n'admet pas de points invariants et que pour tout point M d'image M', si O' est l'image de O, on n'a pas toujours $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OO'}$.
- g n'admet pas de points invariants car si $g(M) = M$, on a $\begin{cases} x = y + 2 \\ y = x - 1 \end{cases}$ (absurde) (1)
- $\overrightarrow{OO'}(2; -1)$ et $\overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} -x + y + 2 \\ x - y - 1 \end{pmatrix}$

Posons : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OO'}$.

$$\text{On a : } \begin{cases} -x + y + 2 = 2 \\ x - y - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - y = 0$$

Ainsi, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OO'}$ dans le cas exceptionnel où $x = y$. Autrement, on n'a pas toujours

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OO'}$ puisque x n'est pas toujours égal à y. (2)

De (1) et (2), on conclut que g est un antidéplacement.

Explication de la démonstration

- ✓ g étant une isométrie, alors si l'ensemble des points invariants par g est une droite, g est d'office une réflexion plane donc un antidéplacement.
- ✓ Si l'ensemble des points invariants par g est l'ensemble vide, alors g n'est pas une réflexion plane, ni une rotation. Elle peut être alors une translation ou une symétrie glissée. Si elle est une translation, alors pour tout point M d'image M' et si O' est l'image de O, alors on doit toujours avoir : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OO'}$. Tel n'est pas le cas ici. g n'est donc pas une translation. Elle est par conséquent une symétrie glissée et donc un antidéplacement.

Remarque

Cette manière n'est pas la plus intuitive pour faire la preuve. On pourrait aussi simplement partir de la définition de base d'un antidéplacement en montrant que g conserve la distance c'est-à-dire que pour tous points A et B d'images A' et B' par g, on a : $AB = A'B'$ et que g transforme tout angle orienté en son opposé c'est-à-dire que :

$$mes(\widehat{AOB}) = -mes(\widehat{A'O'B'})$$

où O' est l'image de O par g.

Éléments caractéristiques de g

g est une symétrie glissée. Elle peut être décomposée comme : $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$.

Déterminons $t_{\vec{u}}$

$$g \circ g = t_{\vec{u}} : \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

On en déduit que $\vec{u}(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

Déterminons S_{Δ}

$$g \circ t_{-\vec{u}} = S_{\Delta} \text{ donne : } \begin{cases} x' = y + \frac{3}{2} \\ y' = x - \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$M \in (\Delta), \text{ donc } S_{\Delta}(M) = M \Rightarrow \begin{cases} x = y + \frac{3}{2} \\ y = x - \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Soit } (\Delta) : x - y - \frac{3}{2} = 0.$$

Conclusion

g est la symétrie glissée d'axe (Δ) :

$$x - y - \frac{3}{2} = 0 \text{ et de vecteur } \vec{u}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Activité 17

1.a) Déterminons les images par f du point D, de la droite (AD) et du plan (P).

On a : $(AB) \parallel (DC)$ et $f(AB) = AD$. Donc $f(DC)$ doit donner une droite parallèle à (AD) .

Comme $f(C) = D$, alors $f(D) = A$.

Ainsi, $f(AD) = \{A\}$ et $f(P) = (AD)$.

b) Démontrons que $f \circ f$ est une application constante.

$f \circ f(A, B, C, D) = (A, A, A, A)$, d'où $f \circ f$ est une application constante.

2.a) Précisons la nature et les éléments caractéristiques de l'application $g \circ f$.

$$g \circ f(A, B, C, D) = (A, B, B, A).$$

On en déduit que $g \circ f$ est la projection sur (AB) suivant la droite (BC) .

b) Construction de l'image par f d'un point quelconque M de (P).

Nous ne connaissons pas la nature précise de f , donc pour la construction, il est, au préalable, nécessaire d'opérer des transformations.

On a : $g \circ f = p \Rightarrow f = g^{-1} \circ p$. Or $g^{-1} = g$, donc $f = g \circ p$.

Ainsi, pour construire l'image M' d'un point M du plan, on peut :

- ✓ Construire l'image N de M par p

- ✓ Construire l'image M' de N par g .

Activité 18

1) Déterminons l'ensemble des points invariants par f .

L'ensemble des points invariants par f est la droite (D) d'équation : $y = 2x$. Au fait $(D) = (AE)$ avec E le point tel que $\vec{BE} = 2\vec{AC}$

2) Dédution

On a $(D) : y = 2x$ et $(BC) : y = -x + 1$

Donc $(D) \cap (BC)$ est le point $G\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. On en

déduit que : $\vec{GB} = -2\vec{GC}$

3) Démonstration

D'après 2, on a : $\vec{GD} = -2\vec{GB}$, donc f est une affinité d'axe (AG) , de direction celle de (BD) et de rapport $k = -2$.

4. Expression analytique de g

Soit $M(x; y)$ un point du plan d'image $M'(x'; y')$.

On a : $\vec{n} = \|\vec{n}\| \vec{e}_1$. En posant $\|\vec{n}\| = a$, on a : $\vec{n}(a; 0)$, donc $\vec{AM'} = 2(a^2x - 1)\vec{e}_1 - y\vec{e}_2$

$$\text{Ainsi, on a : } \begin{cases} x' = (2a^2 - 1)x \\ y' = -y \end{cases}$$

Dédution

L'expression analytique de f est celle d'une application affine, d'où f est une **application affine**.

5) Démontrons que g est bijective si et seulement $\|\vec{n}\| \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

g est bijective si pour tout point M , son image M' est unique.

Il est clair que $y' = -y$ admet une solution unique, donc g est bijective si l'équation $x' = (2a^2 - 1)x$ admet une solution unique.

On doit donc avoir $2(a^2 - 1) \neq 0$ ie $a \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Soit $\|\vec{n}\| \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de f

a) $\|\vec{n}\| = 0$

On a $f : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

Dans ce cas, **f est la symétrie de centre A.**

b) $\|\vec{n}\| = 1$

On a $f : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

Dans ce cas, f est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

Activité 19

1) Démontrons que h est bijective.

On a : $h \circ h = \text{Id}$, donc $h \circ h(P) = P$, d'où h est une bijection et $h^{-1} = h$.

2. Démontrons que N est invariant par H.

h étant une application affine, alors elle conserve le milieu. Ainsi, si N est milieu de $[Ah(A)]$, alors $h(M)$ est milieu de $[h(A)h^2(A)]$.

Or $h^2(A) = h \circ h(A) = A$, donc

$[h(A)h^2(A)] = [Ah(A)]$; par suite, $h(N)$ est milieu de $[Ah(A)]$.

On a ainsi $h(N) = N$. En conséquence, h laisse invariant le point A.

3) Justification

Soit A un point du plan. h étant bijective, $h(A)$ existe et est unique. h laisse invariant le point N milieu de $[Af(A)]$. Donc $N \in (E)$, d'où (E) est non vide.

b) Démonstration

Soit A l'unique point invariant par f. Soit M et M' deux points tels que $f(M) = M'$. D'après 2,

le milieu de $[MM']$ est invariant par f, donc A est le milieu de $[MM']$

Par suite, **f est la symétrie de centre A.**

4.a) Démonstration

g :

$$\begin{cases} x' = 2x - 5y + 2 \\ y' = x - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2x' + 5y' + 4 \\ y = -x' + y + 2 \end{cases}$$

Soit $(\Delta) : y = ax + b \Rightarrow y - ax - b = 0$

Ainsi $g(\Delta) = (\Delta') \Leftrightarrow -x' + 2y + 2 = 0$

$a(-2x' + 5y' + 4) - b = 0$

$\Rightarrow (\Delta') : y' = \frac{1-2a}{2-5a}x' - \frac{2-4a-b}{2-5a}$

(Δ) et (Δ') sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux.

Posons : $\frac{1-2a}{2-5a} = a$

On a : $5a^2 - 4a + 1 = 0$. Cette équation n'admet pas de solutions réelles (car $\Delta = -4 < 0$)

Ainsi, $\frac{1-2a}{2-5a} \neq a$. **(Δ) et (Δ') sont alors**

sécantes.

En conclusion, si $g(\Delta) = \Delta'$ alors (Δ) et (Δ') sont non parallèles.

b) Dédution

On a : $g(M) = G$ et $g(G) = H$.

De ce qui précède, (MG) et (GH) sont sécantes.

Donc les points M, G et H lorsqu'ils sont distincts ne sont pas alignés.

5) Précisons la nature des applications g o g et g o g o g o g.

g o g o g o g.

g o g donne : $\begin{cases} x' = -x + 6 \\ y' = -y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' + x = 2 \times 3 \\ y' + y = 2 \times 1 \end{cases}$

D'où g o g est la symétrie centrale de centre $I(3; 1)$.

On en déduit que g o g o g o g est une identité.

6) Démontrons que l'isobarycentre R des points M, G, H et K est indépendant du point M

I est le seul point invariant par g. On a :

$$\overrightarrow{IR} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{IK}). \text{ Or } \overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{IG} \begin{pmatrix} 2x-5y-1 \\ x-2y-1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{IH} \begin{pmatrix} -x+3 \\ -y+1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} -2x+5y+1 \\ -x+2y+1 \end{pmatrix}$$

Donc $\overrightarrow{IH} = -\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{IG}$. Par suite, $\overrightarrow{IR} = \vec{0}$ et $R=I$.

En conclusion, R est le seul point invariant par g.

Séquence 2 : Coniques

Activité 1

Partie A

1.Définissons (Γ)

(Γ) : $d(M;A)+d(M;A')=4$.

Soit $M(x; y)$

On a : $d(M;A) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ et

$d(M;A') = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

Ainsi, $d(M;A)+d(M;A')=4 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 4$$

2.Montrons que (Γ) est une conique

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{[x-1]^2 + y^2}[\sqrt{(x+1)^2 + y^2}] = 7 - x^2 - y^2$$

Comme le premier membre est positif, le deuxième membre doit l'être aussi. Cette égalité équivaut donc à :

$$\begin{cases} 7 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ \end{cases}$$

$$[x-1]^2 + y^2 \leq 4 \Rightarrow [x-1]^2 + y^2 \leq 4$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 7 \\ \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 + 1 - 2x)(x^2 + y^2 + 1 + 2x) = [7 - x^2 - y^2]^2$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 7 \\ \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2 = 49 + x^4 + y^4 - 14x^2 - 14y^2 + 2x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 7 \\ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 + 16y^2 - 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 7 \\ 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \end{cases}$$

Remarquons maintenant que les couples $(x; y)$ qui vérifient l'équation $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$

vérifient l'inéquation $x^2 + y^2 \leq 7$:

$$3x^2 + 4y^2 = 12 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 \leq 12$$

$$\Rightarrow 3(x^2 + y^2) \leq 12 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 4$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \leq 7$$

Donc (Γ) a pour équation $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$ qui est bien l'équation d'une conique.

2.Equation réduite de la parabole (P).

a) $d(F; (D)) = 2016$

On a $y^2 = 2ax$ avec $a = 2016$

Soit $y^2 = 4032x$

b) $d(F; (D)) = \frac{17}{4}$

On a $y^2 = 2ax$ avec $a = \frac{17}{4}$

Soit $y^2 = \frac{17}{2}x$

c) $d(S; (D)) = \sqrt{2}$

On en déduit que $d(F; (D)) = 2\sqrt{2}$

D'où $y^2 = 4\sqrt{2}x$

3.Equation de (Γ)

a) $d(F; (D)) = 3$ et $e = 2^{-1}$

Déterminons la position des sommets A et A' puis de F et F' par rapport au centre de la conique.

Soit K le projeté orthogonal de A sur (D).

On a : $FK = 3 \Rightarrow FA + AK = 3$

$$\Rightarrow FA = 3 - AK$$

Par ailleurs, $e = \frac{AF}{AK} = \frac{1}{2} \Rightarrow AF = \frac{1}{2}AK$

Ainsi, on a : $AF = 3 - 2AF \Rightarrow AF = 1$

On a aussi $e = \frac{OF}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow OF = \frac{1}{2}OA$

$\frac{1}{2}(OF + FA)$. On en déduit que $OF = AF = 1$, donc $OA = 2$.

Ainsi, on a : $F(1; 0)$; $F'(-1; 0)$; $A(2; 0)$ et $A'(-2; 0)$.

Equation de (Γ)

$e = \frac{1}{2} < 1$ donc (Γ) est une ellipse. Soit (Γ) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$a = OA = 2 \text{ et } b^2 = a^2 - c^2 = 3$$

$$\text{D'où } (\Gamma) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$\text{b) } d(F; (D)) = 3 \text{ et } e = 2.$$

$$\text{On a : } FK = 3 \Rightarrow FA + AK = 3$$

$$\Rightarrow FA = 3 - AK$$

$$\text{Par ailleurs, } e = \frac{AF}{AK} = 2 \Rightarrow AF = 2AK$$

$$\text{Donc } AF = 2$$

$$\text{On a aussi } e = \frac{OF}{OA} = 2 \Rightarrow OF = 2OA =$$

$$2(OF - FA). \text{ On en déduit que } OF = 2AF = 4, \text{ donc } OA = 2.$$

$$\text{Ainsi, on a : } F(4; 0); F'(-4; 0); A(2; 0) \text{ et } A'(-2; 0).$$

Equation de (Γ)

(Γ) est une hyperbole. Son équation est de la

$$\text{forme } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a = 2; -b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$$

$$\text{D'où } (\Gamma) : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

Partie B

1.a)Equation de (P)

Soit $M(x; y)$ un point du plan. Soit H le projeté orthogonal de M sur (D). On a $H(1; y)$.

$$M \in (P) \Leftrightarrow MF = MH$$

$$\Leftrightarrow MF^2 = MH^2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 4y = -4x - 4$$

$$\text{Soit } (P) : (y-2)^2 = -4x$$

$$\text{b) } F(1; 1) \text{ et } (D) : y = -4.$$

Soit $M(x; y)$ et H son projeté orthogonal sur (D). On a : $H(x; -4)$

$$M \in (P) \Leftrightarrow MF = MH$$

$$\Leftrightarrow MF^2 = MH^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = (y+4)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 10y + 14$$

$$\text{Soit } (P) : (x-1)^2 = 10(y + \frac{3}{2})$$

2.Equation de la conique (Γ)

a) Soit M un point du plan et H son projeté orthogonal sur (D). On a : $H(x; 1)$

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{MF}{MH} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4MF^2 = MH^2$$

$$\Leftrightarrow 4[(x-1)^2 + (y+2)^2] = (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 3y^2 + 18y + 19 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 6y) = -19$$

$$\Leftrightarrow 4[(x-1)^2 - 1] + 3[(y+3)^2 - 9] = -19$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1)^2 + 3(y+3)^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

$$\text{Soit } (\Gamma) : \frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

b) Un raisonnement analogue au raisonnement précédent permet d'établir que :

$$(\Gamma) : \frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{12} = 1$$

c) Le même raisonnement permet d'arriver à la conclusion que (Γ) a pour équation :

$$(\Gamma) : \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y^2}{2} = 1$$

3.Foyer et la directrice de (P)

$$\text{a) } 2y^2 = 8x + \sqrt{2}$$

$$\text{On a : } y^2 = 4(x + \frac{\sqrt{2}}{8})$$

✓ Posons $X = x + \frac{\sqrt{2}}{8}$ et $Y = y$ et soit $(X; Y)$ les coordonnées de M dans le repère

$$(S; \vec{i}; \vec{j}) \text{ avec } S(-\frac{\sqrt{2}}{8}; 0).$$

On a : $Y^2 = 4X = 2 \times 2X$. On en déduit que dans ce repère, $F(1; 0)$ et $(D) : X = -1$.

✓ Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on a :

$$(P) : y^2 = 4(x + \frac{\sqrt{2}}{8})$$

$$\text{On a : } \begin{cases} X = x + \frac{\sqrt{2}}{8} \\ Y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X - \frac{\sqrt{2}}{8} \\ y = Y \end{cases}$$

$$\text{On a donc } F(1 - \frac{\sqrt{2}}{8}; 0) \text{ et } (D) : x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\text{Soit } F(\frac{8-\sqrt{2}}{8}; 0) \text{ et } (D) : x = \frac{-8-\sqrt{2}}{8}.$$

$$b) x^2 + 4x = -4y$$

$$\text{On trouve } (x + 2)^2 = -4(y - 1)$$

✓ Dans le repère $(S; \vec{i}; \vec{j})$ avec $S(-2; 1)$, on a : $X^2 = -4Y$ avec $M(X; Y)$. On en déduit que **$F(0; -1)$ et $(D) : y = 1$**

✓ Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on a : $\begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y + 1 \end{cases}$

$$\text{Donc } F(-2; 0) \text{ et } (D) : y = 2.$$

$$c) \frac{x^2}{2} + 2 = x + y$$

$$\text{On établit que } (x - 1)^2 = 2(y - \frac{3}{2})$$

✓ Dans le repère $(S; \vec{i}; \vec{j})$ avec $S(1; \frac{3}{2})$, l'équation devient $X^2 = 2Y$ avec $M(X; Y)$. On en déduit que $F(0; \frac{1}{2})$ et $(D) : y = -\frac{1}{2}$.

✓ Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on trouve $F(1; 2)$ et $(D) : y = 1$ à partir des relations : $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + \frac{3}{2} \end{cases}$

Activité 2

1. Nature et éléments caractéristiques de (Γ)

$$a) \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$$

L'équation de (Γ) est sous la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a^2 = 3$ et $b^2 = 5$. On en déduit que (Γ) est une ellipse.

Eléments caractéristiques

On a $a^2 < b^2$, donc il y a changement d'axe de repère. Ainsi, $a^2 = b^2 - c^2$

On en déduit $c = \sqrt{2}$. (Γ) est donc l'ellipse de :

Centre : $O(0; 0)$

Foyers : $F(0; \sqrt{2})$; $F'(0; -\sqrt{2})$

Sommets : $B(0; \sqrt{5})$; $B'(0; -\sqrt{5})$ situés sur l'axe focal (BB') et $A(\sqrt{3}; 0)$; $A'(-\sqrt{3}; 0)$ situés sur le petit axe $[AA']$.

Directrices : $(D) : y = \frac{5}{\sqrt{2}}$; $(D') : y = -\frac{5}{\sqrt{2}}$

Excentricité : $e = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$$b) \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$$

L'équation de (Γ) est sous la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a^2 = 12$ et $b^2 = 8$. On en déduit que (Γ) est une hyperbole.

Eléments caractéristiques

On a $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{5}$. On en déduit que (Γ) est l'hyperbole de :

Centre : $O(0; 0)$

Foyers : $F(0; 2\sqrt{5})$; $F'(0; -2\sqrt{5})$

Sommets : $A(2\sqrt{3}; 0)$ et $A'(-2\sqrt{3}; 0)$

Directrices : $(D) : x = \frac{6}{\sqrt{5}}$; $(D') : x = -\frac{6}{\sqrt{5}}$

Excentricité : $e = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

$$c) -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$$

L'équation de (Γ) est sous la forme $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a^2 = 4$ et $b^2 = 12$. On en déduit que (Γ) est une hyperbole.

Eléments caractéristiques

On a $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 4$. On en déduit que (Γ) est l'hyperbole de :

Centre : $O(0; 0)$

Foyers : $F(0; 4)$; $F'(0; -4)$

Sommets : $A(0; 2\sqrt{3})$ et $A'(0; -2\sqrt{3})$

Directrices : $(D) : y = 3$; $(D') : y = -3$

Excentricité : $e = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$d) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$$

L'équation de (Γ) est sous la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a^2 = 9$ et $b^2 = 2$. On en déduit que (Γ) est une ellipse.

Éléments caractéristiques

On a $a^2 > b^2$, Ainsi, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{7}$
 (Γ) est donc l'ellipse de :

Centre : $O(0 ; 0)$

Foyers : $F(\sqrt{7} ; 0)$; $F'(-\sqrt{7} ; 0)$

Sommets : $A(3 ; 0)$; $A'(-3 ; 0)$ situés sur l'axe focal (AA') et $B(0 ; \sqrt{2})$ et $B'(0 ; -\sqrt{2})$ situés sur le petit axe $[BB']$.

Directrices : $(D) : x = \frac{9}{\sqrt{7}}$; $(D') : x = -\frac{9}{\sqrt{7}}$

Excentricité : $e = \frac{\sqrt{7}}{3}$

2.Démontrons que (E) est l'équation d'une conique

$$a)(E) : x^2 + 2y^2 = 2x + 3$$

Cette équation équivaut à :

$$x^2 - 2x + 2y^2 = 3$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + 2y^2 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

L'équation de (E) est sous la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (avec $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y \end{cases}$), qui est bien celle d'une conique à centre, plus précisément celle d'une ellipse.

Éléments caractéristiques

✓ Soit le repère $(S ; \vec{i}; \vec{j})$ avec $S(1 ; 0)$

On a : $a^2 > b^2$ et $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2}$. Dans ce repère, (E) est l'ellipse de :

Centre : $S(1 ; 0)$

Foyers : $F(\sqrt{2}; 0)$; $F'(-\sqrt{2}; 0)$

Sommets : $A(2 ; 0)$; $A'(-2 ; 0)$ situés sur l'axe focal (AA') et $B(0 ; \sqrt{2})$ et $B'(0 ; -\sqrt{2})$ situés sur le petit axe $[BB']$.

Directrices : $(D) : x = 2\sqrt{2}$; $(D') : x = -2\sqrt{2}$

Excentricité : $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

✓ Dans le repère $(O ; \vec{i}; \vec{j})$, il suffit de convertir les éléments caractéristiques de (E) trouvés dans $(S ; \vec{i}; \vec{j})$. Dans le repère $(S ; \vec{i}; \vec{j})$, le centre S de l'ellipse est repéré par rapport à $(O ; \vec{i}; \vec{j})$ et les foyers, les sommets et les directrices sont plutôt donnés par rapport à $(S ; \vec{i}; \vec{j})$. Le centre de l'ellipse serait donc invariant et seuls les foyers, les sommets et les directrices subiront de modification dans $(O ; \vec{i}; \vec{j})$.

$$\text{On a : } \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y \end{cases}$$

(E) est l'ellipse de :

Centre : $S(1 ; 0)$

Foyers : $F(\sqrt{2} + 1 ; 0)$; $F'(1 - \sqrt{2} ; 0)$

Sommets : $A(3 ; 0)$; $A'(-1 ; 0)$ situés sur l'axe focal (AA') et $B(1 ; \sqrt{2})$ et $B'(1 ; -\sqrt{2})$ situés sur le petit axe $[BB']$.

Directrices : $(D) : x = 2\sqrt{2} + 1$; $(D') : x = 1 - 2\sqrt{2}$

Excentricité : $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$b)(E) : y^2 + 6x + 4 = 4y - 3x^2$$

$$\text{On établit que : } (x + 1)^2 + \frac{(y-2)^2}{3} = 1$$

L'équation de (E) est sous la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (avec $\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$), qui est bien celle d'une conique à centre, plus précisément celle d'une ellipse.

Éléments caractéristiques

✓ Dans le repère $(S ; \vec{i}; \vec{j})$ avec $S(-1 ; 2)$

On a : $a^2 < b^2$ et $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{2}$. Dans ce repère, (E) est l'ellipse de :

Centre : $S(-1; 2)$

Foyers : $F(0; \sqrt{2})$; $F'(0; -\sqrt{2})$

Sommets : $A(1; 0)$; $A'(-1; 0)$ situés sur le petit axe $[AA']$ et $B(0; \sqrt{3})$ et $B'(0; -\sqrt{3})$ situés sur l'axe focal (BB')

Directrices : (D) : $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$; (D') : $y = -\frac{3}{\sqrt{2}}$

Excentricité : $e = \frac{\sqrt{2}}{3}$

✓ Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, On a :

$$\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}$$

(E) est l'ellipse de :

Centre : $S(-1; 2)$

Foyers : $F(-1; 2 + \sqrt{2})$; $F'(-1; 2 - \sqrt{2})$

Sommets : $A(0; 2)$; $A'(-2; 2)$ situés sur le petit axe $[AA']$ et $B(-1; 2 + \sqrt{3})$ et $B'(-1; 2 - \sqrt{3})$ situés sur l'axe focal (BB')

Directrices : (D) : $y = \frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; (D') : $x = \frac{-3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

Excentricité : $e = \frac{\sqrt{2}}{3}$

c) (E) : $-2x^2 + y^2 + 4y = -12$

On en établit que : $\frac{x^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{8} = 1$

✓ Dans le repère $(S; \vec{i}; \vec{j})$ avec $S(0; -2)$

(E) est l'hyperbole de :

Centre : $S(0; -2)$

Foyers : $F(2\sqrt{3}; 0)$; $F'(-2\sqrt{3}; 0)$

Sommets : $A(2; 0)$; $A'(-2; 0)$

Directrices : (D) : $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$; (D') : $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

Excentricité : $e = \sqrt{3}$

✓ Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, (E), l'hyperbole de centre $S(0; -2)$, de foyers $F(2\sqrt{2}; -2)$; $F'(-2\sqrt{2}; -2)$ de sommets $A(2; -2)$;

$A'(-2; -2)$, de directrices (D) : $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$;

(D') : $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ et d'excentricité $e = \sqrt{3}$.

d) (E) : $-x^2 + y^2 + 6x + 2y - 16 = 0$

On en établit que (E) : $-\frac{(x-3)^2}{8} + \frac{(y+1)^2}{8} = 1$

✓ Dans le repère $(S; \vec{i}; \vec{j})$, avec $S(3; -1)$ (E) est l'hyperbole de centre S, de foyers

$F(0; 4)$; $F'(0; -4)$, de sommets

$B(0; 2\sqrt{2})$; $B'(0; -2\sqrt{2})$, de directrices

(D) : $y = 2$, (D') : $y = -2$ et

d'excentricité $e = \sqrt{2}$.

✓ Dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$, avec $S(3; -1)$ (E) est l'hyperbole de centre S, de foyers

$F(3; 3)$; $F'(3; -5)$, de sommets

$B(3; 2\sqrt{2} - 1)$; $B'(3; -2\sqrt{2} - 1)$, de

directrices (D) : $y = 1$, (D') : $y = -3$ et

d'excentricité $e = \sqrt{2}$.

3. Nature de (Γ_m)

a) $y^2 + 4y - (m - 2)x + m - 1 = 0$

Cette équation nous fait penser aux coniques.

Comme nous savons que les coniques ont pour

équations $\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma x + 2\delta y + \varepsilon = 0$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ des réels et $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, alors

pour déterminer l'ensemble en question, il faut se garder d'effectuer des transformations avant de commencer la discussion. Il faut plutôt

s'assurer de l'existence d'une conique à

savoir que $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ ie $|\alpha| \neq 0$ et $|\beta| \neq 0$ puis se

prononcer sur l'annulation des coefficients

affectant x, y avant toute transformation.

Ainsi,

☞ Si $m = 2$, on a $(\Gamma_2) : (y + 2)^2 = 3$

$\Rightarrow y = -2 + \sqrt{3}$ ou $y = -2 - \sqrt{3}$

(Γ_2) est donc la réunion des droites (D) et

(D') définies respectivement par : $y = -2 + \sqrt{3}$ et $y = -2 - \sqrt{3}$.

☞ Si $m \neq 2$, alors on a :

$$(y + 2) = (m - 2)\left(x - \frac{m-5}{m-2}\right)$$

On en déduit que (Γ_m) est la parabole de sommet $S(\frac{m-5}{m-2}; -2)$, de foyer $F(\frac{m^2-16}{4m-8}; -2)$ et de directrice (D) : $x = \frac{-m+8m-24}{4m-8}$.

$$b) (m+2)x^2 + m^2y^2 + 2(m+2)x = (m+2)(m^2-1)$$

☞ Si $m = -2$, on a $y^2 = 0$

Donc (Γ_{-2}) est l'axe des abscisses.

☞ Si $m = 0$, alors on a $(x+1)^2 = 0$

(Γ_0) est la droite d'équation $x = -1$

☞ Si $m \neq -2$ et $m \neq 0$, on a :

$$\frac{(x+1)^2}{m^2} + \frac{y^2}{m+2} = 1$$

- Si $m < -2$, (Γ_m) est une hyperbole de centre $I(-1; 0)$.
- Si $m > -2$, (Γ_m) est une ellipse de centre $I(-1; 0)$.

En particulier, (Γ_{-1}) est le cercle d'équation $(x+1)^2 + y^2 = 1$ et (Γ_2) le cercle d'équation $(x+1)^2 + y^2 = 4$

Activité 3

1.a) Tracé de la parabole (P)

On a $y^2 = 10x$. (P) est la réunion des courbes des fonctions $f_1: x \mapsto \sqrt{10x}$ et $f_2: x \mapsto -\sqrt{10x}$. Ces fonctions sont respectivement continues et strictement croissantes et décroissantes sur $[0; +\infty[$. Le tableau de variation de f_1 est le suivant :

x	0	$+\infty$
$f_1'(x)$		+
$f_1(x)$	0	$+\infty$

(c_{f_1}) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$. On construit (c_{f_1}) puis on

déduit la construction de (c_{f_2}) . L'ensemble donne (P).

Précisons

$$10x < y^2 \Rightarrow y^2 > 10x$$

L'ensemble des points M vérifiant cette inégalité est extérieur à (P).

b) Déterminons une équation de la tangente aux points de (P) d'abscisse 1.

Soit $M(1; y)$.

$$M \in (P) \Leftrightarrow y^2 = 10 \Leftrightarrow y = \sqrt{10} \text{ ou } y = -\sqrt{10}$$

Il existe donc deux points $A(1; \sqrt{10})$ et

$A'(1; -\sqrt{10})$, d'abscisse 1 appartenant à (P).

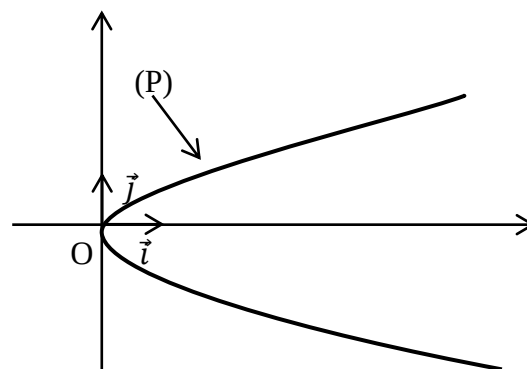
$$\text{On a } (T) : yy_0 = a(x + x_0)$$

$$\text{On trouve } (T_A) : y = \sqrt{10}x + \sqrt{10} \text{ et}$$

$$(T_{A'}) : y = -\sqrt{10}x - \sqrt{10}$$

2.a) Traçons (P)

On étudie (P) et on trace la courbe :



Déterminons le points K

Soit $K(x_0; y_0)$

$$\text{On a } (T_K) : yy_0 = 4(x + x_0)$$

$$\Rightarrow y = \frac{4}{y_0}x + \frac{x_0}{y_0}$$

(T_K) est parallèle à la droite (D) :

$$y = -\frac{2}{3}x + 1 \text{ si le coefficient directeur de}$$

(T_K) est égal à celui de (D). On a donc :

$$\frac{4}{y_0} = -\frac{2}{3} \Rightarrow y_0 = -6$$

$$\text{Ainsi, on a : } y_0^2 = 8x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{9}{2}$$

$$\text{D'où } K(\frac{9}{2}; -6)$$

b) Une équation de (T_K)

$$\text{On trouve } (T_K) : 2x + 3y + 9 = 0$$

3) Déterminons le sommet, l'axe focal et le foyer des paraboles d'équations :

a) $\frac{3}{4}x^2 - y + 1 = 0$.

On déduit que $x^2 = \frac{4}{3}(y - 1)$ (P) a pour sommet $S(0 ; 1)$, pour foyer $F(O ; \frac{4}{3})$ et pour directrice (D) d'équation $y = \frac{2}{3}$

b) $2y^2 = 4y + x - 3$

On a : $(y - 1)^2 = \frac{1}{2}(x - 1)$

(P) a pour sommet $S(1 ; 1)$, pour foyer $F(\frac{5}{4} ; 1)$ et pour directrice (D) : $x = \frac{3}{4}$.**4.a) Déterminons les tangentes passant par le point A(2 ; 9) de la parabole (P)**Les tangentes à (P) et passant par $P(2 ; 9)$ ont pour équation $y_0 = 2x_0 + 4$.**b) Coordonnées des points de contacts de ces tangentes avec (P)**

On a : $\begin{cases} y_0^2 = 36x_0 \\ y_0 = 2x_0 + 4 \end{cases}$

On trouve les points $I(1 ; 6)$ et $H(4 ; 12)$.**5. Démonstration**

On a $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = x$

Or $y = \sin\alpha$, donc on a : $1 - 2y^2 = x$

$\Rightarrow y^2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$ avec $-1 \leq x < 1$

D'où (Γ) est la partie de la parabole de sommet $S(1 ; 0)$, de foyer $F(\frac{7}{8} ; 0)$ et dedirectrice (D) : $x = \frac{9}{8}$ **Activité 4****Partie A****1.a) Éléments caractéristiques de (P)**

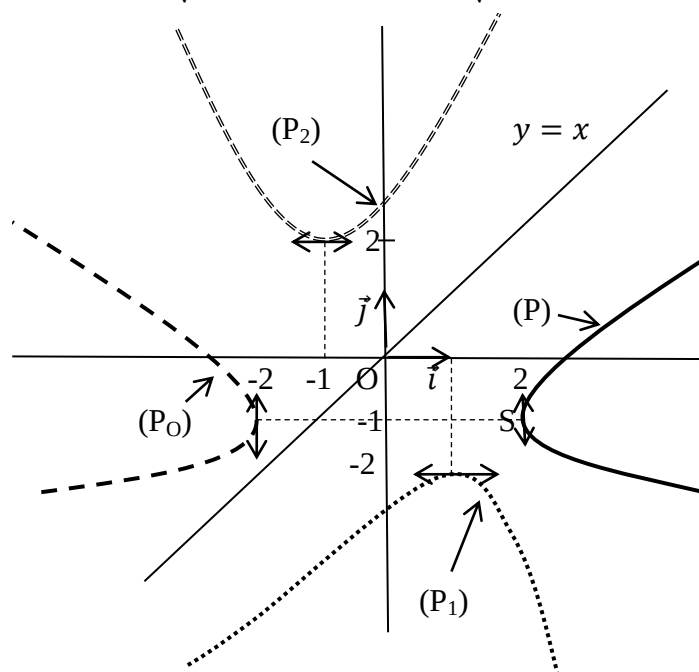
(P) : $y^2 + 9 = 4x - 2y$

$\Rightarrow (y + 1)^2 = 4(x - 2)$

(P) est la parabole de sommet $S(2 ; -1)$, de foyer $F(3 ; -1)$ et de directrice (D) : $x = 1$.**b) Construisons (P)**

Il faut étudier (P), réunion des fonctions

$x \mapsto -1 + 2\sqrt{x - 2}$ et $x \mapsto -1 - 2\sqrt{x - 2}$

**2. Image de (P) par la rotation**L'expression analytique de la rotation $r(K ; \frac{\pi}{2})$

est : $\begin{cases} x' = 3 - y \\ y' = x + 1 \end{cases}$. On en déduit que

$\begin{cases} x = y' - 1 \\ y = 3 - x' \end{cases}$

Ainsi, $r(P) = (P') \Leftrightarrow (3 - x')^2 + 9 = 4(y' - 1) - 2(3 - x')$

Soit (P') : $(x - 4)^2 = 4(y - 3)$

3. Image de (P) par S_Δ On détermine l'expression analytique de S_Δ et

on trouve : $\begin{cases} x' = \frac{-3x + 4y - 4}{5} \\ y = \frac{-3y + 4x + 2}{5} \end{cases}$

On en déduit que :
$$\begin{cases} x = \frac{-3x' + 4y' - 4}{5} \\ y = \frac{4x' + 3y' + 2}{5} \end{cases}$$

$$S_{\Delta}(P) = Q \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{4x' + 3y' + 2}{5} + 1\right)^2 = 4\left(\frac{-3x' + 4y' - 4}{5} - 2\right). \text{ Soit } Q :$$

$$16x^2 + 9y^2 + 24xy + 116xy - 38y + 329 = 0.$$

4. Image de (P) par S_d

(d) : $y = -x$

S_d a pour expression analytique :

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y' \\ y = -x' \end{cases}$$

$$S_d(P) = P_1 \Leftrightarrow (-x' + 1)^2 = 4(-y' - 2)$$

Soit $P_1 : (x - 1)^2 = -4(y + 2)$

5. Explicitons la réciproque de (P)

La réciproque (P_2) de (P) est l'image de (P) par la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$).

On a : $\begin{cases} x = y' \\ y = x' \end{cases}$. On en déduit que (P_2) a pour équation : $(x + 1)^2 = 4(y - 2)$.

(construction : voir figure de 1.b)

Partie B

1. Coordonnées de S

Soit (D') la droite passant par O et perpendiculaire à (D). $\vec{u}(1; 1)$ est un vecteur normal à (D), donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D').

Soit $M(x; y)$ un point de (D').

$\vec{OM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

On a (D') : $y = x$

(D') est l'axe focal de (T).

Soit K l'intersection de (D) et (D').

On a : $\begin{cases} x_K + y_K - 4 = 0 & (1) \\ y_K = x_K & (2) \end{cases}$

(2) dans (1) donne $x_K = 2$. Donc $y_K = 2$

D'où $K(2; 2)$.

S est le milieu de [OK]

On en déduit que S a pour coordonnées **(1 ; 1)**.

2. Equation cartésienne de (T)

Soit $M(x; y)$ un point du plan et H son projeté orthogonal sur (D).

$$M \in (T) \Leftrightarrow \frac{MO}{MH} = 1 \Leftrightarrow MH = MO$$

$$MH = d(M; (D)) = \frac{|x + y - 4|}{\sqrt{2}}$$

$$MO = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Ainsi, } MO = MH \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{|x + y - 4|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{(x + y - 4)^2}{2}$$

On développe et on fait des simplifications puis on trouve :

$$x^2 + y^2 - 2xy + 8x + 8y - 16 = 0 \text{ qui est une équation cartésienne de (T) dans } (O; \vec{i}, \vec{j}).$$

3. Démontrons que $R = (S, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est un repère orthonormé

On a : $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

Par ailleurs, $\|\vec{e}_1\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$

et $\|\vec{e}_2\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$

d'où R est un repère orthonormé.

4. Donnons dans R une équation cartésienne de (T)

R est un repère orthonormé d'origine S, sommet de la parabole (T). De plus, on remarque qu'un vecteur directeur $\vec{v}(-1; 1)$ de (D) est colinéaire à $\vec{e}_1$ et un vecteur directeur $\vec{u}(1; 1)$ de l'axe focal est colinéaire à $\vec{e}_2$. La directrice de cette parabole est alors parallèle à l'axe des abscisses et l'axe focal est parallèle à l'axe des ordonnées. Nous pouvons appliquer la formule : $x^2 = 2ay$ avec $a = KS = 2SO = 2\sqrt{2}$.

(T) a donc pour équation : $x^2 = 4\sqrt{2}y$.

Activité 5

1.Éléments caractéristiques de (E)

a) $(x-1)^2 + 4(y+2)^2 - 4 = 0.$

On en établit que $\frac{(x-1)^2}{4} + (y+2)^2 = 1$

(E) est l'ellipse de centre S(1 ; -2), de foyers F(1+√3 ; -2) ; F'(1-√3 ; -2), de sommets A(3 ; -2), A'(-1 ; -2) situés sur l'axe focal (AA'), B(1 ; -1), B'(1 ; -3) situés sur le petit

axe [BB'], de directrices (D) : $x = \frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$,

(D') : $x = \frac{-4+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ et d'excentricité $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

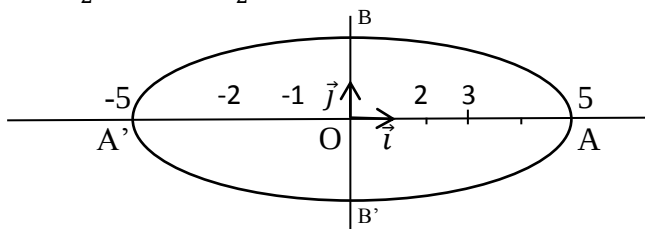
(E) est l'ellipse de centre S(1 ; -2), de foyers F(1 ; √3 - 2) , F'(1 ; -√3 - 2), de sommets B(1 ; 0), B'(1 ; -4) situés sur l'axe focal (BB'), A(2 ; -2) , A'(0 ; -2) situés sur le petit

axe [AA'], de directrices (D) : $y = \frac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$,

(D') : $y = \frac{-4-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ et d'excentricité $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.a) Traçons l'ellipse (E)

(E) est l'ellipse de centre O, de sommets A(5 ; 0) ; A'(-5 ; 0) situés sur l'axe focal , B(0 ; $\frac{5}{2}$) ; B'(0 ; $-\frac{5}{2}$) situés sur le petit axe.

**b) Equation des tangentes à (E) au points d'abscisses 4**

Pour $x = 4$, on a $y = \frac{3}{2}$ ou $y = -\frac{3}{2}$

Soit K(4 ; $\frac{3}{2}$) et K'(4 ; $-\frac{3}{2}$)

Les tangentes sont $(T_K) : 4x + 6y = 25$ et $(T_{K'}) : 4x - 6y = 25$.

c) Equation des tangentes à (E) ayant pour coefficient directeur $\frac{3}{\alpha}$

Déterminons α

$$\begin{cases} C_{\alpha}^2 \equiv 0[28] \\ 2 < \alpha < 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha^2 - \alpha}{2} \equiv 0[28] \\ 2 < \alpha < 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha^2 - \alpha = 56k \\ 2 < \alpha < 9 \end{cases} \Rightarrow k = 1. \text{ On en déduit que } \alpha = 8.$$

Les tangentes à (E) ayant pour coefficient directeur $\frac{3}{8}$ passent par les points G(3 ; -2) et H(-3 ; 2).

On trouve $(T_E) : 3x - 8y = 25$ et

$(T_H) : -3x + 8y = 25$.

3.a)Représentation paramétrique de (E)

L'équation réduite de (E) est :

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

On en déduit qu'une représentation paramétrique de (E) est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2\cos\alpha \\ y = -3 + 4\sin\alpha \end{cases} ; (\alpha \in \mathbb{R}).$$

4.) L'équation réduite de l'ellipse en question

$$\text{est : } \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

5. Dans le repère $(0 ; \vec{i}; \vec{j})$ où O est le centre de l'ellipse et $\vec{i} = \frac{1}{OF} \vec{OF}$, on a :

$$FF' = 2c = 2 \times 3 \Rightarrow c = 3.$$

$$MF + MF' = 2a = 2 \times 3 \Rightarrow a = 4.$$

On a $b^2 = 16 - 9 = 7$, d'où (E) a pour équation :

$$\boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1}$$

6. Définition bifocale de (E)

a) $x^2 + 2y^2 = 4$

On a : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

(E) est l'ensemble des points M du plan tels que : $\mathbf{MF} + \mathbf{MF}' = 4$ avec $\mathbf{F}(0 ; \sqrt{2})$ et $\mathbf{F}'(0 ; -\sqrt{2})$.

b) $3x^2 + y^2 = 2$

On a : $\frac{x^2}{\frac{2}{3}} + \frac{y^2}{2} = 1$

(E) est l'ensemble des points M du plan tels que : $\mathbf{MF} + \mathbf{MF}' = 2\sqrt{2}$ avec $\mathbf{F}(0 ; \frac{2}{\sqrt{3}})$ et $\mathbf{F}'(0 ; -\frac{2}{\sqrt{3}})$.

Activité 6

1.a) Prouvons que (E) est la réunion d'axes d'ellipses.

☞ Si $x \leq 0$, on a : $x^2 + 4y^2 + 2x - 3 = 0$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4} + y^2 = 1$$

Pour $x \leq 0$, (E) est la demi-ellipse d'équation

$$\frac{(x+1)^2}{4} + y^2 = 1$$

☞ Si $x \geq 0$, on a : $x^2 + 4y^2 - 2x - 3 = 0$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$$

Pour $x \geq 0$, (E) est la demi-ellipse

$$\text{d'équation : } \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$$

En définitive, (E) est la réunion d'arcs d'ellipses limitées par l'axe (OY).

b) Éléments caractéristiques de (E)

Les deux demi-ellipses ont pour centres $S(1 ; 0)$ et $S'(-1 ; 0)$. Le grand axe est (OX) et le petit axe est parallèle à (OY). Les sommets de (E) situés sur l'axe focal sont $A(3 ; 0)$, $A'(-3 ; 0)$. Les sommets situés sur le petit axe résultent de l'intersection des deux demi-ellipses.

c) Précisons les axes de symétrie, les points où les tangentes sont parallèles aux axes et les demi-tangentes aux points d'abscisse nulle.

- Les fonctions $x \mapsto x^2 - 2|x| + 4y^2 - 3$ et $y \mapsto x^2 - 2|x| + 4y^2 - 3$ sont paires.

L'ensemble (E) est symétrique par rapport à (OX) et à (OY). Le point O est le centre de symétrie de (E).

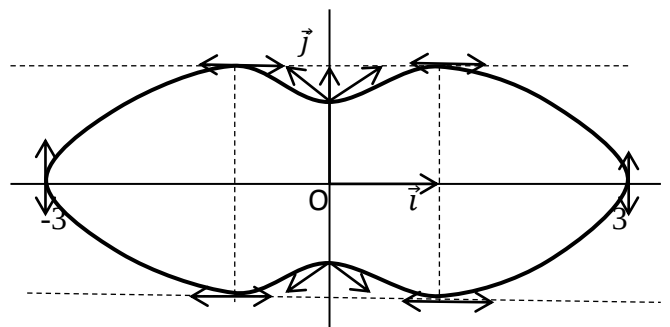
- Les tangentes sont parallèles aux axes aux sommets des ellipses appartenant à (E). Ce sont les points de coordonnées $(1 ; 1)$; $(-1 ; -1)$; $(1 ; -1)$; $(-1 ; 1)$; $(3 ; 0)$ et $(-3 ; 0)$.
- Pour obtenir les demi-tangentes aux points de (E) d'abscisses nulles, paramétrons l'ellipse centrée en $(1 ; 0)$. On a :

$$\begin{cases} x = 1 + 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

On peut résoudre l'équation par rapport à y, mais la présence d'une racine rend les calculs compliqués. Alors $x' = -2\sin t$ et $y' = \cos t$. Les points d'abscisses nulles correspondent à $\cos t = -\frac{1}{2}$, soit $t = \frac{2\pi}{3}$ ou $t = -\frac{2\pi}{3}$. Les composantes des vecteurs directeurs des demi-tangentes sont : $(\sqrt{3}; \frac{1}{2})$ et $(-\sqrt{3}; \frac{1}{2})$.

Le cas des deux autres demi-tangentes s'en déduit par symétrie.

d) Construction



3. Image de (E) par S_Δ

S_Δ est définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x = \frac{-3x' + 4y' - 4}{5} \\ y = \frac{4x' + 3y' + 2}{5} \end{cases}$$

$$S_\Delta(E) = E' \Leftrightarrow \left(\frac{-3x' + 4y' - 4}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{4x' + 3y' + 2}{5} \right)^2$$

$$-2 \left| \frac{-3x' + 4y' - 4}{5} \right| - 3 = 0$$

Soit (E') : $73x^2 + 52y^2 + 72xy + 88x + 16y + 10|3x - 4y + 4| - 75 = 0$.

4. Image de (E) par l'affinité orthogonale S_d

On établit l'expression analytique de S_d puis on en déduit :

$$\begin{cases} x = \frac{3x' + y'}{4} \\ y = \frac{x' + 3y'}{4} \end{cases}$$

$$S_d(E) = E'' \Leftrightarrow \left(\frac{3x' + y'}{4} \right)^2 + 4 \left(\frac{x' + 3y'}{4} \right) - 2 \left| \frac{3x' + y'}{4} \right| - 3 = 0.$$

L'équation de (E'') est donc :

$$13x^2 + 5y^2 + 30xy - 8|3x + y| - 48 = 0.$$

Activité 7

1. Eléments caractéristiques de (H)

b) $(x - 1)^2 - 4(y + 2) = 4$.

On a donc : $\frac{(x-1)^2}{4} - (y+2)^2 = 1$

(H) est l'hyperbole de centre $S(1; -2)$, de foyers $F(1+\sqrt{5}; -2)$; $F'(1-\sqrt{5}; -2)$, de sommets $A(3; -2)$ et $A'(-1; -2)$, de directrices (D) : $x = \frac{4+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$; (D') : $x = \frac{-4+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ et

d'excentricité $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$ (préciser aussi les asymptotes).

c) $-\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

(H) est l'hyperbole de centre $S(1; -2)$, de foyers $F(1; -2 + 2\sqrt{2})$; $F(1; -2 - 2\sqrt{2})$, de sommets $A(1; 0)$, $A'(1; -4)$, de directrices (D) : $y = -\sqrt{2} - 2$; (D') : $y = \sqrt{2} - 2$ et d'excentricité $e = \sqrt{2}$.

2. Traçons (H)

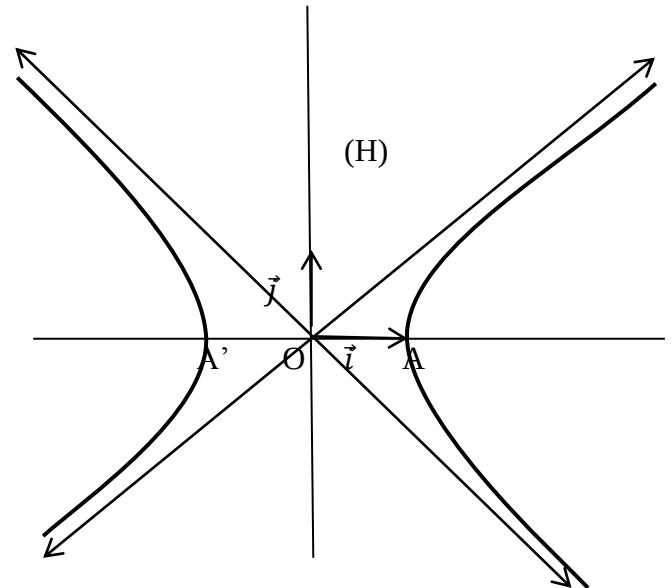
L'équation réduite de (H) est : $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$

(H) a pour sommets $A(\sqrt{2}; 0)$; $A'(-\sqrt{2}; 0)$.

Les asymptotes sont les droites d'équations

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x \text{ et } y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$$

La courbe de (H) est la suivante :



b) Déterminons une équation des tangentes à (H) aux points de (H) d'abscisse $2\sqrt{2}$

Les points de (H) d'abscisses $2\sqrt{2}$ sont $G(2\sqrt{2}; \sqrt{3})$ et $K(2\sqrt{2}; -\sqrt{3})$. Les tangentes en ces points sont donc :

$(T_G) : x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 1$ et

$(T_K) : x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = 1$.

c) (H) admet des tangentes de coefficients directeurs 1 aux points $E(2; 1)$ et $H(-2; -1)$

En effet, on a : $y = \frac{x_0}{2y_0}x - \frac{1}{y_0}$

$\frac{x_0}{2y_0} = 1 \Rightarrow x_0 = 2y_0$

Or $\frac{x_0^2}{2} - y_0^2 = 1$, donc $\frac{(2y_0)^2}{2} - y_0^2 = 1$

On trouve ainsi $y_0 = 1$ ou $y_0 = -1$. On en déduit $x_0 = 2$ ou $x_0 = -2$

D'où $E(2; 1)$ et $H(-2; -1)$

On en déduit les équations des tangentes :

$(T_E) : x - y = 1$ et $(T_H) : -x + y = 1$.

3. Equation de la conique

$|MF - MF'| = 2 \times 2\sqrt{5}$, (Γ) est une hyperbole et soit $a = 2\sqrt{5}$.

$FF' = 2 \times 6$, soit $c = 6$.

On a : $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 16$.

D'où (Γ) a pour équation :

$$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$$

4. Définition bifocale

a) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$

(H) est l'ensemble des points M du plan tels que : $|MF - MF'| = 2\sqrt{6}$ avec $F(3; 0)$ et $F'(-3; 0)$.

b) $-\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$

(H) est l'ensemble des points M du plan tels que : $|MF - MF'| = 2\sqrt{6}$ avec $F(0; 3)$ et $F'(0; -3)$.

5. Equation de l'hyperbole (H)

a) $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on a : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on a :

$$\overrightarrow{OM} = X(\vec{i} + \vec{j}) + Y(\vec{i} - \vec{j}) = (X+Y)\vec{i} + (X-Y)\vec{j}$$

Ainsi, on a : $\begin{cases} x = X + Y \\ y = X - Y \end{cases}$

Par suite, $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow -\frac{(X+Y)^2}{4} + \frac{(X-Y)^2}{4} = 1$

$$\Leftrightarrow XY = -1.$$

Dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, (H) a pour équation :

$$\boxed{XY = -1}$$

b) $x^2 - y^2 + 2x = 4y$

Un raisonnement analogue au raisonnement précédent permet de trouver :

$$\boxed{-X + 2XY + 3Y = 0}$$

c) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 3x + y + 12 = 0$

Le même raisonnement permet de trouver :

$$\boxed{XY - X - 2Y + 6 = 0}$$

Activité 8

1. Difficulté de la détermination de l'équation de la conique

a) Il est difficile de déterminer directement ces équations dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ par ce que les coordonnées de F et F', telles que données nous permettent de dire que les axes de la coniques ne sont pas les axes du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Or la définition bifocale est donnée plus simplement dans le cas où les axes de la conique sont les axes de repère.

b) Déterminons ces équations dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

• (R) : $MF + MF' = 4$

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on a : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on a : $\overrightarrow{OM} = X\vec{u} + Y\vec{v}$

$$\overrightarrow{OM} = X\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) + Y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right)$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{(X+Y)}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{(Y-X)}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{cases} x = \frac{X+Y}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{Y-X}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \end{cases}$$

On en déduit que dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$,

$F(\sqrt{2}; 0)$ et $F'(-\sqrt{2}; 0)$.

Nous voyons clairement ici que les axes du repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ représentent en même temps les axes de l'ellipse.

Nous pouvons dire que $MF + MF' = 4$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$: telle est l'équation de (R) dans $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

• (R') : $|MF - MF'| = 2$

On déduit de ce qui précède que (R') a pour équation : $X^2 - Y^2 = 1$.

c) Equation de ces ensembles dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Nous avons :
$$\begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \end{cases}$$

Dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on a :

$$(R) : \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \right)^2 \right] = 1$$

Soit
$$(R) : 3x^2 + 2xy + 3y^2 = 8$$

$$(R') : \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \right]^2 - \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \right]^2 = 1$$

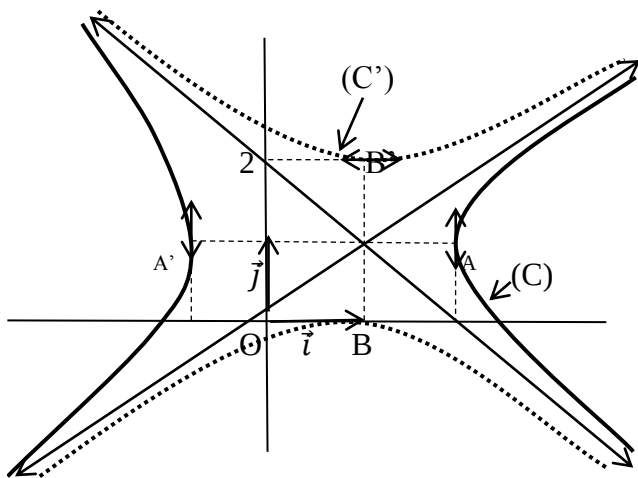
Soit
$$(R') : xy = -\frac{1}{2}$$

2.a) Nature de (c)

On a (c) : $\frac{(x-1)^2}{2} - (y-1)^2 = 1$

(c) est l'hyperbole de centre S(1 ; 1), de sommets A(1 - $\sqrt{2}$; 1) et A'(1 + $\sqrt{2}$; 1). Les asymptotes de (c) ont pour équation :

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \text{ et } y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}.$$



b) On trouve l'équation de (c') qui est :

$$-\frac{(x-1)^2}{2} + (y-1)^2 = 1$$

c) Les sommets de (c') sont les points B(1 ; 0) et B'(1 ; 2) et les asymptotes sont les mêmes qu'en a). (Construction voir figure 2.a))

3. Démonstration

$$R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y' \\ y = -x' \end{cases}$$

Ainsi, $r(H) = H' \Leftrightarrow y'^2 - 3(-x')^2 - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 3x'^2 - y'^2 + 1 = 0$$

D'où $r(H) = H'$ d'équation : $3x^2 - y^2 + 1 = 0$.

b) L'expression analytique de la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice est :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \text{ On trouve toujours } r(H) = H'.$$

4) Démontrons que l'ensemble (Γ) est la réunion de deux coniques

Posons : $X = x^2$ et $Y = y^2$

On a : $Y^2 - 9 = 9X^2 - 18X$

$$\Rightarrow Y^2 = 9(X - 1)^2$$

$$\Rightarrow Y = 3(X - 1) \text{ ou } Y = -3(X - 1)$$

Or $Y = y^2$ et $X = x^2$, donc $y^2 = 3(x^2 - 1)$ ou $y^2 = -3(x^2 - 1)$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \text{ ou } x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$$

(Γ) est donc la réunion de deux coniques (Γ₁) et (Γ₂) définies respectivement par :

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \text{ et } x^2 + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(Γ₁) est l'hyperbole de sommets A(1 ; 0) et A'(-1 ; 0) et d'asymptotes (Δ) : $y = x\sqrt{3}$; (Δ') : $y = -x\sqrt{3}$.

(Γ₂) est l'ellipse de sommets A(1 ; 0). A'(-1 ; 0) ; B(0 ; $\sqrt{3}$) et B'(0 ; $-\sqrt{3}$).

Activité 9

1. Variations de f

f est définie et continue sur $]-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}; +\infty[$ puis dérivable sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[,$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{3(4x^2-1)}+4x}{\sqrt{4x^2-1}}$$

Il est clair que f' est positive sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

Etudions le signe de f' sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$

Posons : $u(x) = \sqrt{3(4x^2-1)} + 4x$

$$u(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3(4x^2-1)} = -4x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(4x^2-1) \geq 0 \\ -4x \geq 0 \\ 3(4x^2-1) = 16x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-1 \geq 0 \\ 4x \leq 0 \\ 12x^2-3 = 16x^2 \text{ (absurde)} \end{cases}$$

L'équation $u(x) = 0$, n'admet pas de solution dans IR. (1)

Par ailleurs, la fonction $x \mapsto \sqrt{3(4x^2-1)} + 4x$ est définie et continue sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$ comme étant la somme des fonctions $x \mapsto 4x$ et $x \mapsto \sqrt{3(4x^2-1)}$ toutes définies et continues sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$ (2)

De (1) et (2), on déduit que u garde un signe constant sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$.

On a $-2 \in]-\infty; -\frac{1}{2}[$ et $u(-2) = \sqrt{45} - 8 < 0$, donc $\forall x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[, u(x) < 0$

Ainsi, $f'(x) < 0 \forall x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[$.

En conclusion, f est strictement croissante sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty; -\frac{1}{2}]$.

Limites de f aux bornes de D_f

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{3} + \sqrt{4x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} x\sqrt{3} + \sqrt{4x^2-1} = +\infty$$

$$f\left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'étude des variations de f se résume dans le tableau ci-après.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-			+
$f(x)$	$+\infty$ $\swarrow$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\searrow$ $+\infty$	

b) Démontrons que (c) admet deux asymptotes que l'on déterminera.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 + \sqrt{3}$

Comme de plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2 + \sqrt{3})x] = 0$, alors la droite d'équation $y = (2 + \sqrt{3})x$ est asymptote à (c) au voisinage de $-\infty$.

- On démontre de même que la droite d'équation $y = (2 - \sqrt{3})x$ est asymptote à (c) au voisinage de $+\infty$.

c) Le calcul de la question a) conduit à :

$$\lim_{\substack{\frac{1}{2} \\ >}} f' = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{\frac{1}{2} \\ <}} f' = -\infty$$

La fonction f n'est donc pas dérivable aux points d'abscisses $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. Cependant, la courbe (c) admet des demi-tangentes verticales en ses points d'arrêt.

d) Calculons

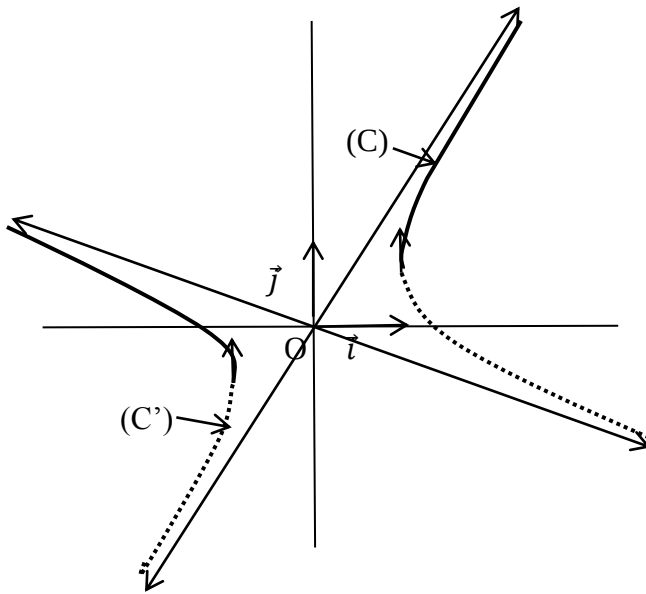
De la question 1.a) l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule, laquelle est inférieure à $-\frac{1}{2}$

$$\text{On a : } f(x) = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{3} = -\sqrt{4x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = 4x^2 - 1$$

$$\text{Soit } x = -1.$$

Construisons (C)



2.a) Equation de (c')

Une équation de (c') est $y = -f(-x)$

$$\text{Soit } y = x\sqrt{3} - \sqrt{4x^2 - 1}$$

(Construction : voir figure)

b) Démontrons que $(H') = (c) \cup (c')$

$$(H) : y^2 - x^2 - 2\sqrt{3}xy + 1 = 0$$

$$(H) = (c) \cup (c') \Leftrightarrow y = f(x) \text{ ou } y = -f(x)$$

Donc $M(x; y) \in (H)$

$$\Leftrightarrow [y - f(x)][y + f(-x)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$(y - x\sqrt{3} - \sqrt{4x^2 - 1})(y - x\sqrt{3} + \sqrt{4x^2 - 1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - x\sqrt{3})^2 - (4x^2 - 1) = 0$$

Il reste après simplification :

$$y^2 - x^2 - 2\sqrt{3}xy + 1 = 0$$

D'où $(H) = (c) \cup (c')$

3. Expression analytique de g

On trouve

$$g : \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

4.a) Equation de H'

$$\text{On a : } \begin{cases} x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' \end{cases}$$

On reporte x et y dans l'équation de (H) et on trouve $(H') : 2y'^2 - 2x'^2 = 1$.

b) La courbe (H') est une hyperbole équilatère de centre O, d'axe transverse (OY), de sommets $(0; \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(0; -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Les asymptotes sont les bissectrices des axes de coordonnées. La demi distance focale est 1. Les coordonnées des foyers sont $(0; 1)$ et $(0; -1)$.

5.a) Démonstration

L'hyperbole K est l'ensemble des points M tels que : $|\mathbf{MF}_1 - \mathbf{MF}_2| = 2a$ où $2a$ est la distance des sommets.

L'ensemble $h(K)$ est caractérisée par :

$|\mathbf{h(M)h(F_1)} - \mathbf{h(M)h(F_2)}| = 2a$ (car il y a conservation de distance, puisque h est une isométrie).

On en déduit donc que $\mathbf{h(K)}$ est une hyperbole de foyers $\mathbf{h(F_1)}$ et $\mathbf{h(F_2)}$.

b) Nature de H.

En posant $K = H'$ et $h = g^{-1}$ (car g étant une rotation, sa réciproque est une rotation, donc une isométrie), on a :

$$\mathbf{h(K)} = g^{-1}(H') = H$$

On en déduit que H est une hyperbole équilatère. Les coordonnées des foyers de H sont donc les images par la rotation des foyers de H' .

On trouve $\mathbf{F}(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$ et $\mathbf{F}'(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2})$.

Activité 11

1. Nature et éléments caractéristiques de T

$$z' = -iz + 2 + 2i$$

L'écriture complexe de T est de la forme $z' = a\bar{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $|a| = 1$. On en déduit que T est un antidéplacement. De plus, $a\bar{b} + b = 0$, donc T est une réflexion plane.

Son axe est la droite (D) d'équation : $x + y - 2 = 0$.

2.a)Exprimons l'affixe z_H de H

$$z_H = \frac{z' + z'}{2}$$

$$\text{Soit } z_H = \frac{z - i\bar{z} + 2i + 2}{2}$$

b) Distance de M à H

$$d(M, H) = MH = |z - z_H|$$

$$\text{Soit } MH = \left| \frac{z + i\bar{z} - 2 - 2i}{2} \right|$$

3. Nature et éléments caractéristiques de (E)

$$|z + 1 + i| = \left| \frac{1}{2} |z + i\bar{z} - 2 - 2i| \right|$$

$$\Rightarrow |z - z_F| = |z - z_H| \text{ avec } z_F = -1 - i$$

$$\Rightarrow \frac{MF}{MH} = 1$$

Comme H est le projeté orthogonal de M sur (Δ) et puisque $A \notin (\Delta)$, alors on déduit de la relation précédente que (E) est **la parabole de foyer $F(-1; -1)$, de sommet O, de directrice (Δ) et d'axe la première bissectrice.**

4.a) Démonstration

Posons : $z = x + iy; (x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$\bar{z} + z + 4 = 0 \Leftrightarrow x - iy + x + iy + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow 2x + 4 = 0$$

Il s'agit bien de la droite (D) d'équation $x = -2$.

b)Démontrons que pour tout point M, la distance de M à (D) est : $\frac{1}{2}|\bar{z} + z + 4|$.

Soit J le projeté orthogonal de M sur (D). On a : $J(-2; y)$ et $M(x; y)$.

$$\text{Ainsi, } d(M; (D)) = MJ = |x + 2|$$

$$\text{Or } \bar{z} + z + 4 = 2x + 4$$

$$\Rightarrow x + 2 = \frac{\bar{z} + z + 4}{2}$$

D'où

$$d(M; (D)) = \frac{1}{2} |\bar{z} + z + 4|$$

5.Démontrons que (E) est une ellipse

$$\text{On a (E) : } \left| \frac{z - 1 - i}{\bar{z} + z + 4} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{On en déduit que } |z - 1 - i| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{\bar{z} + z + 4}{2} \right|$$

$$\Rightarrow |z - z_F| = \frac{1}{\sqrt{2}} |z - z_J| \text{ avec } z_F = 1 + i$$

$$\Rightarrow MF = \frac{1}{\sqrt{2}} MJ$$

$$\Rightarrow \frac{MF}{MJ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

J étant le projeté orthogonal de M sur (D) et comme $F \notin (D)$ et $0 < \frac{MF}{MJ} (= \frac{1}{\sqrt{2}}) < 1$, alors (E) est **l'ellipse de foyer $F(1; 1)$, de directrice (D) et d'excentricité $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.**

Activité 12

1.a)Définissons analytiquement S_1 et t.

$$\text{On trouve } S_1: \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x - 1 \end{cases} \text{ et } t: \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

b)Déterminons analytiquement les applications $g = S_1 \circ t$ et $h = t \circ S_1$

- L'application g est définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = y + 2 \\ y' = x + 1 \end{cases}$ et
- L'application h est définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = x \end{cases}$

c)Démontrons que g est une symétrie glissée

$\vec{u}'(1; 1)$ est un vecteur directeur de (Δ).

$\vec{u}' \cdot \vec{u} = 3 \neq 0$, donc $\vec{u}'$ n'est pas normal à (Δ), d'où g est une symétrie glissée.

Éléments caractéristiques

Soit $\vec{v}$ le vecteur de translation de g et soit (D) l'axe de la symétrie orthogonale. On a :

$$g = S_{(D)} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ S_{(D)}$$

$$g \circ g = t_{\vec{v}} \circ S_{(D)} \circ S_{(D)} \circ t_{\vec{v}} = t_{2\vec{v}}$$

$g \circ g$ est définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 3 \end{cases} \text{ . On en déduit que } 2\vec{v}(3; 3)$$

$$\text{Soit } \vec{v}\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \text{ .}$$

(D) a pour repère (J ; $\vec{v}$) avec J(1 ; $\frac{1}{2}$) milieu de [OO'] où O' est l'image de O par g.

$$\text{On a (D) : } \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + \frac{1}{2} \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

On en déduit par élimination de t que (D) a pour équation cartésienne : $x - y - \frac{1}{2} = 0$.

2. a) Donnons la nature de (c) et ses éléments caractéristiques.

L'équation réduite de (c) est :

$$\frac{(x-3)^2}{9} + y^2 = 1$$

On en déduit que dans le repère

(S ; $\vec{i}; \vec{j}$) avec S(3 ; 0), (c) est l'ellipse de centre S(3 ; 0), de foyers F(2 $\sqrt{2}$; 0), F'(-2 $\sqrt{2}$; 0), de sommets A(3 ; 0), A'(-3 ; 0) situés sur l'axe focal (AA'), B(0 ; 1) et B'(0 ; -1) situés sur le petit axe [BB'], de directrices (D) : $x = \frac{9\sqrt{2}}{4}$ et (D') : $x = -\frac{9\sqrt{2}}{4}$ et d'excentricité $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) Déterminons l'image (c') de (c) par g.

$$\text{On trouve (c') : } (x - 2)^2 + \frac{(y-4)^2}{9} = 1 \text{ .}$$

3.a) Trouvons sans calcul la valeur de I

L'équation cartésienne du cercle en question est : $x^2 + y^2 = a^2$. On en déduit que

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \text{ ou } y = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

Ce cercle est donc la réunion des deux courbes d'équations $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ et $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ qui sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Alors l'aire $\mathcal{A}$ du disque de centre O et de rayon a est le double de l'aire du domaine :

$$\begin{cases} -a \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, on a : } \mathcal{A} = 2\left(\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx\right) u.a = (4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx) u.a \text{ (car la fonction}$$

$$x \mapsto \sqrt{a^2 - x^2} \text{ est paire).}$$

$$\mathcal{A} = 4I.u.a$$

L'aire du disque est $\pi a^2.u.a$. On en déduit

$$\text{que : } I = \frac{\pi a^2}{4} \text{ .}$$

b) Calculons I à l'aide d'un changement de variable $x = a \cos \beta$

$$\text{On a } I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Posons : $x = a \cos \beta$, avec $0 \leq \beta \leq \pi$.

La nouvelle variable devient β .

☞ Pour $x = a$, on a $\beta = 0$

☞ Pour $x = 0$, on a $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$\text{On a : } a^2 - x^2 = a^2(1 - \cos^2 \beta) = a^2 \sin^2 \beta$$

$$x = a \cos \beta \Rightarrow \frac{dx}{d\beta} = -a \sin \beta$$

$$\text{Donc } dx = -a d\beta \sin \beta$$

Ainsi, on a :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{a^2(\sin^2 \beta)} (-a \sin \beta) d\beta =$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 |a \sin \beta| (-a \sin \beta) d\beta = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-a \sin^2 \beta) d\beta \text{ (car } a > 0 \text{ et } \sin \beta > 0 \forall \beta \in [0 ; \pi] \text{ .)}$$

$$I = -\frac{a^2}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos 2\beta) d\beta = \frac{a^2}{2} \left[\beta - \frac{1}{2} \sin 2\beta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{On trouve } I = \frac{\pi a^2}{4} \text{ .}$$

c) Dédution

L'ellipse en question est la réunion des

courbes des fonctions $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ et

$$y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Alors l'aire A' est donné par :

$$A' = 2 \left(\int_{-a}^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx \right) u.a$$

$$A' = 4 \left(\int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx \right) u.a$$

$$\text{Soit } A' = \frac{4bI}{a} u.a$$

$$\text{On a donc } \underline{A' = ab\pi.u.a}$$

d) Donnons alors l'aire A du domaine du plan intérieur de la courbe (c').

Dans le repère (S' ; $\vec{i}; \vec{j}$) avec S'(2 ; 4), (c') a

$$\text{pour équation : } X^2 + \frac{Y^2}{9} = 1.$$

On déduit de tout ce qui précède que l'aire A demandée est :

$$\underline{A = 3\pi.aa}$$

Séquence 4 : Similitudes planes

Activité 1

1.a) Justification

Les écritures complexes de f et i sont de la forme : $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $|a| = 1$. D'où f et i sont des déplacements.

b) Donnons la nature et les éléments caractéristiques de f, g, h et i.

- $f : z' = z + 1 - 2i$

f est la translation de vecteur $\vec{u}(1; -2)$

- $g : z' = (1 - i)z + 4i$

L'écriture complexe de g est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}$ et $|a| = \sqrt{2} \neq 1$, donc f est la composée commutative d'une homothétie et d'une rotation.

Eléments caractéristiques

Rapport k : $k = |a| = \sqrt{2}$

Angle de rotation θ : $\theta = \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$

Le centre Ω : $z_{\Omega} = \frac{4i}{i} = 4$. Soit **$\Omega(4 ; 0)$**

- $h : z' = 3z - 2 - i$

L'écriture complexe de g est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $|a| = 3 \neq 1$. D'où h est l'homothétie de **rapport $k = 3$** et de centre I tel que $z_I = \frac{-2-i}{1-3} = 1 + \frac{1}{2}i$. Soit **$I(1 ; \frac{1}{2})$**

- $i : z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z + 5$

i est un déplacement ($z' = az + b$) et comme $a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}$, alors i est une rotation.

Eléments caractéristiques

Centre J : $z_J = \frac{5}{1 - (\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2})} = \frac{10-5\sqrt{2}-5i\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}$

Soit **$J(\frac{10-5\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}; \frac{5\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}})$**

Angle de rotation α : $\alpha = \arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$\alpha = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

2) Caractérisons les transformations

$g \circ f, g \circ h, g^{-1}, (i \circ h)^{-1}$ et $i \circ g^{-1}$.

- $g \circ f : z' = (1 - i)(z + 1 - 2i) + 4i$

Soit $g \circ f : z' = (1 - i)z - 1 + i$

L'écriture complexe de $g \circ f$ est de la forme

$z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $|a| = \sqrt{2} \neq 1$.

D'où $g \circ f$ est la composée commutative d'une homothétie et d'une rotation.

Eléments caractéristiques

Rapport k : $k = \sqrt{2}$

Angle de rotation θ : $\theta = \arg(1 - i)$

$\theta = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

Centre A : $z_A = \frac{-1+i}{2} = 1 + i$. Soit **$A(1 ; 1)$**

- $g \circ h : z' = (1 - i)(3z - 2 - i) + 4i$

Soit $z' = (3 - 3i)z - 3 + 5i$

L'écriture complexe de $g \circ h$ est de la forme

$z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}$ et $|a| = 3\sqrt{2} \neq 1$,

donc f est la composée commutative d'une homothétie et d'une rotation.

Eléments caractéristiques

Rapport k : $k = 3\sqrt{2}$

Angle de rotation θ : $\theta = \arg(3 - 3i)$

$\theta = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

Centre K : $z_K = \frac{-3+5i}{1-3+3i} = \frac{21-i}{13}$.

Soit $K(\frac{21}{13}; -\frac{1}{13})$

- g^{-1}

Nous connaissons les éléments

caractéristiques de g. Nous pouvons donc en

déduire que g^{-1} est la composée commutative d'une homothétie et d'une rotation

caractérisée par son centre $\Omega(4 ; 0)$, son

rapport $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et son angle de de rotation

$\theta = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$.

NB : on peut aussi faire autrement en allant déterminer l'écriture complexe de g^{-1} . Mais cette méthode est beaucoup plus longue.

$$\text{On a : } g = h' \circ r' \begin{cases} k = \sqrt{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{4} \text{ rad} \\ \Omega(4; 0) \end{cases}$$

$$g^{-1} = (h' \circ r')^{-1} = h'^{-1} \circ r'^{-1}$$

$$\checkmark \quad h'^{-1}(\Omega; \frac{1}{\sqrt{2}}) : z' - z_{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{2}}(z - z_{\Omega})$$

$$\text{Soit } z' = \frac{1}{\sqrt{2}}z - 2\sqrt{2} + 4$$

$$\checkmark \quad r'^{-1}(\Omega; \frac{\pi}{4}) : z' - z_{\Omega} = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_{\Omega})$$

$$\text{Soit } z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z + 4 - 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$$

Ainsi, on trouve $h'^{-1} \circ r'^{-1}$:

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right)z + 2 - 2i$$

A partir de cette écriture complexe, on trouve les mêmes éléments caractéristiques que précédemment.

- $(i \circ h)^{-1}$

$i \circ h$ est la composée de l'homothétie h et de la rotation i dont les éléments caractéristiques sont déjà connus. Mais il se fait que le centre de l'homothétie et celui de la rotation ne sont pas les mêmes. On est donc obligé d'aller déterminer l'écriture complexe de $(i \circ h)^{-1}$.

$$(i \circ h)^{-1} = i^{-1} \circ h^{-1}$$

$$\checkmark \quad \text{On a : } i^{-1}(J; \frac{\pi}{4}). \text{ On trouve } i^{-1}:$$

$$z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z + \frac{5 - 5\sqrt{2}}{2 - 2\sqrt{2}} + i\frac{5 - 5\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

$$\checkmark \quad \text{On a : } h^{-1}(I; \frac{1}{3}). \text{ On trouve } h^{-1}:$$

$$z' = \frac{1}{3}z + \frac{2 + i}{3}$$

Ainsi, on trouve $(i \circ h)^{-1}$:

$$z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{6} + i\frac{\sqrt{2}}{6}\right)z + \frac{13 - 13\sqrt{2}}{6 - 3\sqrt{2}} + i\frac{14 - 14\sqrt{2}}{6 - 3\sqrt{2}}$$

L'écriture complexe de $(i \circ h)^{-1}$ est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}$ et $|a| = \frac{1}{3} \neq 1$, donc f est la composée commutative d'une homothétie et d'une rotation.

Éléments caractéristiques

Rapport : $k = |a| = \frac{1}{3}$

Angle de rotation θ : $\theta = \text{Arg}\left(\frac{\sqrt{2}}{6} + i\frac{\sqrt{2}}{6}\right) = -\frac{\pi}{2}$

Le centre H : $z_H = \frac{321 - 213\sqrt{2}}{84 - 58\sqrt{2}} + i\frac{59 - 58\sqrt{2}}{84 - 58\sqrt{2}}$.

- $i \circ g^{-1}$

$$g^{-1} : z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right)z + 2 - 2i$$

On trouve $i \circ g^{-1} : z' = \frac{\sqrt{2}}{2}z + 5 - 2i\sqrt{2}$

- L'écriture complexe de $i \circ g^{-1}$ est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et

$$|a| = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1. \text{ D'où } h \text{ est l'homothétie de}$$

rapport $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre G tel que $z_G =$

$$\frac{10 - 4i\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}.$$

3.a) Donnons l'écriture complexe de t, h et r

- On a $t : z' = z + 1 + 3i$

- $h : z' - z_1 = 5(z - z_1)$

$$h : z' = 5z + 4 - 8i$$

- $r : z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z + b$

$$\text{On a : } \frac{b}{1 - e^{i\frac{\pi}{6}}} = 3$$

$$\text{On trouve } r : z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z + \frac{6 - 3\sqrt{2} - 3i}{2}$$

b) Déterminons l'image de A(0 ; 1) et l'antécédent de O par f = hor o hot⁻¹.

$$\checkmark \quad \text{hor} : z' = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i\right)z + \frac{38 - 15\sqrt{2} - 31i}{2}$$

$$\checkmark \quad \text{hot}^{-1} : z' = 5z - 1 - 23i$$

Ainsi, on trouve : $\text{hor} \circ \text{hot}^{-1}$:

$$z' = \left(\frac{25\sqrt{3}}{2} + \frac{25i}{2}\right)z + \frac{153 - 5\sqrt{3} - 15\sqrt{2} - 36i - 115i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Soit } f(A) = A'. \text{ On a : } A' \left(\frac{128 - 5\sqrt{3} - 15\sqrt{2}}{2}, -18 - 45\sqrt{3} \right)$$

Antécédent de O

$$\text{Soit } f(K) = O. \text{ On trouve } K \left(\frac{51 - 38\sqrt{3} + 15\sqrt{6}}{100}, \frac{498 + 31\sqrt{3} - 15\sqrt{2}}{100} \right)$$

c) Caractérisons f

L'écriture complexe de f est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}$ et $|a| = 25$. Donc f est la composée commutative d'une homothétie et d'une rotation.

Éléments caractéristiques

Rapport : $k = |a| = 25$

Angle de rotation θ : $\theta = \text{Arg}\left(\frac{25\sqrt{3}}{2} + \frac{25i}{2}\right)$

$$\text{Soit } \theta = \frac{\pi}{6}$$

Le centre G : On trouve

$$G\left(\frac{\frac{1581-960\sqrt{3}-30\sqrt{2}+375\sqrt{6}}{1879-100\sqrt{3}}}{\frac{12378+545\sqrt{3}-375\sqrt{2}}{1879-100\sqrt{3}}}\right)$$

Déduction

$f = h \circ r$

homothétie h

h a pour rapport $k = 25$ et pour centre G . On trouve :

$$z' = 25z - \frac{24}{1879-100\sqrt{3}} [1581 - 90\sqrt{3} - 30\sqrt{2} + 375\sqrt{6} + i(12378 + 545\sqrt{3} - 375\sqrt{2})]$$

Rotation r

r a pour centre G et pour angle de rotation $\theta = \frac{\pi}{6}$. On trouve :

$$z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z + \frac{1-e^{i\frac{\pi}{6}}}{1879-100\sqrt{3}} (1581 - 960\sqrt{3} - 30\sqrt{2} + 375\sqrt{6} + i(12378 + 545\sqrt{3} - 375\sqrt{2})) \dots$$

Activité 2

1. Écriture complexe de f .

f étant un déplacement, son écriture complexe est de la forme $z' = az + b$.

$$f(A) = A \Rightarrow z_A = az_A + b$$

$$f(B) = C \Rightarrow z_C = az_B + b$$

$$\text{Ainsi, on a : } \begin{cases} az_A + b = z_A & (1) \\ az_B + b = z_C & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \text{ donne : } a = \frac{z_A - z_C}{z_A - z_B}$$

On détermine z_A et on trouve $z_A = -3 + 4i$

Enfin, on trouve $a = i$

$$\text{On a : } b = z_A - az_A = 1 + 7i$$

En définitive, on a $f : z' = iz + 1 + 7i$

Éléments caractéristiques

f est une rotation de centre $A(-3; 4)$ et d'angle de rotation $\frac{\pi}{2}$.

b) Caractérisons g

Posons : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$.

$$\text{On a : } x' + iy' = x + y + 2 + i(-x + y - 1)$$

$$\Rightarrow x' + iy' = x + iy - i(x + iy) + 2 - i$$

$$\Rightarrow z' = z - iz + 2 - i$$

$$\text{Soit } z' = (1 - i)z + 2 - i$$

g est la composée commutative d'une homothétie caractérisée par son rapport $k = \sqrt{2}$, son angle $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ et son centre $I(-1; -2)$.

2. Image de (D) par g

$$(D) : 2x + y - 1 = 0$$

On a g :

$$\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x' - y' - 3) \\ y = \frac{1}{2}(x' + y' - 1) \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } g(D) = D' \Leftrightarrow 2 \times \frac{1}{2}(x' - y' - 3) + \frac{1}{2}(x' + y' - 1) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x' - y' - 9 = 0$$

$$\text{Soit } (D') : 3x - y - 9 = 0.$$

3. Image de (c) par g .

Soit $g(c) = c'$. On a c' qui a pour centre G' et pour rayon r' où G' et r' sont respectivement les images par g de G et r .

On trouve $G'(2; -3)$ et $r' = kr = 2\sqrt{2}$.

Ainsi, l'image du cercle (c) par g est le cercle (c') de centre $G'(2; -3)$ et de rayon $r = 2\sqrt{2}$.

NB : On peut également déterminer (c') autrement. Mais cette méthode est beaucoup plus longue :

On a : $(c) : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$
 $g(c)=c' \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}(x'-y'-3) - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(x'+y'-1) + 1\right)^2 = 4$
 $\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - 4x' + 6y' + 5 = 0$
 $\Leftrightarrow (x'-2)^2 + (y'+3)^2 = (2\sqrt{2})^2$
 On conclut de même que (c') a pour centre $G'(2; -3)$ pour rayon $r=2\sqrt{2}$.

4.a) Image de D par f

$$f(D)=D'(2; -3)$$

Image de ABCD

$f(A)=A$; $f(B)=C$; $f(D)=D'$ et
 $f(C)=C'(-1+4i)$
 Ainsi, $f(ABCD)=ACC'D'$
 (faire la construction)

5.a) Ecriture complexe de $f \circ g$

On trouve : $z' = (1+i)z + 10 + 5i$.

Expression analytique de $g \circ f$

Posons : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec
 $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$.

On a : $x' + iy' = (1+i)(x + iy) + 10 + 5i$

$$\Rightarrow x' + iy' = x - y + 10 + i(x + y + 5)$$

D'où

$$g \circ f : \begin{cases} x' = x - y + 10 \\ y' = x + y + 5 \end{cases}$$

Ecriture complexe de $f \circ g$

De façon analogue, on trouve :

$$f \circ g : \begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y + 9 \end{cases}$$

b) Donnons la nature et les éléments caractéristiques de $f \circ g$ et de $g \circ f$.

- L'écriture complexe de $g \circ f$ est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}$ et $|a| = \sqrt{2} \neq 1$, donc f est la composée

commutative d'une homothétie et d'une rotation. Elle est caractérisée par son rapport $k = \sqrt{2}$, son angle de rotation $\beta = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ et son centre $H(-5; 10)$.

- Un raisonnement analogue permet de dire que $f \circ g$ est la composée commutative d'une homothétie et d'une rotation. Elle est caractérisée par son rapport $k = \sqrt{2}$, son angle de rotation $\alpha = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ et son centre $K(-9; 2)$.

Activité 6

1.a) Identification

Les transformations f , g , i et k sont des déplacements car leur écriture complexe est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $|a| = 1$.

b) Précisons la nature et les éléments caractéristiques de f , g , h , i , j et k .

- f : $z' = i\bar{z} + 1 - i$

f est un antidéplacement. De Plus, $i(\overline{1-i}) + 1 - i = 0$, donc f est une réflexion plane.

Déterminons son axe.

Si $M(x + iy) \in (\Delta)$, alors M est invariant par f . Donc on a : $f(M)=M$

$$\Rightarrow x + iy = i(x - iy) + 1 - i$$

$$\Rightarrow x + iy = y + 1 + i(x - 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ y = x - 1 \end{cases} \text{ Soit } (\Delta) : x - y - 1 = 0.$$

En définitive, f est la réflexion plane d'axe

$$(\Delta) : x - y - 1 = 0.$$

- g : $z' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\bar{z} + 3i$

g est un antidéplacement. De plus, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\overline{3i}) + 3i = \frac{1}{2}(6i - 3i\sqrt{2} - 3\sqrt{2}) \neq 0$
 Donc g est une symétrie glissée.

Eléments caractéristiques

Vecteur de translation : $z_{\vec{u}} = \frac{a\bar{b}+b}{2}$

$$\frac{6i-3i\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{4}. \text{ Soit } \vec{u} \begin{pmatrix} \frac{-3\sqrt{2}}{4} \\ \frac{6-3\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

Axe (Δ) de la symétrie orthogonale

$$S_{\Delta} : z' = a\bar{z} + \frac{b-a\bar{b}}{2}$$

$$\text{Soit } z' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\bar{z} + \frac{6i+3i\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{4}$$

$$M \in (\Delta) \Leftrightarrow S_{\Delta}(M) = M$$

$$\Leftrightarrow x + iy = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x - iy) + \frac{6i+3i\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - y + \frac{3}{2}\right) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-x - y + \frac{3+3\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2 - \sqrt{2})x + \sqrt{2}y = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2}x + (2 + \sqrt{2})y = \frac{3\sqrt{2}+6}{2} \end{cases}$$

$$\det \begin{vmatrix} 2 - \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} \end{vmatrix} = (2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 0.$$

Donc $(\Delta) : (2 - \sqrt{2})x + \sqrt{2}y - \frac{3\sqrt{2}}{2} = 0.$

Retenons :

☞ Nous avons calculé le déterminant (det) pour s'assurer que les deux lignes du système sont équivalentes. Ce déterminant doit toujours être égal à 0 et ainsi l'une ou l'autre des deux lignes est l'équation de (Δ). Il faut noter que ce ne sont pas des droites différentes ; c'est la même droite. Les équations seront simplement différentes à une constante près. Par exemple, $x + y = 1$ et $2x + 2y = 2$ représentent l'équation d'une même droite. C'est le même cas ici. Il est à noter par ailleurs qu'on pourra aussi faire la somme ou la différence des deux lignes du système et trouver également une équation de (Δ).

☞ On peut également repérer (Δ). Il suffit de prendre un point quelconque A, de déterminer son image A' par g. Le milieu I de [AA'] appartient à Δ . Ainsi, un repère de (Δ) est : (I ; $\vec{u}$) avec $\vec{u}$ le vecteur de translation. On détermine par la suite une représentation paramétrique plane de (Δ) à partir de laquelle on détermine son équation cartésienne.

• H: $z' = (1 - i)\bar{z} + 2i$

L'écriture complexe de h est de la forme $z' = a\bar{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $|a| = \sqrt{2} \neq 1$, d'où h est la composée commutative d'une réflexion et d'une homothétie.

Eléments caractéristiques

Rapport : $k = \sqrt{2}$

Centre Ω : $z_{\Omega} = \frac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2} = \frac{(1-i)(-2i)(2i)}{1-(1-i)(1+i)} = 2$

Soit $\Omega(2 ; 0)$

Axe de la symétrie Δ :

$H = h \circ S_{\Delta}$

Soit $M(x; y) \in \Delta$ et $M(x'; y')$ son image par H.

On a $S_{\Delta}(M) = M$

Donc $h \circ S_{\Delta}(M) = M' \Leftrightarrow h(M) = M'$

$\Leftrightarrow \vec{\Omega M'} = \sqrt{2} \vec{\Omega M}$

$\Leftrightarrow z' - z_{\Omega} = \sqrt{2}(z - z_{\Omega})$ (d'où cette relation énoncée dans le cours ; on peut l'appliquer directement).

Ainsi, on a : $(1 - i)\bar{z} + 2i = \sqrt{2}z - 2\sqrt{2} + 2$

Posons : $z = x + iy$

On a : $\bar{z} = x - iy$

Ainsi, on a : $(1 - i)(x - iy) + 2i =$

$\sqrt{2}(x + iy) - 2\sqrt{2} + 2$

$\Rightarrow \begin{cases} x - y = \sqrt{2}x - 2\sqrt{2} + 2 \\ x + y - 2 = -\sqrt{2}y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (1 - \sqrt{2})x - y = 2 - 2\sqrt{2} \\ x + (1 + \sqrt{2})y = 2 \end{cases}$

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 1 + \sqrt{2} \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{D'où } (\Delta) : (1 - \sqrt{2})x - y = 2 - 2\sqrt{2}$$

$$\text{ou } x + (1 + \sqrt{2})y = 2$$

$$\bullet \text{ i) : } z' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - i\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \bar{z} + 3i - 1$$

i est un antidéplacement. De plus,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - i\sqrt{\frac{2}{3}} \right) (3i - 1) + 3i - 1 =$$

$$\frac{-1 - 3\sqrt{2} - \sqrt{3} + i(\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 3)}{\sqrt{3}} \neq 0, \text{ donc i est une}$$

symétrie glissée.

Éléments caractéristiques.

Vecteur de translation : $z_{\vec{u}} = \frac{a\bar{b} + b}{2}$; on trouve

$$\vec{u} \left(\frac{\frac{-1 - 3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}{\frac{-3 + \sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}} \right)$$

Axe (D) de la symétrie orthogonale :

$$S_{(D)} : z' = a\bar{z} + \frac{b - a\bar{b}}{2}$$

$$\text{Soit } z' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) \bar{z} + \frac{1 + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} + i(3 + 3\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2\sqrt{3}}$$

$S_{(D)}(M) = M$. On débouche sur le système :

$$\begin{cases} x = \frac{2x - 2y\sqrt{2} + 1 + 3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ y = \frac{-2x\sqrt{2} - 2y + 3 + 3\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\det \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} - 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{3} + 2 \end{vmatrix} = 0$$

D'où (D) :

$$(2\sqrt{3} - 2)x + 2\sqrt{2}y - 1 - 3\sqrt{2} + \sqrt{3} = 0$$

$$\bullet \text{ J: } z' = -3i\bar{z} + 1 - 2i$$

L'écriture complexe de j est de la forme

$z' = a\bar{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$; donc j est la composée commutative d'une réflexion et d'une homothétie.

Éléments caractéristiques

Rapport : $k = \sqrt{3}$

$$\text{Centre I : } z_1 = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2} = \frac{-7 + 5i}{8}$$

$$\text{Soit } I \left(-\frac{7}{8}; \frac{5}{8} \right)$$

Axe (Δ) de la réflexion :

Soit $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ son image par j.

L'ensemble des points M appartenant à (Δ)

vérifient : $z' - z_1 = 3(z - z_1)$

$$\Rightarrow -3i\bar{z} + 1 - 2i - \frac{-7 + 5i}{8} = 3\left(z - \frac{-7 + 5i}{8}\right)$$

$$\Rightarrow -3i(x - iy) = 3(x + iy) + \frac{3 + 3i}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -y - \frac{1}{4} \\ y = -x - \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{Soit } (\Delta) : x + y + \frac{1}{4} = 0$$

$$\bullet \text{ k: } z' = e^{-i\frac{\pi}{2}} \bar{z} + 2 + 3i$$

k est un antidéplacement. De plus,

$-i(\bar{2} + 3i) + 2 + 3i = 5 + i \neq 0$, donc k est une symétrie glissée.

Éléments caractéristiques :

Vecteur de translation : $\vec{u}(\frac{5}{2}; \frac{1}{2})$

Axe (Δ) de la symétrie orthogonale :

$$S_{(\Delta)} : z' = -i\bar{z} + \frac{5 + 5i}{2}$$

$$\text{On en déduit } (\Delta) : x + y - \frac{5}{2} = 0$$

2) Caractérisons f ◦ g, g ◦ f et j ◦ k ◦ i.

$$\bullet \text{ f} \circ \text{g : } z' = i \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\sqrt{\frac{2}{2}} \right) \bar{z} + 3i \right) + 1 - i$$

$$z' = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) z + 4 - i$$

L'écriture complexe de f ◦ g est celle d'une similitude plane directe ($z' = az + b$) avec

$a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}$ et $|a| = 1$. D'où $f \circ g$ est une rotation de centre $I\left(\frac{5\sqrt{2}+8}{4+2\sqrt{2}}; \frac{3\sqrt{2}-2}{4+2\sqrt{2}}\right)$ et d'angle de rotation $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

- $g \circ h : z' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \overline{((1-i)\bar{z} + 2i)} + 3i$
 $z' = \sqrt{2}z - \sqrt{2} - i\sqrt{2} + 3i$

$g \circ h$ est l'homothétie de centre $K\left(\frac{2+\sqrt{2}}{-1-2\sqrt{2}}\right)$ et de rapport $k = \sqrt{2}$.

- $j \circ k \circ i$

On a $k \circ i : z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - i\frac{1}{\sqrt{3}}\right)z - 1 + 4i$

- Ainsi, on a $j \circ k \circ i :$

$$z' = (\sqrt{3} - i\sqrt{6})\bar{z} - 11 + i$$

$j \circ k \circ i$ est la composée commutative d'une homothétie et d'une réflexion caractérisée par

son rapport $k = 3$, son centre $H\left(\frac{11+\sqrt{6}+11\sqrt{3}}{8}; \frac{-1+\sqrt{3}-11\sqrt{6}}{8}\right)$

et son axe (Δ) définie par :

$$(\sqrt{3} - 3)x - \sqrt{6}y + \frac{\sqrt{6}-33+11\sqrt{3}}{4} = 0.$$

Activité 7

1.a)Ecriture complexe de S.

L'écriture complexe de S est de la forme

$$z' = a\bar{z} + b$$

$$(\Delta) : 2x - y + 1 = 0.$$

Les points A(0 ; 1) et B(1 ; 3) appartiennent à (Δ) . Ils sont donc invariants par S.

Ainsi, on a : $\begin{cases} z_A = a\bar{z}_A + b & (1) \\ z_B = a\bar{z}_B + b & (2) \end{cases}$

(1)-(2) donne $a = \frac{z_A - z_B}{\bar{z}_A - \bar{z}_B}$

On trouve $a = \frac{-3+4i}{5}$

$$b = z_A - a\bar{z}_A = \frac{5i-1}{5}$$

En définitive, on a :

$$S : z' = \frac{-3+4i}{5}\bar{z} + \frac{5i-1}{5}$$

b)Image de la conique

On est en présence d'une hyperbole

d'excentricité $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$, de sommets B(0 ; 2),

B'(0 ; -2) et de foyers F(0 ; $\sqrt{13}$) et

F'(0 ; $-\sqrt{13}$).

Soit $\begin{cases} B_1 = S(B) \\ B_2 = S(B') \\ F_1 = S(F) \\ F_2 = S(F') \end{cases}$; on a : $\begin{cases} B_1\left(\frac{7}{5}; \frac{11}{5}\right) \\ B_2\left(-\frac{9}{5}; -\frac{1}{5}\right) \\ F_1\left(\frac{4\sqrt{13}-1}{5}; \frac{3\sqrt{13}+5}{5}\right) \\ F_2\left(\frac{-1-4\sqrt{13}}{5}; \frac{5-3\sqrt{13}}{5}\right) \end{cases}$

L'image de cette hyperbole par S est

l'hyperbole de sommets B_1 et B_2 , de foyers F_1

et F_2 et d'excentricité $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$. (IL faut aussi

préciser les asymptotes de cette hyperbole. Ils sont les images par S des asymptotes de l'hyperbole « mère »).

2.Ecriture complexe de φ

$$\varphi : z' = a\bar{z} + \sqrt{5}$$

$$z_{\bar{u}} = \frac{a\bar{b}+b}{2} = \frac{a\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2\sqrt{5}} - \frac{i\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow a\sqrt{5} + \sqrt{5} = \sqrt{5} - i\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow a = -i. \text{ D'où } \boxed{\varphi : z' = -i\bar{z} + \sqrt{5}}$$

Ecriture complexe de φ'

$$S : z' = a\bar{z} + b$$

$$\text{On a : } z_{\bar{v}} = \frac{a\bar{b}+b}{2} = \frac{3\sqrt{2}+i(6-3\sqrt{2})}{4}$$

$$\Rightarrow a\bar{b} + b = \frac{3\sqrt{2}+i(6-3\sqrt{2})}{2} \quad (1)$$

Déterminons l'écriture complexe de la symétrie orthogonale S_{Δ}

$$S_{\Delta} : z' = a\bar{z} + b'$$

Les points A et B(0 ; $\frac{9}{2}$) appartiennent à (Δ) .

$$\text{On a : } \begin{cases} z_A = a\bar{z}_A + b' \\ z_B = a\bar{z}_B + b' \end{cases}$$

A partir de ce système, on trouve a et b' puis finalement S_Δ :

$$z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \bar{z} + i \frac{18 + 9\sqrt{2}}{4} - \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

En fait, $b' = \frac{-a\bar{b}+b}{2} = i \frac{18+9\sqrt{2}}{4} - \frac{9\sqrt{2}}{4}$

$$\Rightarrow -a\bar{b} + b = \frac{-9\sqrt{2} + i(18+9\sqrt{2})}{2} \quad (2)$$

De (1) et (2), on a :

$$\begin{cases} a\bar{b} + b = \frac{3\sqrt{2} + i(6-3\sqrt{2})}{2} \\ -a\bar{b} + b = \frac{-9\sqrt{2} + i(18+9\sqrt{2})}{2} \end{cases} ; \text{ on en déduit}$$

$$b = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + i \frac{12+3\sqrt{2}}{2}$$

D'où l'écriture complexe de S est donc :

$$z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \bar{z} - \frac{3\sqrt{2}}{2} + i \frac{12+3\sqrt{2}}{2}$$

3. Écriture complexe de T .

T est la composée commutative de l'homothétie h de centre M_0 et de rapport $k = \sqrt{2}$ et de la réflexion d'axe (D) .

On a $h : z' = \sqrt{2}z + 2 - 2\sqrt{2}$

L'écriture complexe de la réflexion $S_{(D)}$ d'axe

(D) est : $z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \bar{z} + 2 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$(T) = S_{(D)} \circ h$

$$\Rightarrow z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \overline{(\sqrt{2}z + 2 - 2\sqrt{2})} + 2 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

On trouve finalement :

$$(T) : z' = (1 - i)\bar{z} + 2i$$

b) Image de (D')

L'expression analytique de (T) est :

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -x - y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x' - y' + 2) \\ y' = -\frac{1}{2}(x' + y' - 2) \end{cases}$$

Ainsi, $T(D') = (D'') \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x' + y' - 2) -$

$$x' + y' - 7 = 0$$

$$\Rightarrow -3x' + y' - 12 = 0$$

Soit $(D'') : -3x + y - 12 = 0$

Image de (c)

$T(I) = I'(4; 4)$ et $T(r) = r' = 2\sqrt{2}$

(c) a pour image le cercle (c') de centre $I'(4; 4)$ et de rayon $r' = 2\sqrt{2}$.

Activité 8

1.a) Démonstration

$S_1 : z' = a\bar{z} + b$

S_1 étant la symétrie d'axe (AB) , alors elle laisse invariant les points A et B . On forme le système et on trouve effectivement :

$$z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i \right) \bar{z} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \right).$$

b) Dédution

On $S_1(C) = C'$

$$\Rightarrow z_{C'} = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i \right) (-i) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \right)$$

Soit $C \left(\frac{2}{5}; -\frac{1}{5} \right)$.

Démonstration

En posant $z = x + iy, z' = x' + iy'$

$(x; x'; y; y')$ des réels, on a :

$$x' + iy' = \frac{4x + 3y - 1}{5} + i \frac{3x - 4y + 3}{5}$$

z' est imaginaire pur si et seulement si :

$$\begin{cases} 4x + 3y - 1 = 0 \\ 3x - 4y + 3 \neq 0 \end{cases}$$

Réolvons $\begin{cases} 4x + 3y - 1 = 0 \\ 3x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$

On trouve le couple $(-5; 7)$

Etant donné que nous ne voulons pas que $3x - 4y + 3$ soit égal à 0 et puisqu'il existe le couple $(-5; 7)$ qui, simultanément, l'annule et vérifie $4x + 3y - 1 = 0$, alors on peut conclure que l'ensemble cherché est la droite (Δ) d'équation $4x + 3y - 1 = 0$ privée du point $H(-5; 7)$.

d) Vérification

Il faut prouver que les coordonnées de C' vérifient l'équation cartésienne de (Δ) .

2.a) Démonstration

Les droites (AB) et (D) sont définies dans le plan.

Le vecteur $\vec{u}(4; 3)$ et $\vec{AB}(3; 1)$ dirigent respectivement (D) et (AB). On remarque que $\vec{u}$ et $\vec{AB}$ ne sont pas colinéaires, par conséquent (AB) et (D) sont sécantes en un point P.

Déterminons w

On a : $\{P\} = (AB) \cap (D)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_P = 3t + 2 \\ y_P = t + 1 \\ 4x_P + 3y_P = 1 \end{cases} \text{ . En remplaçant les deux}$$

premières lignes dans la dernière, on trouve $t = \frac{4}{5}$ puis on remplace t et on trouve

$$P\left(\frac{22}{5}; \frac{9}{5}\right). \text{ Soit } w = \frac{22}{5} + \frac{9i}{5}$$

b) S_1 et S_2 étant des antidéplacements, la composée $S_2 \circ S_1$ est un déplacement, d'où une similitude plane directe de rapport $k = 1$.

c) Image de c et P.

$$f(C) = S_2 \circ S_1(C) = S_2(C') = C'$$

$$\text{Soit } f(C) = C'$$

$$f(P) = S_2 \circ S_1(P) = P. \text{ (car P appartient à (D) et à (AB)).}$$

d) Justification

f est la composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants en P. On en déduit que f est la rotation de centre P.

Activité 9

1) Démonstration

Il faut poser $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$ et

$$\text{trouver : } \begin{cases} x' = \frac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \frac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$$

2.a) L'ensemble des points invariants par f est la droite (Δ) d'équation $2x - 4y - 1 = 0$

b) f est la réflexion plane d'axe la droite (Δ).

3. Déterminer l'ensemble (D) des points M d'affixe z tels que z' soit réel

z' est réel si et seulement si $y' = 0$

$$\Leftrightarrow 4x - 3y = 2$$

$$\text{Soit (D) : } 4x - 3y = 2$$

4.a) Une solution particulière est $(x_0; y_0) = (2; 2)$.

b) Un raisonnement arithmétique permet de trouver l'ensemble solution :

$$\{(x; y) = (3k + 2; 4k + 2), k \in \mathbb{Z}\}.$$

5. Déterminons y

$$\text{Pour } x = 1, \text{ on a : } \begin{cases} 5x' = 4 + 4y \\ 5y' = 2 - 3y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4y = 5x' - 4 \\ 3y = -5y' + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y \equiv 1[5] \quad (1) \\ 3y \equiv 2[5] \quad (2) \end{cases}$$

$$(1)-(2) \text{ donne } y \equiv 4[5]$$

$$\text{D'où } y = 5k + 4, k \in \mathbb{Z}.$$

Activité 10

1. Equation cartésienne de (c)

$$(C) : |(1+i)z - 3+3i|^2 + |z - 6|^2 = 54.$$

$$\text{Posons : } z = x + iy; (x; y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{On a : } |(1+i)(x+iy) - 3+3i|^2 = |x+iy-6|^2 = 54$$

$$\Rightarrow (x-y-3)^2 + (x+y+3)^2 + (x-6)^2 + y^2 = 54$$

On développe puis on applique les formes canoniques des polynômes et on trouve :

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 8.$$

b) (C) est le cercle de centre I(2; -2) et de rayon $r = 2\sqrt{2}$.

c) Construire

2.a) Caractérisation géométrique de S et t

- s est la composée commutative d'une homothétie et d'une rotation caractérisée par son rapport $k = \sqrt{2}$, son centre $K(-3; -3)$ et son angle de rotation et son angle de rotation $\frac{\pi}{4}$.
- t est la translation de vecteur de translation $\vec{u}(-6; 0)$.

b) On a : $T(6; 0)$ et $S(0; -3)$

c) Calculons

- $s(SM) = OM_1$, donc $OM_1 = \sqrt{2}SM$

$$\text{Ainsi, } \frac{SM}{OM_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- $t(TM) = OM_2 \Rightarrow TM = OM_2$

$$\text{D'où } \frac{TM}{OM_2} = 1$$

d) Dédution

$$2SM^2 + TM^2 = 2|z - z_S|^2 + |z - z_T|^2$$

$$2SM^2 + TM^2 = 3|z + 3i|^2 + |z - 6|^2$$

$$\text{Nous savons par ailleurs que } \frac{SM}{OM_1} = \left| \frac{z - z_S}{z_1 - z_0} \right|$$

$$= \frac{|z + 3i|}{|(1+i)z - 3 + 3i|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |z + 3i| = \frac{|(1+i)z - 3 + 3i|}{\sqrt{2}}$$

$$\text{D'où } 2SM^2 + TM^2 = |(1+i)z - 3 + 3i|^2 + |z - 6|^2 = 54.$$

Soit $2SM^2 + TM^2 = 54$, (C) est la ligne de niveau 54 de l'application $2SM^2 + TM^2$.

e) On calcule et on trouve $G(2; -2)$

f. Montrons que l'ensemble (C) est défini par $MG^2 = 8$.

$$2SM^2 + TM^2 = 3MG^2 + 2SG^2 + TG^2 = 54$$

$$\Rightarrow MG^2 = \frac{54 - 2SG^2 - TG^2}{3}$$

$$\text{On a : } 2\vec{SG} + \vec{TG} = \vec{0} \Rightarrow \vec{SG} = \frac{1}{3}\vec{ST}$$

$$ST = |z_T - z_S| = 3\sqrt{5}$$

$$\text{Donc } SG = \sqrt{5}$$

$$\text{De } 2\vec{SG} + \vec{TG} = \vec{0}, \text{ on déduit que } \vec{TG} = \frac{2}{3}\vec{TS}$$

$$\text{Soit } TG = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Ainsi, } MG^2 = \frac{54 - 10 - 20}{3}$$

$$\text{Soit } MG^2 = 8$$

g) On déduit de f que (C) est le cercle de centre $G(2; -2)$ et de rayon $r = 2\sqrt{2}$.

Corrigés des Epreuves des BAC C

BAC C 2002

Exercice 1

1.a) Justifions que f est dérivable sur

$$\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right]$$

Soit $\mathcal{D}$ le domaine de définition de f.

$$\mathcal{D} = \{x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right] \text{ tq } 3 + \sqrt{3}\sin x + \cos x \neq 0\}$$

$$3 + \sqrt{3}\sin x + \cos x = 3 + 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

On en déduit que $3 + \sqrt{3}\sin x + \cos x \neq 0, \forall$

$$x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right].$$

$$\text{D'où } \mathcal{D} = \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right]$$

La fonction $x \mapsto 3 + \sqrt{3}\sin x + \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right]$

comme étant somme des fonctions $x \mapsto 3$,

$x \mapsto \sqrt{3}\sin x$ et $x \mapsto \cos x$ toutes dérivables

sur $\mathbb{R}$, soit sur $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right]$.

En conclusion, la fonction f est dérivable sur

$$\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right].$$

b) vérification.

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{(3 + \sqrt{3}\sin x + \cos x)^2}$$

$$\text{On a : } 4 - \left[\frac{1}{f(x)} - 3 \right]^2 = 4 - (\sqrt{3}\sin x + \cos x)^2$$

$$= 4 - 4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$D' \text{ où } \sqrt{4 - \left[\frac{1}{f(x)} - 3 \right]^2} = 2 \left| \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right|$$

D'autre part, pour tout élément x de $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right]$, $x + \frac{\pi}{6}$ est un élément de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, donc on a : $\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \geq 0$, d'où

$$-\sqrt{4 - \left[\frac{1}{f(x)} - 3 \right]^2} \times [f(x)]^2 = -\frac{2\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)}{(3 + \sqrt{3}\sin x + \cos x)^2} = -\frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{3 + \sqrt{3}\sin x + \cos x} = f'(x)$$

On a donc pour tout x de l'intervalle

$$\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right], f'(x) = -\sqrt{4 - \left[\frac{1}{f(x)} - 3 \right]^2} \times [f(x)]^2$$

c) Détermination de J.

On a pour tout x de $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right]$, $f'(x) \leq 0$ avec $f'(-\frac{2\pi}{3}) = f'(\frac{\pi}{3}) = 0$, donc f est strictement décroissante sur $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right]$.

Comme elle est de plus continue sur cet intervalle, alors on déduit que $J =$

$$\left[f\left(\frac{\pi}{3}\right); f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

$$\text{Soit } J = \left[\frac{1}{5}; 1 \right].$$

2.a) Démontrons que g est bijective

f est continue et strictement décroissante sur $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right]$, donc elle réalise une bijection de $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right]$ sur J . f est donc bijective.

b) Détermination de K

f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et pour tout x élément de $\mathcal{D}$, on a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{3}$.

$$\text{Par conséquent, } K = f\left(\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]\right)$$

$$\text{Soit } K = \left[\frac{1}{5}; 1 \right]$$

c) Exprimons, pour tout x élément K , $(g^{-1})'(x)$

$$\begin{aligned} (g^{-1})'(x) &= \frac{1}{g'[(g^{-1})]} \\ &= \frac{1}{-\sqrt{4 - \left[\frac{1}{g[(g^{-1})]} \right]^2} \times (g[(g^{-1})])^2} = -\frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{1}{x} - 3 \right) \times x^2}} \end{aligned}$$

Soit $(g^{-1})'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{-5x^2+6x+1}}$ pour tout $x \in K$.

3. a) Calculons $g(-\frac{\pi}{3})$ et $g(0)$

$$\text{On a : } g(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \text{ et } g(0) = \frac{1}{4}$$

b) Calcul de I.

On a $(g^{-1})'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{-5x^2+6x+1}}$, donc

$$I = -\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (g^{-1})'(x) dx = g^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) - g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Soit } I = \frac{\pi}{3}.$$

Exercice 2

1.) Déterminons les réelles a et b

On trouve $a = 2$ et $b = 1$.

2.) Démonstration

La fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = -4e^{-2x} \text{ et } h''(x) = 8e^{-2x}$$

$$\text{Donc } h''(x) - 6h'(x) + 9h(x) = 8e^{-2x} + 24e^{-2x} + 18e^{-2x} = 50e^{-2x}$$

$$\text{Par suite, } \forall x \in \mathbb{R}, (f-h)''(x) - 6(f-h)'(x) + 9(f-h)(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) - 6f'(x) + 9f(x) = h''(x) - 6h'(x) + 9h(x)$$

$$\Leftrightarrow f''(x) - 6f'(x) + 9f(x) = 50e^{-2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3.a) Résolution de l'équation différentielle.

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle (E') est $r^2 - 6r + 9 = 0$.

On a $r^2 - 6r + 9 = 0 \Leftrightarrow r = 3$, donc les solutions de (E') sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto (k_1x + k_2)e^{3x}$ où k_1 et k_2 sont des constantes réelles.

b) Dédution.

De 2), on déduit que f est une solution de (E) si et seulement si $f-h$ est une solution de (E') .

Il s'en suit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto (k_1x + k_2)e^{3x} + 2e^{-2x} \text{ où } k_1 \text{ et } k_2 \text{ sont des constantes réelles.}$$

4. Détermination de φ .

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} \varphi(0) = 3 \\ \varphi'(0) = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_2 + 2 = 3 \\ k_1 + 3k_2 - 4 = -10 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} k_2 = 1 \\ k_1 = -9 \end{cases}$$

$$D'où \varphi(x) = (-9x + 1)e^{3x} + 2e^{-2x}$$

Problème**Partie A****1.) Justifions que t est une translation**

On trouve : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AC}$; d'où t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}(1; 1; 0)$.

2.a) Calculons la distance d du point S au plan (ABC)

L'équation cartésienne du plan (ABC) est $z = 0$.

$$\text{On déduit que } d = \frac{1}{2} u \cdot l$$

b) Déduction

S n'appartient pas au plan (ABC) car d est non nulle, donc SABCD est une pyramide.

c) Calcul du volume

L'image de SABCD par t est une pyramide ayant même volume que SABCD, donc le volume de l'image de SABCD par t est :

$$V = \frac{1}{6} AB^2 d(S, (ABC)) \cdot u \cdot v$$

$$D'où V = \frac{1}{6} u \cdot v$$

3.a) Démontrons que (SAB) $\perp$ (SCD)

$\overrightarrow{AS} \wedge \overrightarrow{AB}(0; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ est un vecteur normal au plan (SAB) et $\overrightarrow{CS} \wedge \overrightarrow{CD}(0; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ est un vecteur normal au plan (SCD).

$$\text{Or, on a : } (\overrightarrow{AS} \wedge \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{CS} \wedge \overrightarrow{CD}) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

D'où (SAB) $\perp$ (SCD).

b) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de $f_1 \circ f_2$

$f_1 \circ f_2$ est le demi-tour d'axe $(\Delta) = (SAB) \cap (SCD)$, car (SAB) $\perp$ (SCD). (Δ) est la

droite passant par S et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{KA}$.

4.a) Déterminons l'expression analytique de f_1

$$\text{On trouve } f_1: \begin{cases} x' = x \\ y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

b) Déterminons l'image par $f_1 \circ f_2$ de la droite (SC)

L'image de la droite (SC) par $f_1 \circ f_2$ est la droite (SE).

5.) Déterminons la position relative de $t(P_1)$ et de $t(P_2)$

$t(P_1)$ et $t(P_2)$ sont deux plans perpendiculaires car P_1 et P_2 sont perpendiculaires et t est une translation.

Partie B**6. Détermination de r.**

Soit $M(x; y)$ et $N(x'; y')$ deux points quelconques de (π) .

$$\text{Soit } \begin{cases} r(M) = M'(x'; y') \\ r(N) = N'(x'; y') \end{cases}$$

$$\text{On a : } M'N'^2 = \frac{1}{2} [(x - x') - (y - y')]^2 + \frac{1}{2} [(x - x') - (y - y')]^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 = MN^2, \text{ donc } r \text{ est une isométrie de } (\pi).$$

Par ailleurs, l'ensemble des points invariants par (π) est le point $\Omega(1,0)$, donc r est une rotation de (π) de centre $\Omega(1,0)$.

D'autre part, soit $r(A) = A'$. On a

$$A' \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \text{ d'où } \cos(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega A'}) = \frac{\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega A'}}{\Omega A \times \Omega A'} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

En plaçant les points Ω , A et A' dans un repère, on trouve que l'angle $(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega A'})$ est direct ; d'où $\text{mes}(\overrightarrow{\Omega A}; \overrightarrow{\Omega A'}) = \frac{\pi}{4}$

En définitive, r est la rotation de centre $\Omega(1,0)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

7.a) Expression de z' en fonction de z .

$$\text{On trouve : } z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) z - i$$

b) Détermination de s.

s est la similitude directe du plan (π) de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre I d'affixe $1-i$.

b) Construisons (Γ)

L'équation réduite de (Γ) est :

$$\frac{(X+2)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{Y^2}{3^2} = 1$$

On déduit que (Γ) est l'ellipse de centre $O(-2; 0)$, d'axe focal (D) : $X = -2$, de demi distance focale $c = \frac{5}{2}$, de sommets $S_1(-2; 3)$, $S_2(-2; -3)$, $S_3(-\frac{1}{2}; 0)$ et $S_4(-\frac{7}{2}; 0)$

Il faut placer ces sommets dans un repère et tracer (Γ).

b) Déterminons la nature de (Γ')

$(\Gamma') = s(\Gamma)$ est une ellipse car (Γ) est une ellipse et s une similitude.

c) Précisons les coordonnées du centre et des sommets de (Γ')

$O' = s(O)$ est le centre de (Γ') et les sommets de (Γ') sont les points K, L, M et N tels que :

$$\begin{cases} K = s(S_1) \\ L = s(S_2) \\ M = s(S_3) \\ N = s(S_4) \end{cases}$$

On obtient :

$$O'(-1; -1); K(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}); L(\frac{1}{2}; -\frac{7}{2}); M(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{4}) \text{ et } N(-\frac{7}{4}; -\frac{11}{4}).$$

BAC C 2003

Exercice 1

1.) Déterminons l'entier naturel n.

Puisque $2^\alpha \times 3 \times 19^\beta$ est la décomposition en facteurs premiers de n, on a : $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.

Or α et β sont des entiers naturels tels que $(\alpha+1)(\beta+1)=8$ et $\alpha > \beta$, donc :

$$\begin{cases} \alpha + 1 = 8 \\ \beta + 1 = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \alpha + 1 = 4 \\ \beta + 1 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Soit } \begin{cases} \alpha = 7 \\ \beta = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Par suite, $n = 2^3 \times 3 \times 19$

Soit **$n = 456$** .

2) Détermination l'ensemble des diviseurs positifs de 456.

Soit D cet ensemble. On a : $456 = 2^3 \times 3 \times 19$, d'où $D = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 19, 24, 38, 57, 76, 114, 152, 228, 456\}$.

3°) Déterminons l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles (E) a des solutions dans $\mathbb{N}$

Un entier naturel x est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{N}, x - \lambda \in \mathbb{N} \\ x(x - \lambda) = 456 \end{cases}, \text{ ce qui équivaut à la}$$

proposition (P) : x et x - λ sont des diviseurs positifs de 456 dont le premier produit est 456.

Comme $\lambda \in \mathbb{N}$, on a : $x \geq x - \lambda$; d'où (P) équivaut à :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x = 456 \\ x - \lambda = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 228 \\ x - \lambda = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 152 \\ x - \lambda = 3 \end{cases} \text{ ou } \\ &\begin{cases} x = 114 \\ x - \lambda = 4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 76 \\ x - \lambda = 6 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 57 \\ x - \lambda = 8 \end{cases} \text{ ou } \\ &\begin{cases} x = 38 \\ x - \lambda = 12 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 24 \\ x - \lambda = 19 \end{cases} \end{aligned}$$

On trouve $\lambda \in \{455; 226; 149; 110; 70; 49; 26; 5\}$

L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles (E) a des solutions dans $\mathbb{N}$ est :

$$\{5; 26; 49; 70; 110; 149; 226; 456\}.$$

Exercice 2

1.) Calculons la probabilité de chacun des événements suivant :

$$\begin{aligned} \bullet p(S \cap \bar{M}) &= p(S) \times p_S(\bar{M}) = \frac{66}{100} \times \frac{25}{100} \\ p(S \cap \bar{M}) &= \mathbf{0,165} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet p(S \cap M) &= p(S) \times p_S(M) = \frac{66}{100} \times \frac{75}{100} \\ p(S \cap M) &= \mathbf{0,495} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet p(\bar{S} \cap \bar{M}) &= p(\bar{S}) \times p_{\bar{S}}(\bar{M}) = \frac{34}{100} \times \frac{87}{100} \\ p(\bar{S} \cap \bar{M}) &= \mathbf{0,2958} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet p(\bar{S} \cap M) &= p(\bar{S}) \times p_{\bar{S}}(M) = \frac{34}{100} \times \frac{13}{100} \\ p(\bar{S} \cap M) &= \mathbf{0,0442} \end{aligned}$$

Déduisons la probabilité de M

$$p(M) = p(S \cap \bar{M}) + p(\bar{S} \cap M)$$

$$\text{D'où } p(M) = 0,5392$$

2.) Déterminons la probabilité pour qu'un élève ne s'intéresse pas aux mathématiques soit en série scientifique.

Soit q cette probabilité.

$$\text{On a } \mu = p_{\bar{M}}(S) = \frac{p(S \cap \bar{M})}{p(M)} = \frac{1650}{4608}$$

$$\text{Soit } \mu \approx 0,3581.$$

3°) Déterminons la probabilité d'obtenir exactement 4 élèves s'intéressant aux mathématiques

Soit ρ cette probabilité.

$$\text{On a } \rho = C_4^7 [p(M)]^4 [p(\bar{M})]^3$$

$$\text{Soit } \rho = 0,2895.$$

Problème**Partie A****1.a) Déterminons (Γ_1)**

Soit f_1 la restriction de f à $] -\infty; 3]$. On a :

$$\forall x \in] -\infty; 3], f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}, \text{ donc } \forall$$

$$x \in] -\infty; 1], f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5} \text{ et } \forall$$

$$x \in [1; 3], f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$$

Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$$M \in (\Gamma_1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{x^2 - 6x + 5} \\ x \in] -\infty; 1] \end{cases} \text{ ou}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{-x^2 + 6x - 5} \\ x \in [1; 3] \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} y = \sqrt{x^2 - 6x + 5} \\ x \in] -\infty; 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x \in] -\infty; 1] \\ y^2 = x^2 - 6x + 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x \in] -\infty; 1] \\ \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} y = \sqrt{-x^2 + 6x - 5} \\ x \in [1; 3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x \in [1; 3] \\ y^2 = -x^2 + 6x - 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x \in [1; 3] \\ \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

Donc $M \in (\Gamma_1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x \in] -\infty; 1] \\ \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y \geq 0 \\ x \in [1; 3] \\ \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

Par suite, (H) est l'hyperbole d'équation

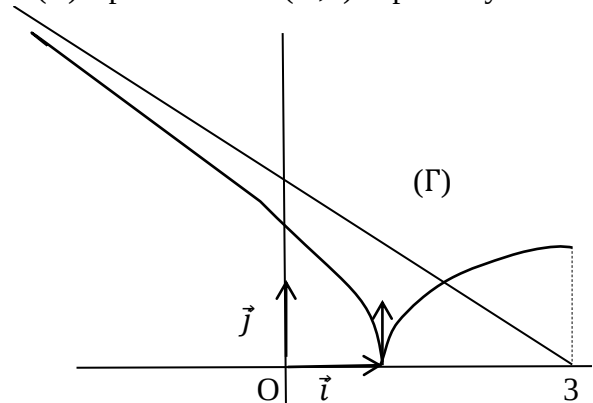
$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1 \text{ et (C) le cercle d'équation } (x-3)^2 + y^2 = 4.$$

b) Construisons la courbe (Γ_1)

$(\Gamma_1) = \{M(x; y) \in (H) \cup (C) \text{ tq } x \in] -\infty; 3] \text{ et } y \geq 0\}$

• (H) a pour centre $\Omega(3; 0)$. Dans le repère $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$, les sommets de (H) sont $A(2; 0)$ et $A'(-2; 0)$. Les asymptotes de (H) sont les droites d'équations : $Y = X$ et $Y = -X$ dans le repère $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$.

• (C) a pour centre $\Omega(3; 0)$ et pour rayon 2.

**c) Valeur de $\int_1^3 f_m(x) dx$**

$\int_1^3 f_m(x) dx$ est l'aire en unité d'aire d'un quart de disque de centre Ω et de rayon 2 ;

$$\text{d'où } \int_1^3 f_m(x) dx = \frac{1}{4} \times 4$$

$$\text{Soit } \int_1^3 f_m(x) dx = \pi.$$

2. Etudions suivant les valeurs de m les variations de f_m sur $]3; +\infty[$

$$\forall x \in]3; +\infty[, f_m(x) = (x-3) - m \ln(x-3)$$

f_m est continue et dérivable sur $]3; +\infty[$ et on

$$a : \forall x \in]3; +\infty[, f'_m(x) = 1 - \frac{m}{x-3}$$

On étudie de façon claire et précise le signe de $f'_m(x)$ suivant les valeurs de m et on déduit le sens de variation de f_m puis on établit les tableaux ci-contre :

- 1^{er} cas : $m < 0$.

x	3	$+\infty$
$f'_m(x)$	+	
$f_m(x)$	$-\infty$	$+\infty$

- 2^{ème} cas : $m > 0$.

x	3	$m+3$	$+\infty$
$f'_m(x)$	-	o	+
$f_m(x)$	$+\infty$	α_m	$+\infty$

$$\alpha_m = f_m(m+3) = m - m \ln(m)$$

- 3^{ème} cas : $m = 0$

x	3	$+\infty$
$f'_m(x)$	+	
$f_m(x)$	0	$+\infty$

3.a) D'après l'étude des variations de f_m , sur $]3; +\infty[$, on a : $I =]0; +\infty[$.

b) Déterminons l'ensemble décrit par B_m lorsque m varie dans I .

On a $B_m(m+3; m - m \ln(m))$

Posons : $\begin{cases} x = m + 3 \\ y = m - m \ln(m) \end{cases} (m > 0)$

Ce système équivaut à :

$$\begin{cases} x > 3 \\ y = (x-3)[1 - \ln(x-3)] \end{cases}$$

Par conséquent, lorsque m varie dans I , B_m décrit la courbe d'équation :

$$y = (x-3)[1 - \ln(x-3)]$$

4.a) Etudions suivant les valeurs de m , la position relative de (C_m) et de la droite (Δ) d'équation $y=x-3$

$$\forall x \in]3, +\infty[, f_m(x) - (x-3) = -m \ln(x-3)$$

1^{er} cas : $m < 0$

• Pour $x > 4$, $f_m(x) - (x-3) > 0$, donc (C_m) est au-dessus de (Δ) sur $]4; +\infty[$.

• Pour $3 < x < 4$, $f_m(x) - (x-3) < 0$, donc (C_m) est en dessous de (Δ) sur $]3; 4[$.

• Pour $x = 4$, $f_m(x) - (x-3) = 0$, donc (C_m) et (Δ) se rencontrent au point de coordonnées $(4; 1)$.

2^{ème} cas : $m > 0$

• Pour $x > 4$, $f_m(x) - (x-3) < 0$, donc (C_m) est en dessous de (Δ) sur $]4; +\infty[$.

• Pour $3 < x < 4$, $f_m(x) - (x-3) > 0$, donc (C_m) est au-dessus de (Δ) sur $]3; 4[$.

• Pour $x = 4$, $f_m(x) - (x-3) = 0$, donc (C_m) et (Δ) se rencontrent au point de coordonnées $(4; 1)$.

3^{ème} cas : $m = 0$.

Alors, pour tout $x \in]3, +\infty[$,

$$f_m(x) - (x-3) = 0$$

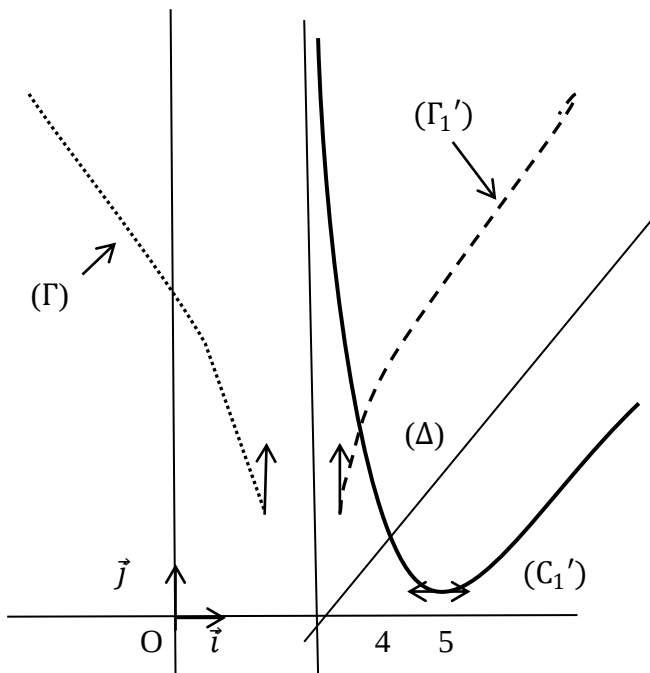
Donc (C_0) coïncide avec (Δ) sur $]3, +\infty[$.

b) Construisons la courbe (C_2)

Le tableau de variation de f_2 est:

x	3	5	$+\infty$
$f'_2(x)$	-	o	+
$f_2(x)$	$+\infty$	$2-2\ln 2$	$+\infty$

La droite d'équation $x = 3$ est asymptote à (C_2) et on établira que (C_2) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = x$.



c) Calculons l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_2) , la droite (Δ) et les droites d'équation $x=4$ et $x=\lambda$

Soit ρ cette aire.

On calcule et on trouve :

$$\rho = [2(\lambda-3)\ln(\lambda-3) - 2\lambda + 8] \text{ cm}^2.$$

Partie B

5.) Déterminons l'image (Γ) de (C_2) par r

A partir de l'écriture complexe de r , on déduit son expression analytique :

$$\begin{cases} x' = -y + 3 \\ y' = x - 3 \end{cases}$$

$M'(x'; y') \in (\Gamma) \Leftrightarrow \exists M(x; y) \in (C_2) \text{ tq } r(M) = M'.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 - 2\ln(x - 3); x \geq 5 \\ y = -x' + 3 \\ x = y' + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y' + 3 \\ y = -x' + 3 \\ x \geq 5 \\ -x' + 3 = y' - 2\ln y' \end{cases}$$

(Γ) est la courbe d'équation $y - 2\ln y = -x + 3$ avec $y \geq 2$.

6.a) Démonstration

$J \in (\Delta)$, donc il existe une et une seule droite (Δ') passant par J telle que : $r = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$; (Δ') est

l'image de (Δ) par la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{4}$, donc (Δ') est la droite d'équation : $x = 3$.

b) Méthode géométrique pour la construction de la courbe (Γ)

On construit : $s_{\Delta}(C_2') = (\Gamma_1')$ puis $s_{\Delta'}(\Gamma_1') = (\Gamma)$.

c) Construisons (Γ)
(voir figure).

BAC C 2004

Exercice 1

1.a. Déterminons la probabilité pour que f soit une similitude plane directe.

Il faut d'abord réaliser un tableau qui fournit les couples $(u; v)$ possibles de l'expérience.

Soit p la probabilité demandée.

L'écriture complexe de f étant de la forme

$z' = az + b$, f est une similitude directe si et seulement si $a \in \mathbb{C}^*$.

$a \in \mathbb{C}^* \Leftrightarrow (u; v) \neq (0; 0)$.

A l'aide du tableau, on trouve $p = \frac{35}{36}$.

b. Calculons la probabilité pour que g soit un antidéplacement.

L'écriture complexe de g étant de la forme

$z' = \alpha \bar{z} + \beta$ ($\alpha = \bar{\alpha}$); g est un

antidéplacement si et seulement si $|\alpha| = 1$, c'est-à-dire $|\alpha| = 1$.

La probabilité q demandée est $q = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

2) Calculons la probabilité de chacun des événements suivants :

• **A** : f est une rotation d'angle droit si et seulement si $a = i$ ou $a = -i$

On a : $p(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

• **B** : f est une homothétie si et seulement si $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.

On a $p(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

• C : « f est une similitude directe plane de centre I ».

Repère considéré (O, I, J), donc I(1 ; 0).

L'écriture complexe de f étant $z' = az + 1 + i$

Le centre I de f a pour affixe $\frac{1+i}{1-a} = 1$, soit

$a = -i$, d'où $(u ; v) = (0 ; -1)$.

On a $p(C) = \frac{1}{36}$.

3.a) Déterminons la nature de h

On trouve $h : z' = 2i\bar{z} + 2 + i$

h est une similitude plane indirecte. Plus précisément, c'est la composée commutative d'une homothétie et d'une réflexion plane.

b) Eléments caractéristiques.

Rapport : $k = 2$

Centre : $\Omega(-\frac{4}{3}; -\frac{5}{3})$

Axe (D) : on trouve : $x - y - \frac{1}{3} = 0$

c) Coordonnées du centre et des sommets de $h^{-1}(E)$.

L'expression analytique de h est :

$$\begin{cases} x' = 2y + 2 \\ y' = 2x + 1 \end{cases}$$

$h^{-1}(E)$ a pour équation $(2y + 2)^2 + 4(2x + 1)^2 = 2$.

$$\text{Soit } \frac{(x+\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{8}} + \frac{(y+1)^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

Le centre O' de $h^{-1}(E)$ a pour coordonnées $(-\frac{1}{2}; -1)$.

Les sommets de $h^{-1}(E)$ dans le repère (O, I, J) sont :

$$S_1(\frac{\sqrt{2}}{4}; 0), S'_1(\frac{\sqrt{2}}{4}; 0), S_2(0; \frac{\sqrt{2}}{2}), S'_2(0; -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

Exercice 2

1.a) Déterminons l'ensemble de définition

D de u

$$u(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$$

On trouve $D =]-\infty; 0]$

b) Sens de variation de u

u est dérivable sur D et $\forall x \in D$, on a :

$$u'(x) = \frac{\ln 2(2^x + 2^{-x})}{2}$$

$\forall x \in D, u'(x) > 0$, donc u est strictement croissante sur $] -\infty; 0]$.

c) Tableau de variation

$\lim_{-\infty} u = -\infty$ et $u(0) = 0$.

Il faut dresser le tableau de variation.

2.a) Justifions que g est dérivable sur IR.

$$g(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + 1} dt$$

La fonction $v : x \mapsto \sqrt{t^2 + 1}$ est continue sur IR. g étant une primitive sur IR de la fonction v, alors elle est dérivable sur IR.

b) Précisons la fonction g', dérivée première de g sur IR

$$g'(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

3.a) Justifions que f est dérivable sur $] -\infty, 0]$

u est dérivable sur $] -\infty; 0]$ et g est dérivable sur IR, donc $f = g \circ u$ est dérivable sur $] -\infty; 0]$.

b) Calculons f'(x) pour tout nombre réel x appartenant à $] -\infty, 0]$.

$$\forall x \in] -\infty; 0], f'(x) = u'(x) \times g'[u(x)]$$

$$\text{Soit } f'(x) = \frac{\ln 2}{4} (2^{2x} - 2^{-2x} + 4x \ln 2)$$

c) Déduisons l'expression de f.

Remarquons que $f(0) = g(0) = 0$, donc f est la primitive de f' sur $] -\infty; 0]$, qui s'annule en 0.

On a donc $\forall x \in] -\infty; 0]$:

$$f(x) = \frac{1}{8} (2^{2x} - 2^{-2x} + 4x \ln 2)$$

Problème

Partie A

1.a) Démontrons que (EG) $\perp$ (DHF)

On a : (EG) $\perp$ (FH) (car diagonales d'un carré)
(EG) $\perp$ (DH) (car (DH) $\perp$ (EFG) et (EG) $\subset$ (EFG)).

Or (FH) et (DH) sont sécantes dans (DHF), donc (EG) $\perp$ (DHF).

Démontrons que (EB) $\perp$ (DHF)

(EB) $\perp$ (GD) (car (HC) $\perp$ (DG) et (HC) $\parallel$ (EB))

$(EB) \perp (FG)$ (car $(FG) \perp (ABF)$ et $(EB) \subset (ABF)$)

Comme (GD) et (FG) sont sécantes dans (DFG) , alors $(EB) \perp (DFG)$.

b) Dédisons que $(EB) \perp (P)$

(P) est le plan (BGE) .

$(EG) \perp (DFH)$ et $(DF) \subset (DFH)$, alors $(EG) \perp (DF)$.

$(EB) \perp (DFG)$ et $(DF) \subset (DFG)$, donc $(EB) \perp (DF)$.

(EG) et (EB) étant sécantes, alors $(DF) \perp (BGE)$, d'où $(DF) \perp (P)$.

2) a. Déterminons $(Q) \cap (P)$

$(BG) \subset (Q)$; $(BG) \subset (P)$ et $(Q) \neq (P)$, alors $(Q) \cap (P) = (BG)$.

b) Démontrons que $(DF) \parallel (Q)$

On a : $(DF) \perp (P)$, $(Q) \perp (P)$, donc $(DF) \parallel (Q)$.

3) a. Démontrons que A est le barycentre des points B,C et D affectés des coefficients que l'on déterminera.

Dans le carré ABCD, on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

D'où $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$, et $1-1+1 \neq 0$.

Donc A est le barycentre des points B, C, D affectés respectivement des coefficients 1, -1 et 1.

b. Déterminons l'ensemble S

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = MC^2 \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{MC} \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 0,$$

S est donc la sphère de diamètre $[AC]$.

4.) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de h

$$h : \overrightarrow{CM'} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{AM} = \vec{0}$$

Après transformation, on trouve $\overrightarrow{AM'} = 3\overrightarrow{AM}$

On déduit que h est l'homothétie de E de centre A et de rapport $k = 3$.

Partie B

5.a) Equation cartésienne de (P).

On trouve $(P) : x - y + z - 1 = 0$

b) Le point I a pour coordonnées $(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3})$

6) Déterminons une équation cartésienne de Q

Un repère de (Q) est : $(B ; \overrightarrow{BG}; \overrightarrow{DF})$. On déduit qu'une équation cartésienne de (Q) est :

$$2x + y - z - 2 = 0$$

7) Calculons le volume $\mathcal{V}$ de l'image par h de la pyramide IABCD de base ABCD.

Soit $\mathcal{R}$ le volume de la pyramide IABCD.

$$\mathcal{V} = 3^3 \times \mathcal{R} = 27\mathcal{R}$$

On a $\mathcal{R} = \frac{1}{3} \text{aire}(ABCD) \times d(I ; (ABC))$

$$\mathcal{R} = \frac{1}{3} \times 1 \text{cm}^2 \times \frac{2}{3} \text{cm} = \frac{2}{9} \text{cm}^3$$

$$\text{D'où } \mathcal{V} = 6 \text{cm}^3$$

Partie C

a) Démontrons que le milieu du segment $[MM']$ appartient au plan (p)

En remplaçant x' par son expression, on calcule et on trouve $\frac{x+x'}{2} - \frac{y+y'}{2} + \frac{z+z'}{2} - 1 = 0$
D'où le milieu de $[MM']$ appartient à (P) .

b) Démontrons que $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur normal de (P)

$$\overrightarrow{MM'} = \left(-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}\right) \overrightarrow{DF} \text{ et } \overrightarrow{DF} \text{ est}$$

vecteur normal à (P) , donc $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur normal à (P) .

9. Ensemble des points invariants par f

L'ensemble des points invariants par f est le plan $(P) : x - y + z - 1 = 0$

Nature et éléments caractéristiques de f.

On déduit de tout ce qui précède que f est la réflexion de plan (P) .

BAC C 2005

Exercice 1

1.) Démontrons que un et un seul des nombres p_1, p_2, p_3 est un multiple de 3

p_1, p_2 et p_3 sont des entiers naturels tels que :

$p_2 = p_1 + 2$ et $p_3 = p_1 + 4$.

• Si $p_1 = 3k$, ($k \in \mathbb{N}^*$), alors $p_2 = 3k + 2$ et $p_3 = 3k + 4$.

Dans ce cas, p_1 seul est multiple de 3.

• Si $p_1 = 3k+1$, alors $p_2 = 3k + 3$ et $p_3 = 3k+5$. Dans ce cas, p_2 seul est multiple de 3.

• Si $p_1 = 3k+2$, alors $p_2 = 3k + 4$ et $p_3 = 3k+6$. Dans ce cas, p_3 seul est multiple de 3.

De tout ce qui précède, on déduit que un et un seul des entiers p_1 , p_2 et p_3 est un multiple de 3.

b) Déterminons p_1, p_2 et p_3

Si l'un des entiers p_1 , p_2 et p_3 est multiple de 3 et il est premier, alors il est égal à 3.

Or le seul entier naturel premier inférieur à 3 est 2 et $3-2 \neq 2$. Donc **$p_1 = 3$** et par conséquent, **$p_2 = 5$ et $p_3 = 7$** .

2.a) Démontrons que l'on a : $y \equiv z[3]$

On a : $3x \equiv 0[3]$, $5y \equiv -y[3]$ et $7z \equiv z[3]$.

Donc $3x + 5y + 7z = 0 \Leftrightarrow 5y + 7z = -3x$

$\Leftrightarrow 5y + 7z \equiv 0[3]$

$\Leftrightarrow -y + z \equiv 0[3]$

$\Leftrightarrow y \equiv z[3]$

On a donc $y \equiv z[3]$.

b) Dédution

$y \equiv z[3] \Leftrightarrow y$ et z ont le même reste r dans la division euclidienne par 3.

Il existe alors $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $y = 3p + r$ et $z = 3q + r$ avec $r \in \{0, 1, 2\}$.

$3x + 5y + 7z = 0 \Leftrightarrow 3x + 15p + 21q + 12r = 0$

$\Leftrightarrow x = -5p - 7q - 4r$.

Les entiers x , y et z s'écrivent donc :

$$\begin{cases} x = -5p - 7q - 4r \\ y = 3p + r \\ z = 3q + r \end{cases}, r \in \{0, 1, 2\} \text{ et } (p, q) \in \mathbb{Z}^2$$

3.) Déterminons l'ensemble des points à coordonnées entières de (P) qui sont intérieurs au pavé ABCDEFGH

$M(x, y, z)$ appartient à (P), $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ et M est à l'intérieur du pavé ABCDEFGH si et seulement si :

$$\begin{cases} x = -5p - 7q - 4r \\ y = 3p + r \\ z = 3q + r \\ (x, y, z) \in I \times J \times K \end{cases}$$

$I = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$J = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et

$K = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

♣ Pour $y = -2$, on a $z = -2$ ou $z = 1$.

On a les triplets $(8, -2, -2)$ et $(1, -2, 1)$.

$(8, -2, -2) \notin I \times J \times K$ et $(1, -2, 1) \in I \times J \times K$

On déduit le point $M_1(1, -2, 1)$

♣ Pour $y = -1$ on a $z = -1$ ou $z = 2$.

On déduit les points $M_2(4; -1; -1)$ et

$M_3(-3; -1; 2)$.

♣ Pour $y = 0$, $z = 0$ et $x = 0$.

On a le point $O(0; 0; 0)$

♣ Pour $y = 1$, on a $z = -2$ ou $z = 1$.

On déduit les points $M_4(3; 1; -2)$ et

$M_5(-4; 1; 1)$.

♣ Pour $y = 2$, on a $z = -1$ ou $z = 2$.

On déduit le point $M_6(-1; 2; -1)$ car

$(-8; 2; 2) \notin I \times J \times K$

L'ensemble des points à coordonnées entières de (P) qui sont intérieurs au pavé est :

$\{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, O\}$.

Exercice 2

1.) Etudions les variations de g

$$g(x) = \frac{1}{x-1} + \ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)$$

g est définie, continue et dérivable sur

$\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ et on a :

$$\forall x \in \mathcal{D}, g'(x) = \frac{-1}{x(x-1)^2}$$

On en déduit que g est strictement croissante

sur $]-\infty; 0[$ puis strictement décroissante sur

chacun des intervalles $]0, 1[$ et $]1; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g = \lim_{x \rightarrow +\infty} g = 0; \lim_{x \rightarrow 0} g = +\infty; \lim_{x \rightarrow 1} g = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g = +\infty.$$

Il faut dresser le tableau des variations de g .

2.Démonstration.

Se prononcer sur la continuité et la monotonie de g par intervalle et trouver bien l'unique solution α telle que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

b) Signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

De tout ce qui précède, on a :

$$\begin{cases} g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]\alpha; 1[\\ g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\cup]0; \alpha[\cup]1; +\infty[\\ g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \end{cases}$$

3) a. Etudions la continuité de f en 1

f est définie sur $\mathcal{B} = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} e^{x \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right|} = 0 \text{ et } f(1) = 0$$

Donc f est continue en 1.

b) Démonstration

$$\begin{aligned} \clubsuit \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right|}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{e^{x \ln(1-x)}}{1-x} \times e^{-x \ln x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[-e^{(x-1) \ln(1-x)} \times e^{-x \ln x} \right] = -1 \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \ln(1-x) = 0$$

$$\begin{aligned} \clubsuit \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right|}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{e^{x \ln(x-1)}}{1-x} \times e^{-x \ln x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[e^{(x-1) \ln(x-1)} \times e^{-x \ln x} \right] = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \ln(x-1) = 0$$

3) a. Etudions la dérivabilité de f en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = -1 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$$

f est dérivable à gauche et à droite en 1 mais $f'_g(1) \neq f'_d(1)$, par conséquent, f n'est pas dérivable en 1.

Interprétation géométrique de chacun des résultats.

La courbe (C) admet au point $I(1; 0)$ deux demi-tangentes définies par :

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} y = x - 1 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

4.a. Etudions les variations de f

f est continue et dérivable sur $\mathcal{B}$ et on a :

$$f'(x) = g(x) e^{x \ln \left| 1 - \frac{1}{x} \right|}$$

On déduit de tout ce qui précède que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $] -\infty; 0[$, $]0; \alpha[$ et $]1; +\infty[$ puis strictement décroissante sur $[\alpha; 1[$.

En faisant un changement de variable, par exemple en posant $X = -\frac{1}{x}$, on trouve :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} f = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln |x-1| - x \ln x} = 1.$$

Le tableau des variations de f est le suivant :

x	$-\infty$	0	α	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+	-	+
$f(x)$	$\frac{1}{e}$	1	$f(\alpha)$	0	$\frac{1}{e}$

b. Prouvons que $f(\alpha) = e^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}$

$$f(\alpha) = e^{\alpha \ln \left| \frac{\alpha-1}{\alpha} \right|}$$

$$\text{On a } g(\alpha) = 0, \text{ donc } \left| \frac{\alpha-1}{\alpha} \right| = \frac{-1}{\alpha-1}$$

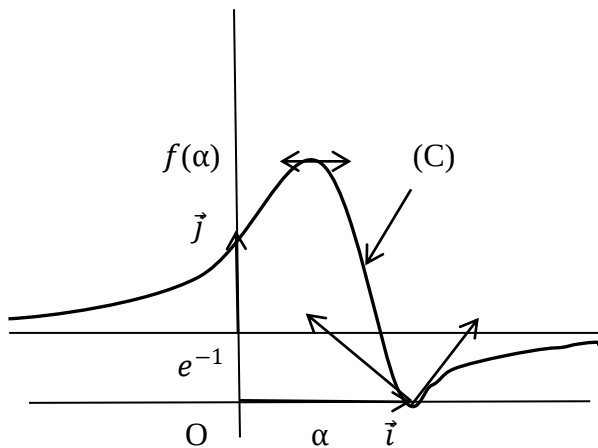
$$\text{D'où } f(\alpha) = e^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

Encadrement de $f(\alpha)$

On encadre $f(\alpha)$ et on trouve : $1 < f(\alpha) < \frac{1}{2}$

5) Construisons la courbe (C) et les demi-tangentes éventuelles à la courbe (C) en son point d'abscisse 1

La droite d'équation $y = e^{-1}$ est asymptote à la courbe (C).

**PROBLEME****1.a. Démontrons que $p(z)$ peut s'écrire sous la forme $p(z)=(z+1-i)Q(z)$.**

On a $p(1+i) = 0$, donc il existe un polynôme Q de degré 2 tel que $p(z) = (z+1-i)Q(z)$.

Déterminons $Q(z)$

$p(z)$ est divisible par $z+1-i$ et on a :

$$\frac{p(z)}{z+1-i} = z^2 - [3 + (2 + \sqrt{2})i]z + \sqrt{2}(-2+3i)$$

D'où on a $p(z) = (z+1-i)Q(z)$ avec

$$Q(z) = z^2 - [3 + (2 + \sqrt{2})i]z + \sqrt{2}(-2+3i).$$

b) Ecriture algébrique de d.

$$d = 3 + 4\sqrt{2} + 6(2 - \sqrt{2})i$$

c. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z)=0$

$$p(z) = 0 \Leftrightarrow z = -1 + i \text{ ou } Q(z) = 0.$$

L'ensemble solution est :

$$S = \{-1 + i; i\sqrt{2}; 3 + 2i\}$$

2.a) Calcul des affixes de $f(A)$ et $f(C)$

$$f(A) = A' \text{ et } f(C) = C'.$$

$$\text{On trouve } z_{A'} = -1 + i \text{ et } z_{C'} = i\sqrt{2}$$

b) Nature et les éléments caractéristiques de f

Tout en justifiant, on trouve que f est la symétrie orthogonale d'axe (AC) .

Partie B**1.a) Déterminons l'écriture complexe de h**

h a pour écriture complexe :

$$z' = \sqrt{2}z + \sqrt{2} - 1 + i(1 - \sqrt{2})$$

b) Ecriture complexe de g .

$$g = f \circ h$$

$$\text{On trouve } g : z' = (1 + i)\bar{z} - 1 + 3i$$

4.a) Montrons que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont orthogonaux si et seulement si : $5x+3y=15$

L'affixe du point N est

$$z_N = (1 + i)(x + y - 1) - 1 + 3i$$

$$\overrightarrow{AB}(4; 1) \text{ et } \overrightarrow{BN} \begin{pmatrix} x+y-4 \\ x-y+1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BN} = 0 \Leftrightarrow 4(x + y - 4) + (x - y + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow 5x + 3y = 15.$$

b) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $5x+3y=15$

Une solution évidente de cette équation est $(x; y) = (3; 0)$

Avec un raisonnement précis et logique, on trouve l'ensemble solution S :

$$S = \{(x; y) = (3k+3; -5k), k \in \mathbb{Z}\}$$

c) Dédution

Soit $M(x; y)$ avec $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ et $N = g(M)$

$$(x; y) \in [-5; 5] \times [-5; 5] \text{ et } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BN} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -5 \leq y \leq 5 \\ 5x + 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k + 3 \\ y = -5k \\ k \in \{-1; 0\} \end{cases}$$

Les points du plan recherchés sont $G(0; 5)$ et $F(3; 0)$.

Partie C**5) Démontrons que ϕ est une symétrie glissée.**

L'écriture complexe de ϕ est :

$$z' = i\bar{z} - 1 + 2i$$

La forme de cette écriture ajoutée à $|i| = 1$ nous permet de dire que ϕ est un antidéplacement.

Par ailleurs, ϕ n'admet pas de points invariants. Par conséquent, ϕ est une symétrie glissée.

6) Démontrons que $r = g \circ \phi$ a pour écriture complexe : $z' = (1-i)z$

En faisant la composée $g \circ \phi$:

$z' = (1 + i)(-iz - 1 - 2i) - 1 + 3i$, on trouve bien : $z' = (1 - i)z$

7.a) Déterminons une équation cartésienne de (Γ') = $r(\Gamma)$

L'expression analytique de r est :

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$$

On déduit que (Γ) a pour équation

$$\text{cartésienne : } x^2 + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

b) Démontrons que (Γ') est une ellipse dont on précisera le centre et les sommets.

On déduit de l'équation cartésienne de (Γ') qu'elle est une ellipse de centre $\Omega'(0 ; -2)$ et de sommets $K'(-1 ; 0)$; $L'(1 ; 0)$; $M'(0 ; -2)$ et $N'(0 ; 2)$ dans le repère $(\Omega', \vec{u}, \vec{v})$.

c) Démontrons que (Γ) est une ellipse dont on précisera le centre et les sommets

$$(\Gamma) = r^{-1}(\Gamma')$$

r étant une similitude plane directe, alors sa réciproque r^{-1} est aussi une similitude plane directe. Or les similitudes directes planes transforment une figure plane en une figure plane de même nature. Par conséquent $(\Gamma) = r^{-1}(\Gamma')$ est une ellipse.

Son centre $\Omega = r^{-1}(\Omega')$, d'où $\Omega(1 ; -1)$. Ses sommets K , L , M et N sont les images par r^{-1} de K' , L' , M' et N' .

Soit $K(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2})$; $L(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$; $M(2 ; -2)$ et $N(0 ; 0)$.

BAC C 2006

Exercice 1

1.) Résolvons dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

a) l'équation $3x - 4y = 6$

Un raisonnement précis et clair permet de trouver l'ensemble solution :

$$S = \{(x ; y) = (4k + 2 ; 3k), k \in \mathbb{Z}\}$$

b) Le système $\begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ y \equiv x^2 [8] \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ y \equiv x^2 [8] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4k + 2 \\ y = 3k \\ 3k \equiv (4k + 2)^2 [8] \end{cases}$$

$$3k \equiv (4k + 2)^2 [8] \Leftrightarrow 3k \equiv 4 [8]$$

$$\Leftrightarrow 3k \equiv 12 [8] \Leftrightarrow k \equiv 4 [8] \text{ car } \text{pgcd}(8 ; 3) = 1.$$

On a donc $k = 8t + 4, t \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ainsi, on a : } \begin{cases} x = 32t + 18 \\ y = 24t + 12 \end{cases}$$

L'ensemble solution S est donc :

$$S = \{(x ; y) = (32t + 18 ; 24t + 12), t \in \mathbb{Z}\}$$

2.) Déterminons suivant les valeurs de α le reste de la division euclidienne de S par 4.

$$x + y = 30 + 56n \Rightarrow x + y \equiv 2 [4], \text{ donc}$$

$$(x + y)^\alpha \equiv 2^\alpha [4]$$

Soit r le reste de la division euclidienne de S par 4.

♣ Si $\alpha = 0$, alors $r = 1$.

♣ Si $\alpha = 1$, alors $r = 2$.

♣ Si $\alpha = 2$, alors $r = 0$.

♣ Si $\alpha \geq 2$, alors $2^\alpha = 4 \cdot 2^{\alpha-2}$ et $2^{\alpha-2} \in \mathbb{N}^*$, donc si $\alpha \geq 2$, alors $r = 0$.

Exercice 2

1.a) Démontrons que

$$\underline{\underline{M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MI^2 + MJ^2 + MK^2 + ML^2 = 2a^2.}}$$

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = a^2$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = a^2$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2} (MA^2 + MB^2 - AB^2).$$

$$\text{Comme } I \text{ est milieu de } [AB], \text{ alors } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2} (2MI^2 + IA^2 + IB^2 - AB^2).$$

$$\text{Soit } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{a^2}{4}. \text{ On trouve de même}$$

$$\text{que : } \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = MJ^2 - \frac{a^2}{4} ; \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = MK^2 - \frac{a^2}{4} ;$$

$$\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = ML^2 - \frac{a^2}{4}.$$

$$\text{Ainsi, } M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MI^2 + MJ^2 + MK^2 + ML^2 - a^2 = a^2$$

$$\text{D'où } \underline{\underline{MI^2 + MJ^2 + MK^2 + ML^2 = 2a^2}}$$

b.) Justification

O est le centre de ABCD, donc O est l'isobarycentre des points A, B, C et D. Cela nous amène à écrire que :

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{OL} + \vec{LD} + \vec{OK} + \vec{KC} + \vec{OI} + \vec{IA} + \vec{OJ} + \vec{JB} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{OL} + \vec{OI} + \vec{OJ} + \vec{OK} = \vec{0} \text{ (Car } \vec{KC} + \vec{IA} = \vec{0} \text{ et } \vec{LD} + \vec{JB} = \vec{0})$$

D'où O est l'isobarycentre des points I, J, K et L.

c) Démontrons que $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MO^2 = \frac{a^2}{4}$.

$$\text{On a : } M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MI^2 + MJ^2 + MK^2 + ML^2 = 2a^2$$

$$\text{Posons : } f(M) = MI^2 + MJ^2 + MK^2 + ML^2$$

On a : $O = \text{bar}\{(I,1);(J,1);(K,1);(L,1)\}$, donc $f(M) = 4MO^2 + OI^2 + OJ^2 + OK^2 + OL^2$

$$f(M) = 4MO^2 + a^2$$

$$\text{Ainsi, } f(M) = 2a^2 \Leftrightarrow \boxed{MO^2 = \frac{a^2}{4}}$$

d'où le résultat.

d) Caractérisons (Γ) .

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MO^2 = \frac{a^2}{4}$, d'où (Γ) est le cercle de centre O et de rayon $r = \frac{a}{2}$

2.a) Déterminons la droite (Δ)

$(\Delta) = r[(AB)]$ où r est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

D'où $(\Delta) = (AC)$

b) Caractérisons f

$$f = r \circ s = \varphi \circ s \circ s = \varphi$$

donc f est la réflexion d'axe (AC).

c) Déterminons et construisons l'ensemble (Γ')

$(\Gamma) = C(0; \frac{a}{2})$ et f est une isométrie, alors $(\Gamma') = C[f(0); \frac{a}{2}]$.

Or $f(0) = 0$ car $0 \in (AC)$, d'où $(\Gamma') = (\Gamma)$.

PROBLEME

Première Partie

1.a) Etudions les variations de la fonction

u

u est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on

$$a : u'(x) = \frac{x-1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

On déduit que u est strictement décroissante sur $]0; 1]$ puis strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} u = +\infty$$

(Il faut dresser le tableau de variation).

b) Dédution

Il suffit de montrer que l'équation $u(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}_+^*$.

2.a) Démontrons que $D = [-1, +\infty[$

$D = \{x \in]-\infty; 0] \text{ tq } 1 - x^2 \geq 0\} \cup \{x \in]0; +\infty[\text{ tq } x - \ln x \neq 0\}$

On trouve bien $D = [-1, +\infty[$.

b) Démontrons que f est continue sur D

♣ Chacune des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1 +$

$\sqrt{1 - x^2}$ est continue sur $[-1; 0]$ et $\forall x \in$

$[-1; 0], 1 + \sqrt{1 - x^2} \neq 0$, donc f est continue sur $[-1; 0]$.

♣ f est continue sur $]0; +\infty[$.

$$\clubsuit \text{ De plus, } \lim_{x \rightarrow 0^+} f = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\frac{x}{\ln x} - 1} + 1 \right] = 0$$

Comme $f(0) = 0$, alors f est continue à droite en 0.

De tout ce qui précède, f est continue sur D.

c) Etudions la dérivabilité de f en 0

$$\clubsuit \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\clubsuit \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x - \ln x} + 1 = 0$$

f est dérivable à droite et à gauche en 0, mais $f'_d(0) \neq f'_g(0)$, donc f n'est pas dérivable en 0.

Interprétation géométrique

La courbe (c) admet au point $O(0; 0)$ deux demi-tangentes définies par les systèmes :

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y = \frac{1}{2}x \text{ et } y = 0 \end{cases}$$

d) Dérivabilité de f à droite en -1.

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty$, donc f n'est pas dérivable à droite en -1.

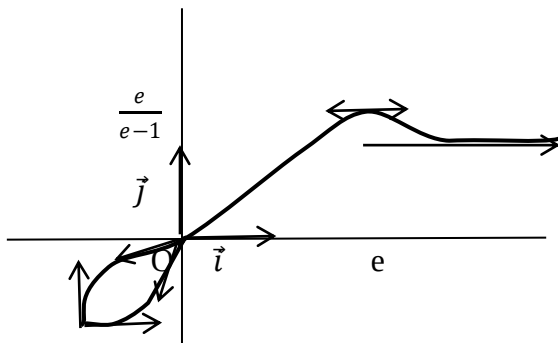
3.a) Etudions les variations de f

f est dérivable sur $] -1; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})} \quad \forall x \in]-1; 0[\\ f'(x) = \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2} \quad \forall x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

Le tableau ci-contre résume l'étude des variations de f .

x	-1	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	-
$f(x)$	-1		$\frac{e}{e-1}$	1

Tracé de la courbe (c)**Deuxième Partie****4.a) Démontrons que g est bijective .**

f est continue et strictement croissante sur I , donc g est une bijection.

b) Dressons le tableau de variation de g^{-1}

g^{-1} a le même sens de variation que g . Soit g^{-1} est continue et strictement croissante sur $[-1; 0]$ et les images varient de -1 à 0. (On a $(g^{-1})'(-1) = 0$)

(Dresser le tableau).

c) Déterminons $g^{-1}(x)$ pour que tout x élément de J

Un raisonnement précis et logique permet de trouver $g^{-1}(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $\forall x \in J$.

d) Calculons $\int_{-1}^0 [g^{-1}(x)] dx$

$$\int_{-1}^0 [g^{-1}(x)] dx = \int_{-1}^0 \frac{2x}{1+x^2} dx = -\ln 2$$

5.a) Calculons $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^0 (x - g^{-1}(x)) dx \times u. a$$

$$\mathcal{A} = \left(-\frac{1}{2} + \ln 2\right) u. a$$

b) Dédution

Soit $\mathcal{A}'$ l'aire du domaine du plan compris entre les courbes (C') et (Γ) .

$$\mathcal{A}' = 2\mathcal{A} = (-1 + 2\ln 2) u. a$$

Troisième Partie**6. Démonstration**

$$k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(u) = \operatorname{Im}(u) \\ \operatorname{Im}(u) < 0 \end{cases}$$

$$\arg(u) = \frac{5\pi}{4} [2\pi] \Leftrightarrow u = |u| \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow u = -\frac{\sqrt{2}}{2} |u| - i \frac{\sqrt{2}}{2} |u|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(u) = \operatorname{Im}(u) \\ \operatorname{Im}(u) < 0 \end{cases}$$

7.a) Etablissons le système

Soit M un point du plan d'affixe z .

$$M \in (\Gamma') \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y-1}{1+\sqrt{1-y^2+2y}} \\ 0 < y < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y-1}{1+\sqrt{1-(y-1)^2}} \\ 0 < y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = g(y-1) \\ -1 < y-1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = g(y-1) \\ 0 < y < 1 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$$

D'où le résultat.

b) Dédution

$$\begin{aligned}
 M \in (\Gamma') &\Leftrightarrow \begin{cases} x = g(y-1) \\ 0 < y < 1 \\ -1 < x < 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y-1 = g^{-1}(x) \\ 0 < y < 1 \\ -1 < x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = g^{-1}(x) + 1 \\ 0 < y < 1 \\ -1 < x < 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = g^{-1}(x) + 1 \\ -1 < x < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

c) Démontrons que (Γ') est l'image de (Γ_1) par une translation t à caractériser

$M \in (\Gamma') \Leftrightarrow \begin{cases} y = g^{-1}(x) + 1 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$; donc (Γ') a pour équation : $\begin{cases} y = g^{-1}(x) + 1 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$, par conséquent $t(\Gamma) = (\Gamma')$ où t est la translation de vecteur $\vec{e}_2$.

8.a) Déduisons que (Γ') est l'image de (C') par la composée d'une symétrie orthogonale et de la translation t .

Posons $(C_1) = (C') - \{O; A\}$
 $(\Gamma_1) = S_\Delta(C_1)$ avec $(\Delta) : y = x$.
 $(\Gamma') = t(\Gamma_1)$, d'où $(\Gamma') = (t \circ S_\Delta)(C_1)$.

b) Eléments caractéristiques de $t \circ S_\Delta$

$\vec{u}(1; 1)$ est un vecteur directeur de (Δ) et $\vec{e}_2 \cdot \vec{u} \neq 0$, donc $t \circ S_\Delta$ est une symétrie glissée.
 Son vecteur est $\vec{v}(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ et son axe est la droite d'équation $x - y + \frac{1}{2} = 0$.

BAC C 2007

Exercice 1

1.) Démontrons que O est le barycentre des points pondérés (A, 1); (B, -2) (C, 1) et (D, -2)

O étant le centre du carré ABCD, alors il est le milieu de la diagonale [AC] et [BD].

Ainsi, on a : $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{0}$ et $\vec{OB} + \vec{OD} = \vec{0}$

Soit $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{0}$ et $2\vec{OB} + 2\vec{OD} = \vec{0}$

Donc $\vec{OA} + \vec{OC} - 2\vec{OB} - 2\vec{OD} = \vec{0}$

Comme $1 + 1 - 2 - 2 = -2 \neq 0$, alors O est le barycentre des points pondérés (A, 1); (B, -2) (C, 1) et (D, -2).

2.) Déterminons l'ensemble (Γ)

En s'inspirant de la question précédente, on trouve après transformation :

$$MA^2 - 2MB^2 - MC^2 - 2MD^2 = -4 \Leftrightarrow MO^2 = 1.$$

Soit $(\Gamma) : MO = 1$.

On déduit que (Γ) est la sphère de centre O et de rayon 1.

3.a) Précisons la nature de d_1 o d_2

(OA) et (OB) sont perpendiculaires en O, donc d_1 o d_2 est le demi-tour dont l'axe (Δ) est la perpendiculaire commune à (OA) et (OB) en O. On a : $(\Delta) = (OS)$.

b) Déterminons l'image de (Γ) par d_1 o d_2

Soit (Γ') l'image de (Γ) par d_1 o d_2 .

(Γ') est une sphère. d_1 o $d_2(O) = O$ et d_1 o $d_2(A) = C$, donc d_1 o $d_2(\Gamma) = (\Gamma')$ est la sphère de centre O et de rayon $OC = 1$. (Γ) et (Γ') ont le même centre et même rayon, donc $(\Gamma) = (\Gamma')$, donc d_1 o $d_2(\Gamma) = (\Gamma)$.

c) Justifions que $(A; \vec{OB}; \vec{OS}; \vec{OA})$ est un repère orthonormé direct

ABCD est un carré de centre O tel que

$OA = 1$, donc $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \vec{OS}$, donc

$(\vec{OB}; \vec{OS}; \vec{OA})$ est une base directe et par suite

$(A; \vec{OB}; \vec{OS}; \vec{OA})$ est un repère orthonormé direct de (ε) .

4.a) Démontrons que t est une translation dont le vecteur est colinéaire à $\vec{OS}$

$t(M) = M' \Leftrightarrow \vec{MM'} = (\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}) \cap \vec{BC}$
 donc t est la translation de vecteur $\vec{u} = (\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}) \cap \vec{BC}$.

On a $\vec{u} = 2\vec{AC} \wedge \vec{BC} = 4\vec{OA} \wedge \vec{OB} = 4\vec{OS}$

En conclusion, t est la translation de vecteur $4\vec{OS}$.

b) Déterminons dans le repère $(A; \vec{OB}; \vec{OS}; \vec{OA})$ une équation cartésienne de l'image par t du plan (OAB).

Posons $(P) = t(OAB)$.

(P) est le plan parallèle à (OAB) et passe par $O' = t(O)$.

Un vecteur normal à (OAB) est $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OS}$, donc un vecteur normal à (P) est aussi $\overrightarrow{OS}(0; 1; 0)$.

On en déduit que (P) a pour équation : $y - 4 = 0$.

Exercice 2

1.a) Calculons $\int_0^x te^t dt$, pour x appartenant à $\mathbb{R}$

$$\int_0^x te^t dt = xe^x - e^x + 1$$

i) Exprimons $U(x)$ à l'aide d'une intégrale

U étant la primitive de u qui s'annule en 0 alors, on a : $U(x) = \int_0^x (te^t + a) dt, \forall x \in \mathbb{R}$.

ii) Déduisons $U(x)$ en fonction de x

De la question a, on déduit que :

$$U(x) = xe^x - e^x + 1 + ax, \forall x \in \mathbb{R}.$$

2.) Calculons $\int_0^1 f(x) dx$

$$\text{Posons } \rho = -2 \int_0^1 f(x) dx$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = xe^x + \rho$$

$$f(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \int_0^x (te^t + \rho) dt = \int_0^x te^t dt + \int_0^x \rho dt$$

$$f(x) = xe^x - e^x + 1 + \rho x$$

$$\text{On déduit que } \int_0^1 f(x) dx = \frac{3-e}{2}$$

PROBLEME

Partie A

1. Etudions les variations de f

f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on

$$a : \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{x^2 + 5}}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{-\infty} f = 0 \text{ et } \lim_{+\infty} f = +\infty$$

(Il faut dresser le tableau de variation de f).

2.a) Démontrons que g est bijection.

$f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ et comme f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $K = f(\mathbb{R}) =]0; +\infty[$.

b) Déterminons $g^{-1}(x)$ pour tout x élément de K

$$\text{On trouve } g^{-1}(x) = \frac{x^2 - 5}{2x}, \forall x \in K.$$

3°) a) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$y^2 - 2xy - 5 = 0$$

$$y^2 - 2xy - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) \in \mathbb{Z}^2 \\ y(y - 2x) = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y - 2x = 5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -1 \\ y - 2x = -5 \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} y = 5 \\ y - 2x = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -5 \\ y - 2x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases}$$

Soit S l'ensemble solution.

$$S = \{(x; y) = (-2; 1), (2; -1), (2; 5), (-2; -5)\}$$

b) Déduisons-en les points de la courbe $(\mathcal{E})$ dont les deux coordonnées sont des nombres entiers relatifs

$$\begin{cases} (x; y) \in \mathbb{Z}^2 \\ M(x; y) \in \mathbb{C} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) \in \mathbb{Z}^2 \\ y = x + \sqrt{x^2 + 5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x; y) \in \mathbb{Z}^2 \\ y - x \geq 0 \\ y^2 - 2xy - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x; y) \in \{(-2; 1), (2; 5)\}$$

Les points recherchés sont $A(-2; 1)$ et $B(2; 5)$

Partie B

4. a) Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe que l'on précisera.

Soit $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$.

$$\text{On a : } \overrightarrow{MM'} = (x' - x)\vec{u} + (y' - y)\vec{v}$$

$$\overrightarrow{MM'} = -2x(\vec{u} + \vec{v})$$

$$\overrightarrow{MM'} \neq \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{MM'} \text{ est colinéaire à } \vec{u} + \vec{v}, \text{ donc}$$

$\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe qui est celle du vecteur non nul $\vec{u} + \vec{v}$.

b) Démonstration

$$\overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{MM'} = -2x\vec{u} - 2y\vec{v}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x' - x = -2x \\ y' - y = -2x \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} x' = -x \\ y' = -2x + y \end{cases}$$

D'où l'application affine s du plan qui transforme M en M' a pour expression

$$\text{analytique : } \begin{cases} x' = -x \\ y' = -2x + y \end{cases}$$

5.a) L'ensemble des points invariants par s est la droite d'équation $x = 0$.

b) Démontrons que le milieu du segment $[MM']$ appartient à la droite de repère $(O, \vec{v})$

Soit I le milieu de $[MM']$.

Si M a pour coordonnées $(x; y)$, alors on a $I(0; -x+y)$, d'où I est un point de la droite de repère $(O; \vec{v})$.

c) Déterminons la nature de s .

♣ L'ensemble des points invariants par s est la droite de repère $(O; \vec{v})$.

♣ Pour tout point M d'image M' par s , le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u} + \vec{v}$. On déduit que s est l'affinité d'axe la droite de repère $(O; \vec{v})$, de direction celle du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$. Son rapport est -1 .

d°i) Déterminons l'image Δ' de Δ par s

On a $(\Delta') = s(\Delta)$.

On trouve que (Δ') est la droite d'équation $y = 2x$.

ii) Démontrons que Δ et Δ' sont les asymptotes de $(\mathcal{C})$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = 0$, donc la droite (Δ) est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$.

$$f(x) - 2x = \frac{5}{\sqrt{x^2+5}+x}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 0$, donc (Δ') est asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.

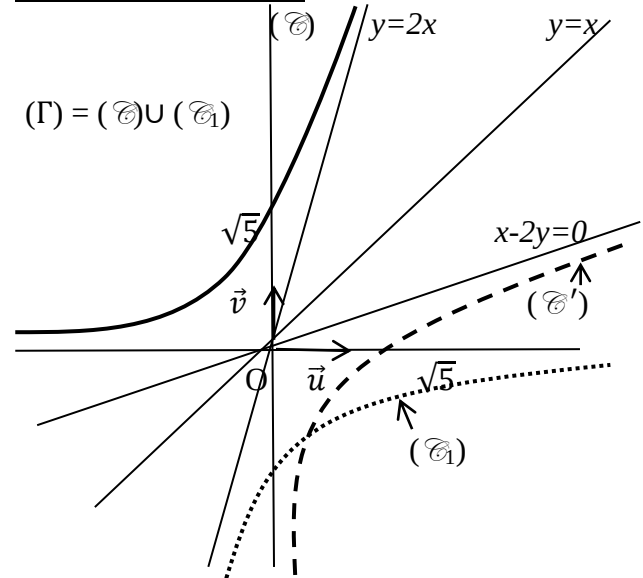
iii) Précisons les asymptotes de $(\mathcal{C}')$

$(\mathcal{C}')$ est l'image de $(\mathcal{C})$ par la réflexion S_d d'axe (d) d'équation $y = x$. On déduit que les

asymptotes de $(\mathcal{C}')$ sont les images de Δ et Δ' par S_d .

On trouve : $S_d(\Delta) : x = 0$ et $S_d(\Delta') : y = \frac{1}{2}x$

e) Construisons les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ dans le même repère.

**Partie C****6) Déterminons E**

En posant $z = x + iy$, on trouve $E = \mathbb{C} - E'$ avec $E' = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } z = x(1 + i)\}$

7.a) Démonstration

$$|z'| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left| \frac{2x-2i\sqrt{5}}{(x-y)(1-i)} \right| = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2xy - 5 = 0$$

(Γ) a pour équation cartésienne

$$y^2 - 2xy - 5 = 0.$$

$$M(x; y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow (y - x)^2 - x^2 - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow y - x = \sqrt{x^2 + 5} \text{ ou } y - x = -\sqrt{x^2 + 5}$$

$$\Leftrightarrow y = f(x) \text{ ou } y = f_1(x) \text{ avec}$$

$$f_1(x) = x - \sqrt{x^2 + 5}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, -f(-x) = -(-x + \sqrt{x^2 + 5})$$

$$= x - \sqrt{x^2 + 5} = f_1(x)$$

Donc la courbe $(\mathcal{C}_1)$ de f_1 est l'image de $(\mathcal{C})$ par la symétrie de centre O et $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow M \in (\mathcal{C}_1)$ ou $M \in (\mathcal{C})$; d'où $(\Gamma) = (\mathcal{C}) \cup (\mathcal{C}_1)$ où $(\mathcal{C}_1)$ est le symétrique de $(\mathcal{C})$ par rapport à O .

b. Construction de (Γ) : (voir figure)

c) Déterminons une équation cartésienne de (Γ) dans le repère $(O; \vec{u}; \vec{u}+2\vec{v})$

Soit $(x; y)$ les coordonnées de M dans le repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et $(X; Y)$ ses coordonnées dans le repère $(O; \vec{u}; \vec{u}+2\vec{v})$.

$$x\vec{u} + y\vec{v} = X\vec{u} + Y(\vec{u}+2\vec{v}) = (X+Y)\vec{u} + 2Y\vec{v}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x = X + Y \\ y = 2Y \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } y^2 - 2xy - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4Y^2 - 4Y(X+Y) - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow XY = -\frac{5}{4}$$

$$\text{Soit } (\Gamma) : XY = -\frac{5}{4}$$

Déduisons la nature de (Γ)

Dans le repère $(O; \vec{u}; \vec{u}+2\vec{v})$, (Γ) a une équation cartésienne de la forme $XY = k$, avec $k \in \mathbb{R}^*$, donc (Γ) est une hyperbole.

BAC C 2008**Exercice 1****1°) Démonstration**

• Pour tout nombre réel x , $\frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1} - 1 = -\frac{2}{3^{2x}+1}$

$\frac{2}{3^{2x}+1} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, donc $\frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1} - 1 < 0$, soit $\frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1} < 1$ (a)

• Pour tout nombre réel x , $\frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1} + 1 = \frac{2 \times 3^{2x}}{3^{2x}+1}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{2 \times 3^{2x}}{3^{2x}+1} > 0$, donc $\frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1} + 1 > 0$, soit

$$-1 < \frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1} \quad (b)$$

De (a) et (b), on déduit que pour tout nombre réel x , $-1 < \frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1} < 1$.

2.°) a) Démontrons que f est une application.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de f.

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } 3^{2x} + 1 \neq 0 \text{ et } \frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1} \in]-1; 1[$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, 3^{2x} + 1 > 0, \text{ donc } 3^{2x} + 1 \neq 0.$$

De la question précédente, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$-1 < \frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1} < 1, \text{ il en résulte que } \mathcal{D} = \mathbb{R} \text{ et alors}$$

f est une application.

b°) Etudions le sens de variation de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{4 \ln 3 \times 3^{2x}}{(3^{2x}+1)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

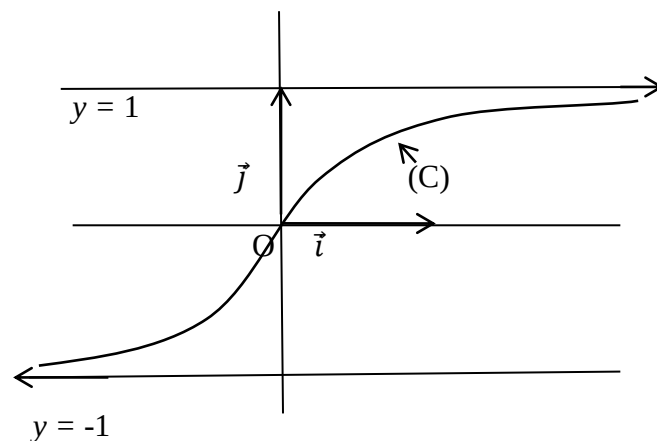
c) Tableau de variation de f

On calcule les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$ et on dresse le tableau de variation de f:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1	1

d) Construction (C)

Du tableau de variation de f, on déduit que les droites d'équations $y = -1$ et $y = 1$ sont asymptotes à la courbe (C) respectivement au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$.

**3°) a) Justifions que f est une bijection.**

f est une application de $\mathbb{R}$ vers $] -1; 1[$; de plus, f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) =] -1; 1[$, donc f est une bijection.

b) Justifions que g est dérivable sur $] -1; 1[$.

f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1; 1[$; f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée f' ne

s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $] -1; 1[$.

c) Calculons $g'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $] -1; 1[$.

g est dérivable sur $] -1; 1[$ et on a

$$\forall x \in] -1; 1[, g'(x) = \frac{1}{f'(g^{-1}(x))}$$

Soit $x \in] -1; 1[$ et $y \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = y$.

$$\text{On a donc } g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{(3^{2y}+1)^2}{4 \ln 3 \times 3^{2y}}$$

Par ailleurs, $g(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{2y}-1}{3^{2y}+1} = x \Leftrightarrow 3^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\text{Par suite, } g'(x) = \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}+1\right)^2}{4 \ln \left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$

$$\text{Soit } g'(x) = \frac{1}{\ln 3(1-x^2)}, \forall x \in] -1; 1[$$

EXERCICE 2

1°) Résolvons dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation : $3x^2 + 6x + 5 = 0$.

Comme $12 \equiv 5[7]$, alors $3x^2 + 6x + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3[(x+1)^2 - 4] = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x+1)(x-1) = 0$$

Puisque 7 est un nombre premier, $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ est un corps, alors $3(x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow$

$$x+1 = 0 \text{ ou } x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 6 \text{ ou } x = 1$$

L'ensemble solution dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ est donc $\{4; 1\}$.

2.a) Démontrons que : $3b^2 + 6b - 2 \equiv 0[7]$.

$$\begin{cases} A = \overline{361}^b \\ A = 3[7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in \mathbb{N}, b \geq 7 \\ A = 3b^2 + 6b + 1 \\ 3b^2 + 6b + 1 \equiv 3[7] \end{cases}$$

De $3b^2 + 6b + 1 \equiv 3[7]$, on déduit que $3b^2 + 6b - 2 \equiv 0[7]$

b) L'ensemble E.

$$b \in E \Leftrightarrow \begin{cases} b \in \mathbb{N}, b \geq 7 \\ 3b^2 + 6b + 5 \equiv 0[7] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \in \mathbb{N}, b \geq 7 \\ b \equiv 4[7] \text{ ou } b \equiv 1[7] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \in \mathbb{N}, b \geq 7 \\ b = 7q + 4 \text{ ou } b = 7q + 1, q \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b = 7q + 4 \text{ ou } b = 7q + 1 \text{ avec } q \in \mathbb{N}^*$$

Donc $E = \{7q + 4; 7q + 1 \text{ avec } q \in \mathbb{N}^*\}$.

a) Vérifions que b appartient à E.

$8 = 7 \times 1 + 1$, donc $b \in E$.

b) Ecriture décimale de A.

$A = 3(64) + 6(8) + 1$; soit **A = 241**.

c) Démontrons que A est un nombre premier

Les entiers naturels premiers p inférieurs ou égaux à $\sqrt{241}$ sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 et 13.

Le tableau ci-dessous présente le reste r de la division euclidienne de A par p .

p	2	3	5	7	11	13
R	1	1	1	3	10	7

D'après ce tableau, aucun reste n'est nul, par conséquent A est un nombre premier.

4.°) Résolvons dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue (x, y) : $x^2 + 6x = y^2 + 232$

Notons (E_1) cette équation.

$$(E_1) \Leftrightarrow (x+3)^2 - y^2 = 241$$

$$\Leftrightarrow (x+y+3)(x-y+3) = 241$$

241 est premier, donc

$$(E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3 = p \\ x-y+3 = q \end{cases} \text{ avec } (p; q) \in S =$$

$$\{(-241; -1); (-1; -41); (1; 241); (241; 1)\}$$

$$(E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p+q}{2} - 3 \\ y = \frac{p-q}{2} \end{cases} (p; q) \in S$$

$\{(118; 120); (120; -124); (-124; -120); (118; -120)\}$ est l'ensemble solution des couples $(x; y)$ solution de E_1 dans $\mathbb{Z}^2$.

PROBLEME

1. Exprimons z_1 en fonction de z

On trouve $z_1 = -i\bar{z} + 4\sqrt{2}(1+i)$

2.a) Démonstration

h a pour écriture complexe $z' = -2z$ et s a pour écriture complexe $z_1 = -i\bar{z} + 4\sqrt{2}(1+i)$, donc f a pour écriture complexe $z' = -2[-i\bar{z} + 4\sqrt{2}(1+i)]$
Soit $z' = 2i\bar{z} - 8\sqrt{2}(1+i)$.

b) Indiquons la nature et les éléments caractéristiques de f.

L'écriture complexe de f est de la forme $z' = a\bar{z} + b$, avec $a = 2i$ et $b = -8\sqrt{2}(1+i)$. De plus, $|a| = 2 \neq 1$, donc f est la similitude plane indirecte de rapport 2, de centre M_O d'affixe $z_o = \frac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2} = 8\sqrt{2}(1+i)$ et d'axe (D') , l'ensemble des points M du plan tels que

$\overrightarrow{M_O f(M)} = 2\overrightarrow{M_O M}$. (D') a pour équation $x - y = 0$.

3.a) Démonstration

H est le milieu de $[M_1M]$, donc $MH = \frac{1}{2}M_1M$
 $= \frac{1}{2}|z - z_1| = \left| \frac{z + i\bar{z} - 4\sqrt{2}(1+i)}{2} \right|$

b) Dédution

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow$

$$|z - (\sqrt{2} + i\sqrt{2})| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{z + i\bar{z} - 4\sqrt{2}(1+i)}{2} \right|$$

$$\Leftrightarrow MF = \frac{1}{\sqrt{2}} MH$$

$s(M) = M_1$ et H est le milieu de $[MM_1]$, donc H est le projeté orthogonal de M sur (D) . De plus, $F \notin (D)$ et $0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, donc (Γ) est l'ellipse de directrice (D) et d'excentricité $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4.a) Démonstration

$$M(x; y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow MF^2 = \frac{1}{2}d(M; D)$$

On a $MF^2 = x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 4$ et

$$[d(M; (D))]^2 = \frac{(x+y-4\sqrt{2})^2}{2} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy - 8\sqrt{2}(x+y) + 32}{2}$$

Ainsi, $M \in (\Gamma)$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 + y^2 - 4\sqrt{2}(x+y) + 4) = x^2 + y^2 + 2xy - 8\sqrt{2}(x+y) + 32$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 + y^2) - 2xy - 16 = 0$$

b) Démontrons que le point O est le centre de (Γ) .

Soit S_O la symétrie de centre O. Soit

$M'(x'; y')$ l'image de $M(x; y)$ par S_O .

O est le centre de (Γ) si pour tout point $M \in (\Gamma)$, on a $M' \in (\Gamma)$.

$$S_O(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

$$M' \in (\Gamma) \Leftrightarrow 3(x'^2 + y'^2) - 2x'y' - 16 = 0$$

$$\text{On a } 3(x'^2 + y'^2) - 2x'y' - 16 = 3(x^2 + y^2) - 2xy - 16 = 0$$

D'où $M' \in (\Gamma)$.

On en déduit que O est le centre de (Γ) .

c) Equation cartésienne de (Δ)

$O \in (\Delta)$ et $F \in (\Delta)$, d'où $(\Delta) : y = x$

Précisons la distance focale d

$$D = OF = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2.$$

5. Coordonnées de F'

$$F' = S_O(F); \text{ d'où } F'(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$$

Définition bifocale

Soit A et A' les sommets de (Γ) situés sur l'axe focal.

Posons : $OA = a$ et $OF = c$

$$\text{On a } e = \frac{c}{a} \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$$

Ainsi, pour tout point M appartenant à (Γ) , on

a : $MF' + MF = 4\sqrt{2}$, telle est la définition bifocale de (Γ) .

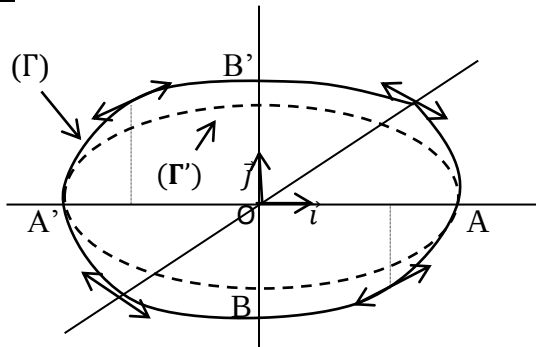
5.a) Equation cartésienne de (Γ')

$$r(O; \frac{-\pi}{4})(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

On en déduit que (Γ') a pour équation :

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

b) Construisons (Γ) et (Γ') dans le même repère.**Partie B****6.a) Démonstration**

L'ellipse (E) est la réunion des courbes des

fonctions $x \mapsto -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ et

$x \mapsto b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ définies sur $[-a; a]$ et

symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

Comme la fonction $x \mapsto b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ est

positive sur $[-a; a]$, alors $\int_{-a}^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$ est

l'aire en unité d'aire de la moitié du domaine intérieur à l'ellipse (E).

b) Calculons $\int_{-a}^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$

Posons : $x = a \cos \theta$, $\theta \in [0; \pi]$

Si $x = a$, $\theta = 0$ et si $x = -a$, $\theta = \pi$

$$\frac{dx}{d\theta} = -a \sin \theta \Rightarrow dx = (-a \sin \theta) d\theta.$$

Ainsi,

$$\int_{-a}^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \int_{\pi}^0 b\sqrt{1 - \cos^2 \theta} (-a \sin \theta) d\theta \\ = ab \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta$$

Une double intégration par partie permet de

$$\text{trouver } \int_{-a}^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \frac{\pi ab}{2}$$

c) Dédution

$\int_{-a}^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$ étant la moitié de l'aire du domaine intérieur à l'ellipse (E), alors l'aire $\mathcal{A}$

en unité d'aire du domaine intérieur à l'ellipse

$$(E) \text{ est } 2 \int_{-a}^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$

$$\mathcal{A} = \pi ab$$

7°) Aire du domaine intérieur à l'ellipse (Γ)

Soit $\mathcal{K}$ cette aire.

$$\mathcal{K} = 4\pi\sqrt{2}u.a$$

BAC C 2010**EXERCICE 1****1.a) Justifions que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$**

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\text{Or } \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} ; \text{ donc } \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

b) Déterminons l'ensemble (P)

$$(P) : (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0.$$

De la question 1.a), on déduit que $A =$

$$\text{bar}\{(B,1); (C,-1); (D,1)\}$$

$$\text{Ainsi, } \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA}$$

De plus, $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$, donc on a (P) :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0.$$

(P) est le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{CB}$. Plus précisément, $(P) = (ABC)$.

2.a) Déterminons la nature de t et précisons son élément caractéristique.

$$t(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$$

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$$

$$\text{Ainsi, } t(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{CA}$$

$\overrightarrow{CA}$ est un vecteur non nul et fixe. On en déduit que t est la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$.

b) Déterminons l'image de (P) par t.

$\overrightarrow{CA}$ est un vecteur de (P), d'où l'image de (P) par t est le plan (P).

3°) Démonstration

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$, on a :

$A(0; 0; 0)$; $J(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$; $B(1; 0; 0)$ et $H(0; 1; 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} h(J) = A \\ h(B) = H \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{JB}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \times k \\ 1 = -\frac{1}{2}k \\ 1 = \frac{1}{2}k \end{cases} \Rightarrow k = -2.$$

k existe et est unique. De plus, $k \neq 1$, et $k \neq -1$, donc h est l'homothétie de rapport $k = -2$ et de centre $\Omega(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$.

4.) Démontrons que SABCD est une pyramide

Les points A, B, C et D sont situés dans le plan (ABC). Donc SABCD est une pyramide si et seulement si S n'appartient pas au plan (ABC). Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS}$ sont non coplanaires $((\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AS}) \neq 0$. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}(0; 0; 1)$ et $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AS} = \frac{1}{3} \neq 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS}$ sont non coplanaires. S n'appartient donc pas au plan (ABC). Par suite, SABCD est une pyramide.

b) Calculons le volume de l'image de cette pyramide par $t \circ h$.

$t \circ h$ est l'homothétie de rapport $k = -2$.

Le volume de SABCD est :

$$\mathcal{V}(\text{SABC}) + \mathcal{V}(\text{SACD}) = 2\mathcal{V}(\text{SABC}) =$$

$$2 \times \frac{1}{6} \|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AS}\| u.v = \frac{1}{9} u.v$$

$$\text{Ainsi, } \mathcal{V}[t \circ h(\text{SABCD})] = |k|^3 \mathcal{V}(\text{SABCD})$$

$$\text{D'où } [t \circ h(\text{SABCD})] = \frac{8}{9} u.v$$

EXERCICE 2**1°) Justifions que dans l'anneau $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}; +, \times)$, 5 est inversible et trouvons son inverse.**

$\dot{5}$ appartient à $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. De plus, $\dot{5}$ est non nul. Donc il existe un élément $\dot{x}$ de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ tel que $\dot{5} \times \dot{x} = \dot{1}$. D'où $\dot{5}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Trouvons cet inverse

On a $\dot{5} \times \dot{5} = \dot{25}$ et $25 \equiv 1[8]$, donc $\dot{25} = \dot{1}$. Ainsi, $\dot{5} \times \dot{5} = \dot{1}$; d'où l'inverse de $\dot{5}$ dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est $\dot{5}$ lui-même.

2°) Résolvons dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ l'équation $4x = \dot{4}$.

$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ n'est pas un corps. Nous ferons donc un raisonnement consistant à prendre chaque valeur possible de x et à voir si elle vérifie l'équation. On en déduit par la suite l'ensemble solution : $\mathbf{S} = \{\dot{1}; \dot{3}; \dot{5}; \dot{7}\}$

3.) Résolution du système

$$\begin{cases} \dot{5}x + \dot{6}y = \dot{3} \\ \dot{3}x + \dot{2}y = \dot{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{5}x + \dot{6}y = \dot{3} \\ \dot{4}x = \dot{4} \end{cases}$$

On remplace les solutions de la deuxième ligne dans la première et on déduit les couples $(x; y)$. On procède par la suite à une vérification dans le système initial et on trouve l'ensemble solution :

$$\mathbf{S} = \{(\dot{1}; \dot{1}); (\dot{1}; \dot{3}); (\dot{1}; \dot{5}); (\dot{5}; \dot{3}); (\dot{5}; \dot{7}); (\dot{7}; \dot{0}); (\dot{7}; \dot{4})\}$$

4.) Déterminons tous les entiers naturels n tels que $n \times 7^{2n} + 4n - 1$ soit divisible par 8.

$n \times 7^{2n} + 4n - 1$ est divisible par 8 si et seulement si $n \times 7^{2n} + 4n - 1 \equiv 0[8]$

$$\Leftrightarrow n(7^{2n} + 4) \equiv 1[8]$$

On a $7^2 \equiv 1[8]$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $7^{2n} \equiv 1[8]$, alors $7^{2n} + 4 \equiv 5[8]$

$$\text{Ainsi, } n(7^{2n} + 4) \equiv 1[8] \Leftrightarrow n \equiv 5[8].$$

D'où les entiers naturels n tels que $n \times 7^{2n} + 4n - 1$ soit divisible par 8 sont $8k+5$, $k \in \mathbb{N}$.

PROBLEME**1.a) Démontrons que $D = \mathbb{R}^*$.**

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \ln|x| \text{ existe et } \frac{\ln|x|}{x} \text{ existe}\}$$

$$\ln|x| \text{ existe si } x \neq 0 \text{ et } \frac{\ln|x|}{x} \text{ existe si } x \neq 0.$$

$$\text{D'où } D = \mathbb{R}^*.$$

b) Etudions les limites de f aux bornes de D .

Tout en justifiant, on trouve :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty; \lim_{x \rightarrow 0} f = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} f = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f = +\infty$$

c) Etudions les branches infinies de (C).

• $\lim_{x \rightarrow 0} f = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C).

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

(C) admet donc au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

2°) Justification

• La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\mathbb{R}^*$. La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

• La fonction $x \mapsto \ln|x|$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

• La fonction $x \mapsto \frac{\ln|x|}{x}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car les fonctions $x \mapsto \ln|x|$ et $x \mapsto x$ y sont dérivables.

On déduit que la fonction $x \mapsto \ln|x| + x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme étant somme de deux fonctions toutes dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

On conclut que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^* = D$.

On a $f'(x) = \frac{\ln|x| + x - 1}{x} = \frac{g(x)}{x^2}$, pour tout x élément de D

3.a) Etudions les variations de la fonction g.

$$g(x) = \ln|x| + x - 1$$

g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = \frac{x+1}{x}$$

On en déduit que g est strictement croissante sur chacun des intervalles $] -\infty; -1]$ et $]0; +\infty[$ puis strictement décroissante sur $[-1; 0[$.

L'étude des variations de g se résume dans le tableau ci-contre :

X	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	•	-	+
$g(x)$	$-\infty$	-2	$+\infty$	$+\infty$

b) Démonstration

• g est continue et strictement croissante sur $] -\infty; -1]$ et $g(-\infty; -1]) =] -\infty; -2[$, donc $g(x) < 0 \forall x \in] -\infty; -1[$ (1)

• g est continue et strictement décroissante sur $[-1; 0[$ et $\forall x \in [-1; 0[$, on a $g(-1; 0) =] -\infty; -2[$, donc $g(x) < 0 \forall x \in [-1; 0[$ (2)
De (1) et (2), on conclut que $g(x) < 0 \forall x \in [-1; 0[$.

c)

$$g(1) = 0.$$

Déduction

g est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$, $g(x) \in \mathbb{R}$. Comme $g(1) = 0$, on déduit que $\forall x \in]0; 1[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]1; +\infty[$, $g(x) > 0$ puis $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

4.a) Tableau des variations de f

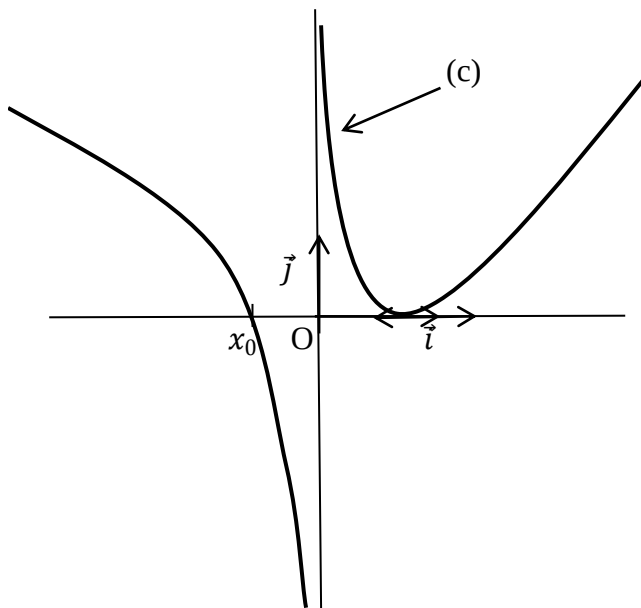
De tout ce qui précède, $\forall x \in] -\infty; 0[\cup]0; 1[$, $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; 1[$.

$\forall x \in]1; +\infty[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

Voici le tableau des variations de f .

X	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	•	+
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$

c) Traçons (c)



5.) Résolvons $f(x) = m$

En scrutant la courbe (c) de f , on note que :

- Pour $m = 0$, $x = 1$ ou $x = x_0$ avec $x_0 \in]-\infty; 0[$.

On remarque que $f(-1) = 0$, donc pour $m = 0$, $x = 0$, $x = 1$ ou $x = -1$.

- Pour $m > 0$, $x \in]-\infty; -1[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
- Pour $m < 0$, $x \in]-1; 0[$.

6.) Calculons l'aire $\mathcal{A}$

$\mathcal{A} =$

$$\int_1^e f(x) dx = \left(\int_1^e \ln |x| dx - \int_1^e \frac{1}{x} \ln |x| dx \right) u. a$$

$$= [x \ln x - x]_1^e - \left[\frac{1}{2} \ln^2 x \right]_1^e$$

Soit $\mathcal{A} = \frac{1}{2} u. a$

7.a) Démonstration

f est continue et strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$. Elle réalise donc une bijection de $] -\infty; 0[$ vers $f(]-\infty; 0[) = \mathbb{R}$. Comme u est la restriction de f sur $] -\infty; 0[$, alors u est une bijection de $] -\infty; 0[$ vers $\mathbb{R}$.

b) Démontrons que (Γ) est l'image de (C_0)

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}, y < 0 \\ x = u(2y) \end{cases}$$

Soit S_d la symétrie orthogonale d'axe la droite $y = x$ et soit (C') l'image de la réciproque de u .

On a : $S_d(C) = (C')$.

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow u(2y) = x$$

$$\Leftrightarrow u^{-1}(x) = 2y$$

$$y = \frac{1}{2} u^{-1}(x)$$

$M \in S(C')$ où S est l'affinité orthogonale

d'axe l'axe des abscisses et de rapport $k = \frac{1}{2}$

On a $(C') = S_d(C)$, donc $\Gamma = S \circ S_d(C)$.

En conclusion, (Γ) est l'image de (C) par la composée $S \circ S_d$ de la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice et de l'affinité orthogonale d'axe l'axe des abscisses et de rapport $k = \frac{1}{2}$.

8.) Démonstration

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} > 0$$

f est continue et strictement croissante sur

$[1; +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de

$[1; +\infty[$ vers $f([1; +\infty[) = [0; +\infty[$

Ainsi, $\forall x \in [1; +\infty[$, l'équation $f(x) = y$

admet une solution unique dans $[1; +\infty[$ avec $y \in [0; +\infty[$.

Comme $\frac{1}{n} \in]0; +\infty[$, alors l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique dans $[1; +\infty[$.

9.a) Démontrons que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante

sur $[1; +\infty[$. On en déduit que la suite $f(\alpha_n)$

est strictement décroissante pour

$n \geq 1$.

$f(\alpha_n)$ étant décroissante, alors on a :

$$f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha_n$$

Comme f^{-1} a le même sens de variation que f ,

alors $f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha_n$ est strictement

décroissante pour tout $n \geq 1$; d'où $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

b.) Démontrons que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

$$\alpha_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Or $\forall x \in [1; +\infty[$, $f(x) \in [0; +\infty[$, donc $\forall$

$y \in [0; +\infty[$, $f^{-1}(y) \in [1; +\infty[$

Nous avons $\frac{1}{n} \in [0 ; +\infty[$, donc $f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \in [1 ; +\infty[$. On en déduit que α_n est minorée par 1. Comme de plus elle est décroissante, alors elle est convergente.

10.a) Justifions que $l \in [1 ; +\infty[$.

Il est clair que $f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \in [1 ; +\infty[$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = l \in [1 ; +\infty[$$

b) Justifions que $f(l) = 0$.

Nous avons $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\alpha_n) = 0$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = l, l \in [1 ; +\infty[$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\alpha_n) = f(l)$

Soit $f(l) = 0$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\alpha_n) = 0$

c) Déduisons l

$f(l) = 0$ et $l \in [1 ; +\infty[$, d'où $l = 1$.

BAC C 2011

Exercice 1

1°) a. Démontrons que : $AB = AC = AD = 1$.

Les triangles ABC, ABD et ACD sont isocèles et rectangles en A, donc $AB = AC$; $AB = AD$; $AC = AD$ et $\widehat{CAD} = \frac{\pi}{2}$. Par ailleurs, $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$, donc $\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}\| = AB$. Ainsi donc $AB^2 = AB$; d'où $AB = 1$ (car $A \neq B$). En conclusion, $AB = AC = AD = 1$.

b. Justifions que $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormé direct de l'espace

- ACD est rectangle en A, donc $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AD}$ (1)
- $AC = AD = 1$ (2)
- $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$ (3)

De (1), (2) et (3), on déduit que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$ est une base orthonormée directe de l'espace.

Par suite, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est aussi une base directe de l'espace et $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormé direct de l'espace.

2°) a. Déterminons une équation cartésienne du plan (BCD).

Un vecteur normal au plan (BCD) est $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}(1; 1; 1)$. Le plan (BCD) a pour équation $x + y + z - 1 = 0$.

b) i) Coordonnées de G.

On a : $\begin{cases} G \in (BCD) \\ \exists t \in \mathbb{R} \text{ tq } \overrightarrow{AG} = t(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \end{cases}$

D'où $G(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$

ii) Vérifions que G est le centre de gravité du triangle BCD.

On a $\overrightarrow{GB}(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$; $\overrightarrow{GC}(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3})$ et $\overrightarrow{GD}(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$, donc $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. D'où G est le centre de gravité du triangle BCD.

3°) a. Déterminons la nature du triangle BCD.

On a : $AB^2 + AC^2 = BC^2$; $AB^2 + AD^2 = BD^2$ et $AC^2 + AD^2 = CD^2$.

Or $AB = AC = AD$, donc BCD est un triangle équilatéral.

b) Déterminons l'ensemble (E_m)

Pour tout point M de l'espace, on pose :

$\varphi(M) = MB^2 + MC^2 + MD^2$. On a :

$$\varphi(M) = 3MG^2 + \varphi(A) - 3AG^2 = 3MG^2 + AB^2 + AC^2 + AD^2 - 3AG^2 = 3MG^2 + 2.$$

$$M \in (E_m) \Leftrightarrow MG^2 = \frac{m-2}{3}$$

- Si $m \in]-\infty; 2[$, $(E_m) = \emptyset$
- Si $m = 2$, $(E_m) = \{G\}$
- Si $m \in]2; +\infty[$, (E_m) est la sphère de centre

G et de rayon $r = \sqrt{\frac{m-2}{3}}$.

c) Vérifions si on peut déterminer m pour que l'isobarycentre des points A, B et C appartienne à (E_m)

Soit I l'isobarycentre des points A, B et C.

On a : $\vec{GI} = \frac{1}{3}(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC})$, soit
 $\vec{GI}(0; 0; -\frac{1}{3})$

$$I \in (E_m) \Leftrightarrow IG^2 = \frac{m-2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{9} = \frac{m-2}{3}$$

$$\text{Donc } m = \frac{7}{3}$$

$$I \in (E_m) \Leftrightarrow m = \frac{7}{3}.$$

Exercice 2

1°) Déterminons, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne par 10 de 13^n .

$$13^0 \equiv 1[10]; 13^1 \equiv 3[10]; 13^2 \equiv 9[10];$$

$$13^3 \equiv 7[10]; 13^4 \equiv 1[10]$$

$$13^4 \equiv 1[10] \text{ donc } \forall k \in \mathbb{N}, 13^{4k} \equiv 1[10]$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que
 $n = 4k$ ou $n = 4k + 1$ ou $n = 4k + 2$ ou $n = 4k + 3$

Donc :

- Si $n = 4k$, $13^n \equiv 1[10]$

- Si $n = 4k+1$, $13^n \equiv 3[10]$

- Si $n = 4k+2$, $13^n \equiv 9[10]$

- Si $n = 4k+3$, $13^n \equiv 7[10]$

Soit r le reste de la division euclidienne par 10 de 13^n . On a :

$$\begin{cases} r = 1 \text{ si } n = 4k \\ r = 3 \text{ si } n = 4k + 1 \\ r = 9 \text{ si } n = 4k + 2 \\ r = 7 \text{ si } n = 4k + 3 \end{cases}; (k \in \mathbb{N})$$

2°) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul k, on a :

$$\underline{1 + 13 + 13^2 + \dots + 13^{4k-1} \equiv 0[10]}.$$

Posons : $S_k = 1 + 13 + 13^2 + \dots + 13^{4k-1} \equiv 0[10]$
avec $k \in \mathbb{N}^*$.

- $S_1 = 1 + 13 + 13^2 + 13^3$ et $S_1 \equiv 0[10]$, donc la propriété est vraie pour $k = 1$.

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons $S_p \equiv 0[10]$

$$\begin{aligned} S_{p+1} &= 1 + 13 + 13^2 + \dots + 13^{4p+3} \\ &= 1 + 13 + 13^2 + \dots + 13^{4p-1} + 13^{4p} + 13^{4p+1} + 13^{4p+2} + 13^{4p+3} \\ &= S_p + 13^{4p} S_1 \end{aligned}$$

Or par hypothèse de récurrence, $S_p \equiv 0[10]$ et $S_1 \equiv 0[10]$, donc $S_{p+1} \equiv 0[10]$, d'où la propriété est vraie à l'ordre $p+1$.

En conclusion, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + 13 + 13^2 + \dots + 13^{4k-1} \equiv 0[10]$$

3°) Déterminons suivant les valeurs de n, le chiffre des unités de A_n

$$A_n = 1 + 13 + \dots + 13^n$$

Le chiffre des unités de A_n est le reste de la division euclidienne par 10 de A_n .

- Pour $n = 0$, $A_n \equiv 1[10]$

- Pour $n = 1$, $A_n \equiv 4[10]$

- Pour $n = 2$, $A_n \equiv 3[10]$

- Pour $n = 3$, $A_n \equiv 0[10]$

- Pour $n \geq 4$, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4k$ ou $n = 4k + 1$ ou $n = 4k + 2$ ou $n = 4k + 3$

- Si $n = 4k$, $A_n = 1 + 13 + \dots + 13^{4k}$
 $= 1 + 13 + \dots + 13^{4k-1} + 13^{4k}$

$$\text{Donc } A_n \equiv 1[10]$$

- Si $n = 4k + 1$, $A_n = 1 + 13 + \dots + 13^{4k-1} + 13^{4k} + 13^{4k+1}$, donc $A_n \equiv 4[10]$

- Si $n = 4k + 3$, $A_n = 1 + 13 + \dots + 13^{4(k+1)-1}$

$$\text{Donc } A_n \equiv 0[10]$$

En conclusion, si u désigne le chiffre des unités de A_n , alors :

$$\begin{cases} u = 1 \text{ si } n = 4k \\ u = 4 \text{ si } n = 4k + 1 \\ u = 3 \text{ si } n = 4k + 2 \\ u = 0 \text{ si } n = 4k + 3 \end{cases}$$

PROBLEME

Partie A

1.a) Démontrons que $D = \mathbb{R}$

$$D = \{x \in]-\infty; 0] \text{ tq } 1 - e^{2x} \geq 0\} \cup \{x \in]0; +\infty[\text{ tq } 1 + \frac{2}{x} > 0\}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0], 1 - e^{2x} \geq 0 \text{ et } \forall x \in]0; +\infty[,$$

$$1 + \frac{2}{x} > 0, \text{ donc } D =]-\infty; 0] \cup]0; +\infty[$$

$$\text{Soit } D = \mathbb{R}.$$

b. Déterminons $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\sqrt{1 - e^{2x}}) = -1$$

c) Démontrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

$$\underline{\text{Posons}} : X = \frac{2}{x}$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+x)}{x} = 2$

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

2°) a. Démontrons que f est continue sur $\mathbb{R}$.

- La fonction $x \mapsto -\sqrt{1 - e^{2x}}$ est continue sur $] -\infty; 0]$, donc f est continue sur $] -\infty; 0]$
- La fonction $x \mapsto x \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right)$ est continue sur $] 0; +\infty[$, donc f est continue sur $] 0; +\infty[$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [x \ln(x+2) - x \ln x] = 0 = f(0)$

De ces trois points, on déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Etudions la dérivabilité de f en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1 + e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} = +\infty$$

et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0.

Déduction

On déduit de ce qui précède que (C) admet en 0 une tangente d'équation $x = 0$.

3°) Etudions le sens de variation de f sur $] -\infty; 0]$.

f est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et $\forall x \in] -\infty; 0[$, on a :

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $] -\infty; 0[$.

4.a) Calculons $f''(x)$ et $f'''(x) \forall x \in] 0; +\infty[$.

f est plus d'une fois dérivable sur $] 0; +\infty[$ et

on a : $f'(x) = \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) - \frac{2}{x+2}$ et

$$f''(x) = -\frac{4}{x(x+2)}.$$

b. Déterminons le sens de variations de f' sur $] -\infty; 0]$

$\forall x \in] 0; +\infty[$, $f''(x) < 0$, donc f' est strictement décroissante sur $] 0; +\infty[$.

c. Dressons le tableau des variations de f'.

x	0	$+\infty$

$f''(x)$	—
$f'(x)$	$+\infty \rightarrow 0$

Signe de $f'(x)$ pour tout x élément de $] 0; +\infty[$

On déduit de ce tableau que $f'(x) > 0$ pour tout x élément de $] 0; +\infty[$.

5°) a. Dressons le tableau des variations de f.

$\forall x \in] 0; +\infty[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $] 0; +\infty[$.

En résumé, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

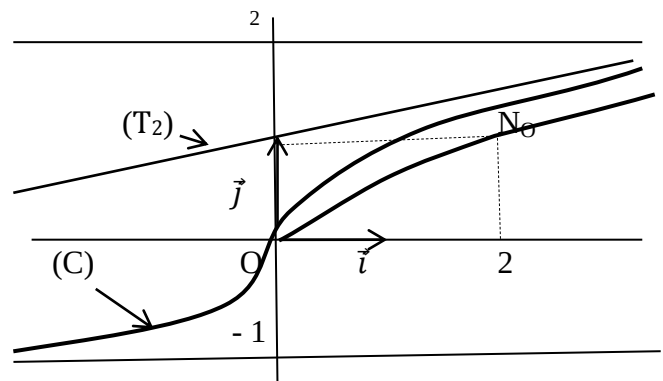
X	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+		+
$f(x)$	-1		2

b) Position relative de (C) et de la droite (Δ) d'équation : $y=2$.

$\forall x \in] 0; +\infty[$, $0 < f(x) < 2$, donc $f(x) - 2 < 0$

D'où (C) est au-dessus de (Δ) est dessus sur $] 0; +\infty[$.

c) Construisons (C)



7.a) Calculons $\mathcal{A}(\alpha)$.

f est continue sur $\left[\alpha; \frac{2}{e-1} \right]$ et $\forall x \in \left[\alpha; \frac{2}{e-1} \right]$,

$$f(x) < 2, \text{ donc } \mathcal{A}(\alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{2}{e-1}} [2 - f(x)] dx \text{ u. a}$$

On trouve $\mathcal{A}(\alpha) = \left[\frac{2(e^2 - e + 1)}{(e-1)^2} + 2 \ln 2 - \right.$

$$2 \ln(e-1) - \alpha + \frac{1}{2} \alpha^2 \ln(\alpha+2) -$$

$$\left. \frac{1}{2} \alpha^2 \ln \alpha - 2 \ln(\alpha+2) \right] \times 4 \text{ cm}^2$$

b) Calcul de la limite

On trouve:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{A}(\alpha) = \left[\frac{2(e^2 - e + 1)}{(e - 1)^2} + 2\ln 2 - 2\ln(e - 1) \right] \times 4\text{cm}^2$$

Interprétation géométrique

Le résultat obtenu représente l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C) et les droites d'équations $y = 2$, $x = 0$ et $x = \frac{2}{e-1}$

Partie B**8°) a. Donnons une équation de la tangente (T_{x0}) à (C) en son point d'abscisse x₀.**

Cette tangente a pour équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

b) Démonstration

$$N(x; y) \in (T_{x_0}) \cap (yy')$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -x_0 f'(x_0) + f(x_0) \end{cases}$$

$$\text{Donc } N(0; -x_0 f'(x_0) + f(x_0)).$$

9.a) Etudions les variations de g.

g est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{4}{(x+2)^2}$$

On en déduit que g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Le tableau des variations de g est le suivant :

x	0	$+\infty$
g'(x)		+
g(x)		2
	0	

b) Vérifions que pour tout x élément de $]0; +\infty[$, on a : $f(x) - g(x) = x f'(x)$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) - g(x) = x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) - \frac{2x}{x+2}$$

$$\text{Soit } f(x) - g(x) = x f'(x).$$

c) Déterminons le signe de $f(x) - g(x)$ pour tout x élément de $]0; +\infty[$

D'après la question 4.b), $\forall x \in]0; +\infty[$, $x f'(x) > 0$, donc $f(x) - g(x) > 0$.

d) Tracé de (Γ) (voir figure)**e) Dédouons une construction géométrique de (T_{x0})**Soit M₀ le point d'abscisse x₀.(T_{x0}) coupe yy' en N₀(0 ; g(x₀)).Soit P₀ le point de (T_{x0}). N₀ est le projeté orthogonal de P₀ sur yy'.

X₀ ≠ 0, donc M₀ ≠ N₀, d'où (T_{x0}) est la droite (M₀N₀).

Tracé de (Γ₂) (voir figure)**BAC C 2012****I.****1.) Justifions que $(M \in (C_m)) \Leftrightarrow (m-2)x^2 + (y-1)^2 = (6-m)$**

$$(C_m) : (m-2)x^2 + y^2 - 2y - 5 + m = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)x^2 + (y-1)^2 - 1 - 5 + m = 0$$

$$\text{D'où } (M \in (C_m)) \Leftrightarrow (m-2)x^2 + (y-1)^2 = (6-m).$$

2.a) Etudions le signe de $\frac{6-m}{m-2}$ suivant les valeurs de m où m est différent de 2

On dresse le tableau de signe et on établit que :

- Pour $m \in]-\infty; 2[\cup]6; +\infty[$, $\frac{6-m}{m-2} < 0$
- Pour $m \in]2; 6[$, $\frac{6-m}{m-2} > 0$
- Pour $m = 6$, $\frac{6-m}{m-2} = 0$.

b) Nature de (C₃)

$$(C_3) : x^2 + (y-1)^2 = 3$$

(C₃) est le cercle de centre K(0 ; 1) et de rayon $r = \sqrt{3}$.

c) Nature de (C_m)

- Pour $m = 2$, on a $(C_m) : (y-1)^2 = 4$

$$\Rightarrow y-1 = 2 \text{ ou } y-1 = -2$$

$$\Rightarrow y = 3 \text{ ou } y = -1$$

Pour $m=2$, (C_m) est la réunion des droites (D) et (D') d'équations $y = 3$ et $y = -1$.

• Pour $m = 6$, $4x^2 + (y-1)^2 = 0$

$$\Rightarrow (2x)^2 + (y-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ainsi, pour $m = 6$, (C_m) est le singleton $K(0; 1)$.

• Pour $m \neq 2$ et $m \neq 6$, $\frac{x^2}{\frac{6-m}{m-2}} + \frac{(y-1)^2}{6-m} = 1$

☞ Si $m \in]-\infty; 2[$, $6-m > 0$ et

$$\frac{6-m}{m-2} < 0.$$

Ainsi, (C_m) est l'hyperbole de centre $K(0; 1)$.

☞ Si $m \in]2; 6[$, $6-m > 0$ et $\frac{6-m}{m-2} > 0$,

donc (C_m) est l'ellipse de centre $K(0; 1)$.

☞ Si $m \in]6; +\infty[$, $6-m < 0$ et $\frac{6-m}{m-2} < 0$,

donc (C_m) est l'ensemble vide.

II.

3.a) Variations de f

$$f(x) = x^2 + \ln x.$$

f est définie, continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{2x^2+1}{x}$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

On calcule les limites de f aux bornes de son ensemble d'existence et on dresse le tableau de variation ci-contre.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f(x)	$-\infty$	$+\infty$

b) Variations de v

v est définie, continue et dérivable sur

$]0; +\infty[$ et on a :

$$v'(x) = \frac{2x^2-x+1}{x} \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

On en déduit que v est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} v = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} v = +\infty$$

(Il faut dresser le tableau de variations de v)

c) Signe de v(x)

On remarque que $v(1) = 0$.

v étant continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, alors $\forall x \in]0; 1[$, $v(x) < 0$ et $\forall x \in]1; +\infty[$, $v(x) > 0$ puis $v(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

d) Position relative de (Γ) par rapport à (Δ)

$$f(x) - x = x^2 - x + \ln x$$

De ce qui précède, on déduit que :

• Pour $x \in]0; 1[$, $x^2 + \ln x < x$, donc (Γ) est en dessous de (Δ) .

• Pour $x \in]1; +\infty[$, $x^2 + \ln x > x$, donc (Γ) est au-dessus de (Δ) .

• Pour $x = 1$, $x^2 + \ln x = x$, donc (Γ) coïncide avec (Δ) .

4.a) Démonstration

f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$. De plus, $f(]0; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$ et $0 \in]-\infty; +\infty[$. Donc il existe un x élément de $]0; +\infty[$ tel que $f(x) = 0$.

En conclusion, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0; +\infty[$.

b) Justifions que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

$\frac{1}{2}$ et 1 appartiennent à $]0; +\infty[$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0,44 \text{ et } f(1) = 1.$$

$f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f(1)$ sont de signes contraires, donc

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

5.a) Ecriture complexe de φ

$$t: \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 1 \end{cases}; s: \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

$$\text{donc } t \circ s: \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x - 1 \end{cases}$$

En posant $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$, on trouve :

$$\varphi : z' = i\bar{z} + 1 - i.$$

b) Précisons la nature et les éléments caractéristiques de φ

Tout en justifiant, on trouve que φ est la réflexion plane d'axe la droite d'équation $x - y - 1 = 0$.

c) Représentons l'image (Γ') de (Γ) par φ .

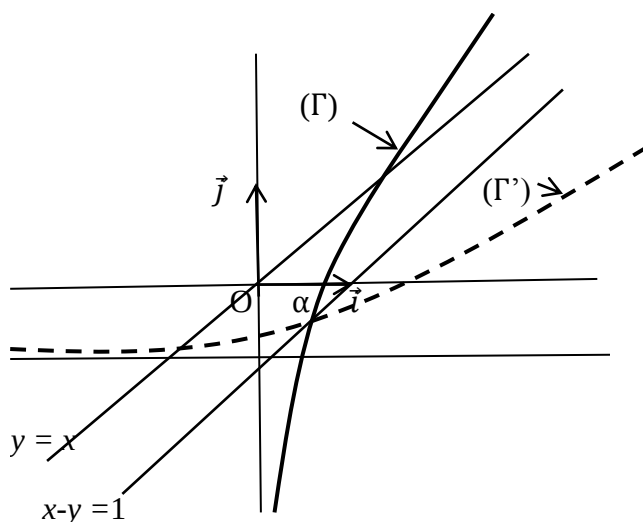
(Γ') et (Γ) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x - y = 1$.

Branches infinies de (Γ)

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = -\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (Γ) .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, donc (Γ) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

(Construction : voir figure)



6.) Donnons une méthode de construction d'un point I de (Γ) tel que $\varphi(I) = J$ où J est élément de $\{J_1, J_2\}$

On a $I \in (\Gamma)$ et $J \in (C_4)$

$\varphi(I) = J$, donc I et J sont symétriques par rapport à la droite $x - y - 1 = 0$. De plus, $(\Gamma') \cap (C_4) = J \in \{J_1; J_2\}$, donc $J \in (\Gamma')$.

Pour retrouver J_1 et J_2 , on construit (C_4) . Cette dernière coupe (Γ') en J_1 et J_2 .

On prend un des points J_1 et J_2 et on construit son antécédent par φ . Cet antécédent est le point I .

III.

Déterminons le nombre de chaises et le nombre de tables à installer.

Avec un raisonnement clair et précis, on résout le système $\begin{cases} 3a + 7b = 1020 \\ \text{PGCD}(a; b) = 20 \end{cases}$ et on trouve $a = 200$ et $b = 60$.

On déduit qu'on installera 200 chaises et 60 tables.

BAC C 2013

Problème 1

1.a) Justifions que (Γ) est une ellipse

Les points F et F' sont distincts et vérifient

$$FF' = 3 < 2 \times \frac{5}{2} \text{ et } (\Gamma) \text{ est l'ensemble des points}$$

M du plan tels que $MF + MF' = 2 \times \frac{5}{2}$

D'où (Γ) est une ellipse de foyers F et F' .

b) Précisons le centre et l'excentricité de (Γ)

Le centre est le milieu du segment $[FF']$ qui est l'origine O du repère. Par ailleurs, $e = \frac{c}{a}$ et on a $FF' = 2c = 3$ et $2a = 5$, donc $e = \frac{3}{5}$.

c) Déterminons une équation cartésienne de (Γ) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

O est le centre de (Γ) et l'axe des abscisses est l'axe focal, donc on a $(\Gamma) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$

$$\text{Soit } \frac{x^2}{(\frac{5}{2})^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

2.a) Précisons les coordonnées des sommets de (Γ) .

Les sommets sont $A'(-\frac{5}{2}; 0)$; $A'(\frac{5}{2}; 0)$;

$B(0; 2)$ et $B'(0; -2)$.

b) Traçons (Γ)

Il faut placer les sommets dans le repère et joindre les 4 points tout en respectant la courbure.

c) Expliquons Jean a pu tracer (Γ) sur le plancher.

Jean plante deux piquets respectivement en F et F' ; il choisit une corde en forme de boucle de longueur $2a + FF' = 8m$ et maintient tendue cette corde autour de F et F' à l'aide d'un troisième piquet mobile ; la pointe M de ce troisième piquet va tracer (Γ) sur le plancher. (c'est la méthode du jardinier).

Problème 2

3.a) Démontrons que (P_1) et (P_2) sont sécants suivant une droite (Δ).

Les vecteurs $\vec{n}_1(1; 2; 2)$ et $\vec{n}_2(11; 9; -2)$ sont des vecteurs normaux respectifs de (P_1) et (P_2). De plus, $\frac{1}{11} \neq \frac{2}{9}$, donc $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont non colinéaires et par conséquent les plans (P_1) et (P_2) sont sécants suivant une droite (Δ).

b) Démonstration

$M(x; y; z) \in (\Delta) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x + 2y + 2z - 16 = 0 & (1) \\ 11x + 9y - 2z - 19 = 0 & (2) \end{cases}$$

 $(1) + (2) : 12x + 11y - 35 = 0$
 D'où $M(x; y; z) \in (\Delta) \Leftrightarrow 12x + 11y = 35$

c) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $12x + 11y = 35$

Le couple $(2; 1)$ est une solution de l'équation $12x + 11y = 35$.

$12x + 11y = 35 \Leftrightarrow 12(x-2) = -11(y-1)$
 $\Leftrightarrow x = -11k + 2$ et $y = 12k + 1, k \in \mathbb{Z}$ car $\text{pgcd}(12; 11) = 1$. L'ensemble S des couples $(x; y)$ solutions de cette équation dans $\mathbb{Z}^2$ est :
 $S = \{-11k + 2; 12k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$

d) Déterminons les points de (Δ) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace tel que x, y, z soient des entiers relatifs.

$M \in (\Delta) \Leftrightarrow M \in (P_1) \cap (P_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z - 16 = 0 \\ 11x + 9y - 2z - 19 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z - 16 = 0 \\ 12x + 11y = 35 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13k + 2z - 12 = 0 \\ x = -11k + 2 \\ y = 12k + 1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2p \\ z = -13p + 6 \\ x = -11k + 2 \\ y = 12k + 1 \end{cases} \quad (p \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -22p + 2 \\ y = 24p + 1 \\ z = -13p + 6 \end{cases}$$

L'ensemble des points de (Δ) dont les coordonnées sont des entiers relatifs est :
 $\{M_p(-22p + 2; 24p + 1; -13p + 6) \mid p \in \mathbb{Z}\}$

4.a) Déterminons les coordonnées de S.

Soit $S \in (\Delta)$ et $(x_S; y_S; z_S) \in \mathbb{N}^3$, on a :

$$\begin{cases} x = -22p + 2 \geq 0 \\ y = 24p + 1 \geq 0 \\ z = -13p + 6 \geq 0 \end{cases} \quad (p \in \mathbb{Z}).$$

On obtient $p = 0$; donc $S(2; 1; 6)$

b) Calculons la distance d du point S au plan du plancher.

Le plan du plancher est le plan de repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et $S(2; 1; 6)$, donc $d = 6m$.

Problème 3

5.a) Justifions que l'ensemble de définition de f_k est $\mathbb{R}$.

Soit df_k l'ensemble de définition de f_k .
 $df_k = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } 1 + ke^{2x} \neq 0\}$
 $\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall k \in \mathbb{R}^*, 1 + ke^{2x} \neq 0$, d'où
 $df_k = \mathbb{R}$.

b) Déterminons les limites de f_k au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

Tout en justifiant sa réponse, on trouve :
 $\lim_{-\infty} f_k = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f_k = +\infty$

6.a) Justification

f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'_k(x) = 1 + \frac{-4ke^{2x}}{(1 + ke^{2x})^2} = \left(\frac{1 - ke^{2x}}{1 + ke^{2x}} \right)^2$$

Or $(f_k(x) - x)^2 = \left(\frac{1 - ke^{2x}}{1 + ke^{2x}} \right)^2$, donc f_k est solution de l'équation différentielle $y' = (y - x)^2$.

b) Justification

$$f'_k(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1 - ke^{2x}}{1 + ke^{2x}} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - ke^{2x} = 0 \Leftrightarrow ke^{2x} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\ln k}{2} \text{ car } k > 0$$

D'où la fonction dérivée f'_k de f_k s'annule pour un seul réel $x_k = -\frac{\ln k}{2}$.

c) Sens de variation de f_k

$$\begin{cases} f'_k(x) = \left(\frac{1 - ke^{2x}}{1 + ke^{2x}} \right)^2 \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \\ f'_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\ln k}{2} \end{cases}$$

D'où f_k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

d) Tableau de variation de f_k

x	$-\infty$	x_k	$+\infty$
$f'_k(x)$	+	0	+
$f_k(x)$	$-\infty$		

7.a) Coordonnées de A_k

$$A_k(x_k; f_k(x_k))$$

$$f'_k(x_k) = (f_k(x_k) - x_k)^2 = 0$$

$$\text{Donc } f_k(x_k) = x_k \text{ et } A_k \left(-\frac{\ln k}{2}; -\frac{\ln k}{2} \right)$$

b) Justifions que les points A_k

appartiennent tous à une même droite.

$y_{A_k} = x_{A_k}$, d'où les points A_k appartiennent tous à une même droite d'équation $y = x$.

8.) Démonstration

i) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x - 1 + \frac{2}{1 + ke^{2x}} = x + \frac{-1 - ke^{2x} + 2}{1 + ke^{2x}}$$

$$= x + \frac{1 - ke^{2x}}{1 + ke^{2x}} = f_k(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f_k(x) = x - 1 + \frac{2}{1 + ke^{2x}}$$

ii) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x + 1 - \frac{2ke^{2x}}{1 + ke^{2x}} = x + \frac{1 + ke^{2x} - 2ke^{2x}}{1 + ke^{2x}}$$

$$= x + \frac{1 - ke^{2x}}{1 + ke^{2x}} = f_k(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f_k(x) = x + 1 - \frac{2ke^{2x}}{1 + ke^{2x}}$$

b) Démontrons que (Δ_1) et (Δ_2) sont asymptotes à (C_k) .

• D'après i), on a : $f_k(x) - (x - 1) = \frac{2}{1 + ke^{2x}}$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f_k(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + ke^{2x}} = 0$$

On conclut que la droite (Δ_2) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C_k) au voisinage de $+\infty$.

• D'après ii), on a : $f_k(x) - (x + 1) = \frac{-2ke^{2x}}{1 + ke^{2x}}$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f_k(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2ke^{2x}}{1 + ke^{2x}} = 0$$

D'où la droite (Δ_1) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C_k) au voisinage de $-\infty$.

c) Position relative de (C_k) par rapport aux droites (Δ_1) et (Δ_2) .

D'après i), on a $f_k(x) - (x - 1) = \frac{2}{1 + ke^{2x}} >$

$0, \forall k \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}$; donc (C_k) est au-dessus de (Δ_1) .

D'après ii), on a $f_k(x) - (x + 1) = \frac{-2ke^{2x}}{1 + ke^{2x}} <$

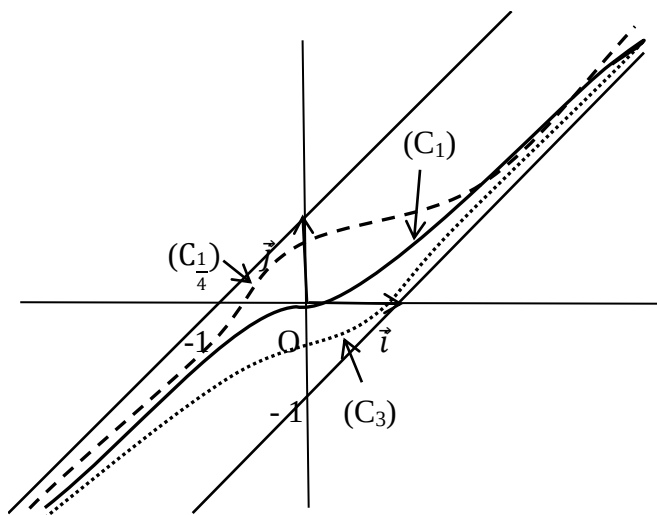
$0, \forall k \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}$; donc (C_k) est en dessous de (Δ_1) .

9.a) Déterminons k

$$O(0; 0) \in (C_k) \Leftrightarrow f_k(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow k = 1.$$

b) Traçons (C_1) ; (C_1) ; (C_3)



10.a) Justifions que f_k est une bijection.

f_k est définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. f_k est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f_k(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, donc f_k est une bijection.

b) Dérivabilité de f_k^{-1}

Soit E l'ensemble de f_k^{-1} .
 f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_k(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, donc
 $E = \mathbb{R} \setminus \{f_k(x) \text{ tq } f_k'(x) = 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}\}$
On trouve $E = \mathbb{R} \setminus \{x_k\}$
 f_k^{-1} est donc dérivable en tout point de
 $E = \mathbb{R} \setminus \{x_k\}$.

c) Démontrons que (Γ_k) est l'image de (C_k) par une isométrie S .

Soient (C'_k) la courbe représentative de f_k^{-1} et S_d la réflexion d'axe (d) la droite d'équation $y = x$.

On a : $(C'_k) = S_d(C_k)$

$M \in (\Gamma_k) \Leftrightarrow x = f_k(y - 1)$

$\Leftrightarrow y = f_k^{-1}(x) + 1$

$\Leftrightarrow M \in t(C'_k)$ avec t la translation de vecteur $\vec{u}(0; 1)$.

Alors $(\Gamma_k) = t \circ S_d(C_k)$

t et S_d étant toutes deux des isométries planes, alors $t \circ S_d$ est une isométrie plane ; d'où (Γ_k) est l'image de (C_k) par l'isométrie $S = t \circ S_d$.

d) Caractérisons S

$\vec{u}(0; 1)$ n'est pas un vecteur normal à (d) , donc S est une symétrie glissée.

Le vecteur de S est $\vec{v} = \frac{1}{2} \overrightarrow{O(S \circ S(O))}$, donc $\vec{v}(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

L'axe de S est la droite (d') passant par le point J de coordonnées $(0; \frac{1}{2})$, milieu de $[OO']$ avec $O' = S(O)$.

Une équation de (d') est : $x - y + \frac{1}{2} = 0$.

BAC C 2014

Problème 1

1) Déterminons les différentes expressions de b .

- Pour $a = 2$, $b = 117$; soit $b = \overline{1110101}^2$
- Pour $a = 3$, $b = 526$; soit $b = \overline{201111}^3$
- Pour $a = 4$, $b = 1601$; soit $b = \overline{121001}^4$
- Pour $a = 5$, $b = 3846$; soit $b = \overline{110341}^5$
- Pour $a = 6$, $b = 7909$; soit $b = \overline{100341}^6$
- Pour $a \geq 7$, $b = \overline{60341}^a$

2.a) Justifions que $1 + e^{i\frac{\pi}{5}} = (2\cos\frac{\pi}{10})e^{i\frac{\pi}{10}}$

$$1 + e^{i\frac{\pi}{5}} = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$= 1 + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{10}\right) + i\sin\left(2 \times \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\text{Or } 1 + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{10}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) \text{ et}$$

$$\sin\left(2 \times \frac{\pi}{10}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \sin\left(\frac{\pi}{10}\right).$$

$$\text{Ainsi, } 1 + e^{i\frac{\pi}{5}} = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + 2i \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \sin\left(\frac{\pi}{10}\right).$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \left[\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) \right]$$

$$\text{D'où } 1 + e^{i\frac{\pi}{5}} = (2 \cos\frac{\pi}{10}) e^{i\frac{\pi}{10}}$$

b) Module et argument de $1 + e^{i\frac{\pi}{5}}$

$$\left| 1 + e^{i\frac{\pi}{5}} \right| = 2 \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \text{ et}$$

$$\text{Arg}\left[2 \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \right] = \frac{\pi}{10} \text{ rad.}$$

c. Justifions que le nombre de perle du type T_1 est 5

Le nombre a de perles T_1 est la plus petite

valeur de n pour que $\left[1 + e^{i\frac{\pi}{5}} \right]^n \in i\mathbb{R}^*$.

$$\left[1 + e^{i\frac{\pi}{5}} \right]^n = \left(2 \cos\frac{\pi}{10} \right)^n e^{i\frac{n\pi}{10}}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \\ \text{Or } \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{AB}, \text{ donc } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \\ \text{D'où } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} &= 2\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

c) Déduisons-en la nature et les éléments caractéristiques de $r_1 \circ s_1$

$$r_1 \circ s_1 = S_{(AC)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(AB)}$$

$r_1 \circ s_1 = S_{(AC)} \circ t_{2\overrightarrow{AD}}$, or $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AD}$, donc
 $r_1 \circ s_1 = S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{AC}} \circ t_{\overrightarrow{BD}} = S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{BD}} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$
 On a $(AC) \perp (BD)$, donc $S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{BD}}$ est une symétrie orthogonale d'axe parallèle à (AC) .
 Comme $S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{BD}}(B) = B$, alors l'axe de cette symétrie orthogonale est (BE) .

Ainsi, on a :

$$r_1 \circ s_1 = S_{(BE)} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$$

Comme $\overrightarrow{AC}$ dirige (BE) , alors $S_{(BE)} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$ soit $r_1 \circ s_1$ est la symétrie glissée d'axe (BE) et de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

6.a) Justifions que (Γ) est une ellipse.

$r_1 \circ s_1$ est une isométrie (car une symétrie glissée), donc l'image d'une conique par $r_1 \circ s_1$ est une conique de même nature. Comme $(\Gamma) = r_1 \circ s_1(\Gamma_1)$ et puisque (Γ_1) est une ellipse, alors (Γ) est une ellipse.

b) Précisons les sommets de (Γ) .

Soit K le projeté orthogonal de E sur (AB) .
 Les sommets I_1 et I'_1 de (Γ_1) situés sur l'axe focal (KE) sont tels que : $I_1 = \text{bar}\{(E, 1); (K, \frac{1}{2})\}$
 et $I'_1 = \text{bar}\{(E, 1); (K, -\frac{1}{2})\}$. Le centre O de (Γ_1) est le milieu de $[I_1 I'_1]$.

Soit J_1 et J'_1 les sommets de (Γ_1) situés sur le petit axe.

$$\text{On a } e = \frac{OE}{OI_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow OE = \frac{OI_1}{2}. \text{ Or } OE^2 =$$

$$OI_1^2 - OJ_1^2, \text{ donc } OJ_1 = \frac{OI_1\sqrt{3}}{2}. \text{ Les sommets de } (\Gamma_1) \text{ sont les points } J_1 \text{ et } J'_1 \text{ sont tels que :}$$

$$\overrightarrow{OJ_1} = \frac{OI_1\sqrt{3}}{2} \text{ et } \overrightarrow{OJ'_1} = -\frac{OI_1\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Soit } \begin{cases} r_1 \circ s_1(I_1) = I \\ r_1 \circ s_1(I'_1) = I' \\ r_1 \circ s_1(J_1) = J \\ r_1 \circ s_1(J'_1) = J' \end{cases}$$

Les sommets de (Γ) sont les points I, I', J et J' .

c) Construisons (Γ) . (voir figure)

Problème 3

7.a) Variations de u

$$u(x) = e^x + x$$

u est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = e^x + 1$$

On en déduit que u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} u = +\infty$$

(Il faut dresser le tableau de variation) .

b. Justifions que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α

u est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
 De plus, $u(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, alors il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$.
 En conclusion, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

c. Justifions que $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} u(-1) = e^{-1} - 1 < 0 \\ u\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 0,10 > 0 \\ u(-1) \times u\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

On déduit que $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$

d. Etudions le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x

De tout ce qui précède, on retient que pour $x \in]-\infty; \alpha[$, $u(x) < 0$, pour $x \in]\alpha; +\infty[$, $u(x) > 0$ et pour $x = \alpha$, $u(x) = 0$.

8.a) Etudions les variations de f

$$f(x) = \frac{x}{e^x + x}$$

Soit $\mathcal{D}$ le domaine de définition de f .

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } e^x + x \neq 0\}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x + x = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \text{ avec}$$

$$-1 < \alpha < \frac{1}{2}.$$

$$\mathcal{D} =]-\infty; \alpha[\cup]\alpha; +\infty[$$

f est continue et dérivable sur $\mathcal{D}$ et on a :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x+x)^2}$$

On en déduit que f est strictement

décroissante sur $]1; +\infty[$ et strictement

croissante sur $] -\infty; \alpha[$ et sur $]\alpha; 1[$.

On calcule les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$

puis on établit le tableau de variation ci-contre :

x	$-\infty$	α	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-
$f(x)$	1	$+\infty$	$\frac{1}{e+1}$	0

b. Construisons la courbe (Γ') représentant la fonction de g

$$g(x) + f(|x|) = 0$$

$$\text{On a donc } g(x) = -f(|x|)$$

• Pour $x \in]0; +\infty[$, $x > 0$, donc

$$f(|x|) = f(x)$$

$$\text{Soit } g(x) = -f(x) \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

On déduit que sur cet intervalle, (Γ') est symétrique à la partie de (Γ_2) représentée sur $]0; +\infty[$, par rapport à l'axe des abscisses.

• Pour $x \in]-\infty; 0[$, $x < 0$, donc

$$f(|x|) = f(-x)$$

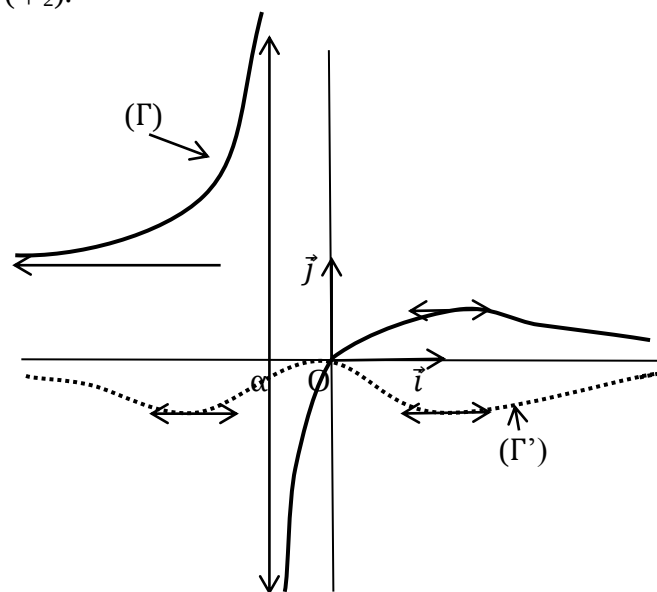
$$\text{Soit } g(x) = -f(-x), \quad \forall x \in]-\infty; 0[.$$

On a $-x \in]0; +\infty[$, On déduit que pour $x < 0$, (Γ') est symétrique à la partie de (Γ_2) représentée sur $]0; +\infty[$, par rapport à l'origine O du repère.

Branches infinies de (Γ_2)

Du tableau de variations de f , on retient que les droites d'équations $y = 1$ et $y = 0$ sont asymptotes à (Γ_2) respectivement au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$.

La droite d'équation $x = \alpha$ est asymptote à (Γ_2) .



BAC C 2016

Problème 1

1.a) Déterminons une équation cartésienne du plan (Q).

(Q) est le plan passant par O et dont un vecteur normal est $\vec{n}$.

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in (Q) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = 0.$$

$$\text{Ceci aboutit à : } 2x - y - 3z + 4 = 0.$$

Telle est l'équation cartésienne du plan (Q).

b.) Prouvons que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires suivant une droite (Δ) dont on déterminera un système d'équations cartésiennes.

$$\text{Un vecteur normal à (P) est } \vec{n}_p(1; -1; 1).$$

On calcule et on trouve $\vec{n} \cdot \vec{n}_p = 0$; donc les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires et un système d'équations cartésiennes de leur droite d'intersection (Δ) est :

$$\begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ 2x - y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

2.) Déterminons une représentation paramétrique du plan (P')

On a : $S_{(p)} \circ S_{(p')} = t_{\vec{u}}$.

$\vec{u}$ est un vecteur normal à (P), donc le plan (P') est un plan parallèle au plan (P). I(0, 0, 3) étant un point de (P), le point I' tel que : $\vec{I'I} = \frac{1}{2}\vec{u}$ est un point de (P').

On a : I'(1, -1, 4) ; donc une équation cartésienne de (P') est :

$$x - y + z - 6 = 0.$$

On en déduit qu'une représentation paramétrique de (P') est :

$$\begin{cases} x = \alpha - \beta + 6 \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

3.a) Démontrons que (O ; $\vec{e}_1, \vec{e}_2$) est un repère orthonormé du plan (Q).

On a : $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$; $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$.

$\vec{e}_1 \cdot \vec{n} = \vec{e}_2 \cdot \vec{n} = 0$ et comme $O \in (O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, alors (O ; $\vec{e}_1, \vec{e}_2$) est un repère orthonormé du plan (Q).

b.) Expression analytique de h

(Q) est un plan perpendiculaire à (P), donc h est dans le plan (Q) la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

Soit M un point du plan (Q).

On suppose $M(x, y, z)$ dans le repère (O ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) et $M(X, Y)$ dans le repère (O ; $\vec{e}_1, \vec{e}_2$).

On a : $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{OM} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2$.

Puisque $\vec{OM} = \vec{OO} + \vec{OM}$ et $\vec{OO} = 4\vec{j}$, alors :

$$\begin{cases} x = \frac{X}{\sqrt{5}} + \frac{6Y}{\sqrt{70}} \\ y = 4 + \frac{2X}{\sqrt{5}} - \frac{3Y}{\sqrt{70}} \\ z = \frac{5Y}{\sqrt{70}} \end{cases}$$

Dans le repère (O ; $\vec{e}_1, \vec{e}_2$), la droite (Δ) a pour équation $X - \sqrt{14}Y + 7\sqrt{5} = 0$.

Soit $M(X, Y)$ et $M'(X', Y')$ dans le repère (O ; $\vec{e}_1, \vec{e}_2$).

Désignons par I le milieu de $[MM']$.

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} I \in (\Delta) \\ \exists t \in \mathbb{R} \text{ tq } \vec{MM'} = t\vec{u}_1 \end{cases}$$

avec $\vec{u}_1(1, -\sqrt{14})$ un vecteur normal à (Δ).

L'expression analytique de (h) est donc :

$$\begin{cases} X' = \frac{1}{15}(13X + 2\sqrt{14}Y - 14\sqrt{5}) \\ Y' = \frac{1}{15}(2\sqrt{14}X - 13Y + 14\sqrt{70}) \end{cases}$$

Problème 2**4.a) Déterminons l'ensemble de définition D de la fonction f.**

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } 2^{|x|} + 1 \neq 0\}.$$

Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $2^{|x|} > 0$, donc pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $2^{|x|} + 1 \neq 0$. Il en résulte que $D = \mathbb{R}$.

b) Preuve

Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $-x$ appartient à $\mathbb{R}$ et $f(-x) = -f(x)$. Par conséquent f est une fonction impaire. On peut alors étudier f sur l'ensemble E défini par :

$$E = \mathbb{R} \cap]-\infty; 0] =]-\infty; 0].$$

5.a) Etudie la variation de la fonction g.

g est continue et dérivable sur $]-\infty; 0]$ et on a :

$$\forall x \in]-\infty; 0], g'(x) = (1 + 2^x) \ln 2.$$

$g'(x) > 0$ pour tout x élément de $]-\infty; 0]$. Il en résulte que g est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2.$$

(il faut dresser le tableau de variations de g).

b) Démonstration

g est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et $g(]-\infty; 0]) =]-\infty; 2]$.
 $0 \in]-\infty; 2]$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]-\infty; 0]$.

Par ailleurs, $g(-1,9) \approx -0,049$ et $g(-1,8) \approx 0,59$. $g(-1,9) \times g(-1,8) < 0$, donc

$$-1,9 < \alpha < -1,8.$$

c) Signe de g

g est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et $g(\alpha) = 0$, donc si $x \in]-\infty; \alpha[$, $g(x) < 0$ et si $x \in]\alpha; 0]$, $g(x) > 0$.

En conclusion, on a :

$$\begin{cases} g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \\ g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; \alpha[\\ g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]\alpha; 0] \end{cases}$$

6.a) Limite de f en $-\infty$

$$\text{Pour } x \in]-\infty; 0[, f(x) = \frac{x}{2^{-x}+1}$$

$$f(x) = \frac{-1}{\frac{2^{-x}}{-x} - \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{-x}}{-x} = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

b) Dérivabilité de f à gauche en 0.

On calcule et on trouve :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que f est dérivable à gauche en 0 et $f'_d(0) = \frac{1}{2}$.

La courbe (C) admet au point O une demi-tangente définie par :

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

c) variations de f

f est dérivable sur $]-\infty; 0]$ et on a :

$$\forall x \in]-\infty; 0], f'(x) = \frac{2^x}{(1+2^x)^2} g(x).$$

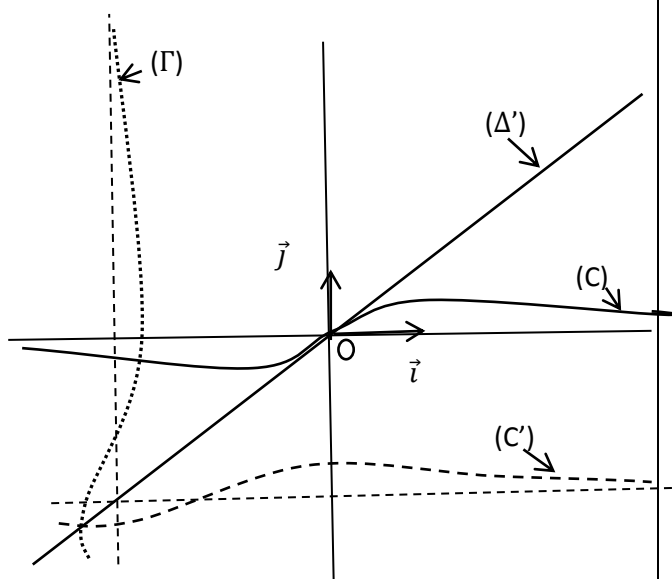
En s'inspirant de la de la question 5.c), on déduit que f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ puis strictement croissante sur $[\alpha; 0]$.

(dresser le tableau de variation de f).

d.) Construction de la courbe (C)

Soit (C_2) la courbe de la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 0]$. La fonction f étant impaire, la courbe (C) est alors la réunion de (C_2) et de son symétrique par rapport à O.

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C_2) au voisinage de $-\infty$.

**7.a) Equation de l'image (C') de (C)**

(C') est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x+2) - 3$.

Donc la courbe (C') a pour équation :

$$y = f(x+2) - 3, \text{ soit}$$

$$1 + y - x + (3 + y) \times 2^{|x+2|} = 0.$$

b) Dédution

(C') a pour équation :

$1 + y - x + (y + 3) \times 2^{|x+2|} = 0$ et l'image de (C') par la réflexion S a pour équation :

$$1 + x - y + (x + 3) \times 2^{|y+2|} = 0, \text{ donc}$$

$(\Gamma) = S(C')$ et puisque $(C') = t(C)$, alors

$$(\Gamma) = S \circ t(C) = \varphi(C).$$

c) Démontrons que φ est une symétrie glissée dont on précisera les éléments caractéristiques.

$$\varphi = S \circ t$$

$\vec{n}(1; 1)$ est un vecteur directeur de (Δ') . Le vecteur $\vec{v}(-2; -3)$ et le vecteur $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux. Par conséquent, φ est une symétrie glissée. Son vecteur a pour coordonnées $(-\frac{5}{2}; -\frac{5}{2})$ et son axe a pour équation : $x - y + \frac{1}{2} = 0$.

8.) Construction de (Γ)

Pour construire (Γ), on construit d'abord $C' = t(C)$ puis $S(C')$. (voir graphique)

Problème 3**9.a) Justification**

Il suffit de prouver simplement que 101 est premier c'est-à-dire n'est divisible par aucun entier premier p tel que $1 < p^2 \leq 101$.

(faire le tableau des divisions euclidiennes pour afficher les restes lors de chaque division).

On tire par la suite la conclusion...

b) Développons et réduisons

$$\text{On a : } (x - \overline{36})(x - \overline{42}) = x^2 - \overline{78}x + \overline{1512}$$

Comme $-\overline{78} = \overline{23}$ et que $\overline{1512} = \overline{98}$, alors on déduit que :

$$(x - \overline{36})(x - \overline{42}) = x^2 + \overline{23}x + \overline{98}.$$

c) Résolvons (E)

$$(E) \Leftrightarrow (x - \overline{36})(x - \overline{42}) = \overline{0}.$$

$(\mathbb{Z}/_{101}\mathbb{Z}, +, \times)$ étant un corps, alors l'équation (E) est équivalente à :

$$x - \overline{36} = \overline{0} \text{ ou } x - \overline{42} = \overline{0}.$$

On en déduit que l'ensemble solution de (E) est : $\{\overline{36}; \overline{42}\}$.

d) Dédution

On a : $T_2 < T_1 < 48$. On obtient $T_2 = 36$ et $T_1 = 42$.

$$ppcm(36; 42) = 252.$$

$$252 \text{ heures} = 10 \text{ jours } 12 \text{ heures.}$$

On déduit que la date à laquelle les plants ont été simultanément pulvérisés et arrosés après le 14 juin 2015 à 6 heures est le 24 juin 2015 à 18 heures.

10.a) Justifions que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de termes positifs.

La fonction $x \mapsto \frac{x^n}{1+x+x^2}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0; 1]$.

Comme $\forall x \in [0; 1], 0 \leq \frac{x^n}{1+x+x^2}$, alors

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2} dx \geq 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

b) Sens de variation de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

$$\text{On a : } u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x+x^2} dx.$$

Or $\forall x \in [0; 1], \frac{x^n(x-1)}{1+x+x^2} \leq 0$, donc

$u_{n+1} - u_n \leq 0$. Il en résulte que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

c.) Dédisons-en que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

De ce qui précède, la suite est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.

d) Démonstration

Pour tout x élément de $[0; 1]$, on a :

$$1 \leq 1+x+x^2 \leq 3, \text{ donc } \frac{1}{3} \leq \frac{1}{1+x+x^2} \leq 1.$$

Par ailleurs, pour tout x élément de $[0; 1]$,

$$x^n \geq 0, \text{ donc on a : } \frac{x^n}{3} \leq \frac{x^n}{1+x+x^2} \leq x^n.$$

e) Dédisons-en la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Pour tout $x \in [0; 1], \frac{x^n}{3} \leq \frac{x^n}{1+x+x^2} \leq x^n$ et les fonctions $x \mapsto \frac{x^n}{3}$ et $x \mapsto x^n$ sont continues sur $[0; 1]$, donc $\int_0^1 \frac{x^n}{3} dx \leq u_n \leq \int_0^1 x^n dx$.

Comme $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, alors on a :

$$\frac{1}{3(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Tables Des Matières

<u>Préface</u> :	5
<u>Remerciements</u> :	7
<u>Conseils aux candidats aux Bac</u> :	9
<u>Contenus notionnels inscrits dans le Programme des Terminales C, D et E</u>	11

Partie I : Rappel du cours

Situation d'apprentissage n°1 : Configurations de l'espace

Séquence d'apprentissage n°1 : Calcul Vectoriel.....	15
Séquence d'apprentissage n°2: Applications de l'espace (Série C & E).....	24

Situation d'apprentissage n°2 : Organisation des données

Séquence d'apprentissage n°1 : Système d'équations.....	35
Séquence d'apprentissage n°2 : Arithmétique (Série C & E).....	37
Séquence d'apprentissage n°3 : Nombres Complexes.....	47
Séquence d'apprentissage n°4 : Limites et Continuité.....	54
Séquence d'apprentissage n°5 : Dérivabilité-Etude de fonctions.....	54
Séquence d'apprentissage n°6 : Primitives.....	65
Séquence d'apprentissage n°7 : Fonction logarithme népérien.....	69
Séquence d'apprentissage n°8: Fonction exponentielle népérienne.....	73
Séquence d'apprentissage n°9: Fonctions exponentielles-Fonctions Puissances.....	76
Séquence d'apprentissage n°10 : Calcul Intégral.....	81
Séquence d'apprentissage n°11: Equations différentielles linéaires à coefficients constants.....	89
Séquence d'apprentissage n°12: Probabilités.....	92
Séquence d'apprentissage n°13: Suites numériques.....	102
Séquence d'apprentissage n°14: Statistiques.....	107

Situation d'apprentissage n°3 : Lieux géométriques dans le plan

Séquence d'apprentissage n°1: Isométries du plan (Série C & E).....	113
Séquence d'apprentissage n°2: Applications affines du plan (Série C & E).....	113
Séquence d'apprentissage n°3 : Coniques (Série C & E).....	120
Séquence d'apprentissage n°4: Similitudes planes.....	127

Partie II : Enoncés des Activités d'applications et d'approfondissement des notions du cours

Situation d'apprentissage n°1 : Configurations de l'espace

Séquence d'apprentissage n°1 : Calcul Vectoriel.....132

Séquence d'apprentissage n°2: Applications de l'espace (Série C & E).....138

Situation d'apprentissage n°2 : Organisation des données

Séquence d'apprentissage n°1 : Système d'équations.....141

Séquence d'apprentissage n°2 : Arithmétique (Série C & E).....144

Séquence d'apprentissage n°3 : Nombres Complexes.....154

Séquence d'apprentissage n°4 : Limites et Continuité.....160

Séquence d'apprentissage n°5 : Dérivabilité-Etude de fonctions.....160

Séquence d'apprentissage n°6 : Primitives.....166

Séquence d'apprentissage n°7 : Fonction logarithme népérien.....167

Séquence d'apprentissage n°8: Fonction exponentielle népérienne.....175

Séquence d'apprentissage n°9: Fonctions exponentielles-Fonctions Puissances.....183

Séquence d'apprentissage n°10 : Calcul Intégral.....186

Séquence d'apprentissage n°11: Equations différentielles linéaires à coefficients
constants.....192

Séquence d'apprentissage n°12: Probabilités.....193

Séquence d'apprentissage n°13: Suites Numériques.....207

Séquence d'apprentissage n°14: Statistiques.....215

Situation d'apprentissage n°3 : Lieux géométriques dans le plan

Séquence d'apprentissage n°1: Isométries du plan (Série C & E).....219

Séquence d'apprentissage n°2: Applications affines du plan (Série C & E).....219

Séquence d'apprentissage n°3 : Coniques (Série C & E).....226

Séquence d'apprentissage n°4: Similitudes planes.....233

Partie III : Enoncés des sujets d'évaluations et

des épreuves de BAC C de 2002 à 2016

Epreuves des Collèges et Lycées, Examens Blancs, test APMB, ...240

Anciens sujets des BAC C de 2002 à 2016.....296

Partie IV : Corrigés des activités d'application et d'approfondissement

du cours et les corrigés des BAC C.

Corrigés des activités :

Situation d'apprentissage n°1 : Configurations de l'espace

Séquence d'apprentissage n°1 : Calcul Vectoriel.....	316
Séquence d'apprentissage n°2: Applications de l'espace (Série C & E).....	326
<u>Situation d'apprentissage n°2</u> : Organisation des données	
Séquence d'apprentissage n°1 : Système d'équations.....	335
Séquence d'apprentissage n°2 : Arithmétique (Série C & E).....	341
Séquence d'apprentissage n°3 : Nombres Complexes.....	363
Séquence d'apprentissage n°4 : Limites et Continuité.....	373
Séquence d'apprentissage n°5 : Dérivabilité-Etude de fonctions.....	373
Séquence d'apprentissage n°6 : Primitives.....	389
Séquence d'apprentissage n°7 : Fonction logarithme népérien.....	393
Séquence d'apprentissage n°8: Fonction exponentielle népérienne.....	408
Séquence d'apprentissage n°9: Fonctions exponentielles-Fonctions Puissances.....	421
Séquence d'apprentissage n°10 : Calcul Intégral.....	427
Séquence d'apprentissage n°11: Equations différentielles linéaires à coefficients constants.....	434
Séquence d'apprentissage n°12: Probabilités.....	437
Séquence d'apprentissage n°13: Suites numériques.....	460
Séquence d'apprentissage n°14: Statistiques.....	472
<u>Situation d'apprentissage n°3</u> : Lieux géométriques dans le plan	
Séquence d'apprentissage n°1: Isométries du plan (Série C & E).....	473
Séquence d'apprentissage n°2: Applications affines du plan (Série C & E).....	473
Séquence d'apprentissage n°3 : Coniques (Série C & E).....	489
Séquence d'apprentissage n°4: Similitudes planes.....	506
<u>Corrigés des épreuves</u> :	516

« Aux ames bien nées, la valeur n'attend point le nombre des années »

Pierre Corneille.

Fin.