HERVÉ
LEHNING

TOUTES LES MATHÉ-MATIQUES DU MONDE

La mathématique prend chair !
CÉDRIC VILLANI

Champs sciences

HERVÉ LEHNING
Toutes les mathématiques du monde

Elles sont partout : dans les tournesols, le vol des étourneaux, les images Jpeg et les réseaux de nos téléphones portables. Elles pilotent les cours de la Bourse et les prévisions météo, font et défont les élections… Et si les maths vous étaient enfin contées, sans équations ou presque ?

De leurs lointaines origines jusqu'aux percées les plus récentes, sans oublier les applications qui en découlent, de la machine d'Anticythère au Rubik's Cube, c'est toute la richesse des mathématiques qui se dévoile dans cette bible fourmillant d'anecdotes, de portraits et d'énigmes passionnantes.

Normalien, agrégé de mathématiques et auteur prolifique, **Hervé Lehning** est également passionné de cryptographie. À ce titre, il est membre de l'Association des réservistes du chiffre et de la sécurité de l'information. Son dernier ouvrage, *La Bible des codes secrets*, a paru en 2019 aux éditions Flammarion.

« Avec ses petites et grandes histoires, ses personnages et ses idées surprenantes, la mathématique prend chair dans ce bel ouvrage. »
Cédric Villani

« 400 pages de culture générale : une somme qui réjouira le lecteur. »
Quadrature

Création Studio Flammarion
20-X

Flammarion

TOUTES LES MATHÉMATIQUES DU MONDE

Dans la même collection

Alex Bellos, *Alex au pays des chiffres*.
Alex Bellos, *Alex et la magie des nombres.*
Conversation sur les mathématiques, avec Pierre Cartier, Jean Dhombres, Gerhard Heinzmann, Cédric Villani.
Neil deGrasse Tyson, *L'Univers expliqué aux gens pressés*.
Masha Gessen, *La Légende Grigori Perelman.*
Brian Greene, *La Réalité cachée.*
Stephen Hawking, *Une belle histoire du temps.*
Stephen Hawking, *Une brève histoire du temps*.
Stephen Hawking, *Commencement du temps et fin de la physique*.
Stephen Hawking, *Petite histoire de l'Univers*.
Étienne Klein, *Discours sur l'origine de l'Univers*.
Étienne Klein, *Matière à contredire*.
Étienne Klein, *Petit voyage dans le monde des quanta*.
Étienne Klein, *Les Tactiques de Chronos*.
Ian Stewart, *17 équations qui ont changé le monde*.
Ian Stewart, *La Chasse aux trésors mathématiques.*
Ian Stewart, *Dieu joue-t-il aux dés ?*
Ian Stewart, *Les Mathématiques du vivant*.
Ian Stewart, *Mon cabinet de curiosités mathématiques.*
Cédric Villani, *Les Mathématiques sont la poésie des sciences.*

Hervé Lehning

TOUTES LES MATHÉMATIQUES DU MONDE

Champs sciences

L'auteur et les Éditions Flammarion remercient Xavier Müller
pour son aide à l'élaboration du manuscrit.

ISBN : 978-2-0815-1103-3

En guise d'introduction

Saviez-vous que les premiers mathématiciens portaient des peaux de bêtes et mangeaient de l'antilope au dîner ? Que les aborigènes faisaient des mathématiques sans le savoir ? Que les concours de jeux mathématiques n'ont pas été inventés par les rédacteurs des suppléments d'été des magazines, mais qu'ils étaient déjà à la mode en Italie à la Renaissance ? Que certains théorèmes sont vrais sans qu'on soit capable de le démontrer ?

Vous découvrirez tout cela en parcourant cet ouvrage et bien d'autres choses encore. Vous voyagerez dans le temps et l'espace, visiterez l'Égypte antique à la rencontre de la véritable énigme du Sphinx, frissonnerez devant les vertiges de l'infini et des nombres complexes, vous ébahirez devant les paysages infinis des fractales, perdrez vos repères avec la théorie des groupes et les problèmes à un million de dollars.

Évidemment, ce voyage dans toutes les mathématiques du monde ne sera pas de tout repos. Vous aurez parfois l'impression d'avoir mis le pied dans un manège de fête foraine. Gare au retournement de neurones ! Il faudra ponctuellement vous accrocher pour percevoir toute la beauté du monde mathématique. Mais est-ce que s'entraîner à une course de trail ou en vue d'une compétition de football ne demande pas des efforts aussi ? Je vous assure : le jeu en vaut la chandelle. Dans son *Éloge des mathématiques*, le philosophe Alain Badiou compare les mathématiques à la promenade en montagne : « La marche d'approche est longue et pénible [...] on sue, on peine, mais quand on arrive au col, la récompense est sans égale, vraiment. » Je pourrais reprendre à mon compte cette métaphore.

Mais après tout, pourquoi s'intéresser aux mathématiques, m'opposez-vous ? Pour un grand nombre de nos contemporains, culture et mathématiques sont presque antonymes. En France, aucun musée à part entière n'est consacré à la discipline (même s'il en existe au moins un projet patronné par Cédric Villani). Pourtant, les démonstrations du théorème de Pythagore, comme celle qu'on trouve dans *Le Ménon* de Platon, font autant partie du patrimoine de l'humanité que les épopées d'Homère. De même, comprendre l'apparition des ellipses dans le mouvement des planètes fait aussi bien partie de la culture que les secrets des peintres de la Renaissance. On pourrait multiplier les exemples, ils sont innombrables !

Chaque mois de mai, place Saint-Sulpice à Paris, se tient un Salon dont le nom étonne le passant par le rapprochement de trois mots qui ne lui semblent pas bien aller ensemble. Il s'agit du Salon de la culture et des jeux mathématiques. Pour certains, accoler les mots « jeux » et « mathématiques » peut même évoquer un certain masochisme, sans doute à cause de l'usage principal que l'école semble faire des mathématiques, la sélection d'une élite. Pourtant, celui qui réussit à pénétrer le monde des mathématiques en voit généralement la dimension ludique et le bonheur extraordinaire qu'on peut éprouver à résoudre ses énigmes.

L'ouvrage que vous tenez entre les mains poursuit le même objectif que ce Salon : réinsérer les mathématiques dans la culture générale. Autrement dit, il s'agit d'un livre sur les mathématiques et non d'un livre de mathématiques. Son originalité, de ce point de vue, est de vouloir les présenter des origines à nos jours (i.e. sans s'arrêter au XVIIIe siècle), d'oser parler de mathématiciens contemporains comme Alexandre

Grothendieck, de montrer que les mathématiques sont toujours vivantes…

L'un des attraits des mathématiques est d'être universel. Il n'existe qu'une seule culture mathématique. Tous les mathématiciens parlent la même langue. Il n'existe pas non plus de mathématiques féminines. Même si les mathématiciennes restent moins nombreuses que leurs collègues masculins, et qu'augmenter le nombre de filles dans les études scientifiques est une priorité, leurs mathématiques ne se distinguent pas de celles de l'autre sexe. Les mathématiques sont uniques et c'est pour cela qu'on parle souvent de la mathématique et non des mathématiques, même si je me rallierai dans cet ouvrage à l'usage ancien du pluriel.

Pour donner une vision d'ensemble des mathématiques, nous avons divisé ce livre en quatre parties. La première partie concerne les origines. Elle montre la mise en place des grandes questions. La deuxième partie expose comment ces problèmes ont débouché sur une abstraction croissante et comment des buts relativement concrets, comme l'arpentage, ont conduit finalement aux structures mises en place progressivement par Galois, Poincaré ou Grothendieck. La troisième partie se place au cœur des mathématiques, de ce qu'elles sont réellement. Il s'agit donc d'une partie relativement philosophique. Enfin, la dernière partie montre que les mathématiques sont aujourd'hui partout et qu'il est difficile de les ignorer.

J'ai essayé autant que faire se peut d'éviter les formules. J'en ai laissé quelques-unes pour montrer qu'elles sont utiles et centrales en mathématiques. Cependant, comprendre toutes les subtilités des équations n'est pas nécessaire pour saisir le sens des concepts sous-jacents. Le texte est écrit pour rester compréhensible si on les prend comme de pures illustrations.

Bienvenue dans le monde des mathématiques !

I^{re} PARTIE

LES ORIGINES

Quand les mathématiques ont-elles été inventées ? À quand remonte l'instant zéro de la discipline ? Difficile de répondre à la question, car l'homme n'est pas la seule espèce animale à savoir compter. Tous les animaux possèdent un sens inné pour évaluer les quantités. Les abeilles reconnaissent des images affichant de un à quatre symboles. Le célèbre perroquet Alex avait appris à compter jusqu'à huit. Au moins en laboratoire, les chimpanzés savent additionner des chocolats et même des symboles comme les chiffres arabes.

Ces prouesses animales suggèrent que le nombre préexistait à l'être humain. Le mathématicien Leopold Kronecker (1823-1891) avait résumé cette idée en disant : « Dieu a fait le nombre entier, tout le reste est l'œuvre des hommes. » Il n'en reste pas moins qu'il y a bien dû avoir un moment dans l'histoire de l'humanité où *Sapiens* ne s'est plus contenté de vérifier si ses enfants étaient au complet avant de déménager le campement ou de distribuer en parts égales le gigot de renne rapporté de la chasse. Une étincelle a soudain brillé dans ses yeux. Alors il s'est rendu compte que les nombres pouvaient lui être utiles à bien d'autres tâches, comme certifier un échange entre tribus ou délimiter des territoires. Cette révélation s'est déroulée il y a plusieurs milliers d'années d'après l'archéologie.

Les mathématiques semblent nées d'un souci concret, celui de dénombrer. Parfois, ces mathématiques sont déguisées, masquées, comme chez les aborigènes où certaines règles traditionnelles évitent la consanguinité, ainsi que nous le verrons. On retrouve ce côté pratique dans des problèmes d'arpentages auxquels étaient confrontés les Égyptiens et les Mésopotamiens. Comment retrouver son champ après une crue du Nil ou de l'Euphrate ? Comment calculer l'impôt en fonction des possessions territoriales des paysans ? Ces questions concrètes et banales furent à l'origine de la géométrie qui, au sens étymologique, signifie mesure de la Terre.

En dépit de ces origines paysannes et terriennes, les mathématiques ont rapidement évolué vers des questions abstraites, inatteignables autrement que par la pensée, comme celle d'estimer la mesure du rayon terrestre ou de s'orienter vers La Mecque. Les nombres ont également pris un sens magique ce qui, parfois, a amené des questions intéressantes comme celles des nombres parfaits, dont le nom n'est sans doute pas innocent.

Mais commençons ce voyage temporel et géographique par une halte sur les collines aux pentes douces et verdoyantes des montagnes Lebombo, au Swaziland. Là, dans une grotte, a été exhumé un os de babouin arborant d'étranges marques…

1

Les racines préhistoriques et antiques

Les plus anciennes traces d'une pensée mathématique chez l'homme nous viennent d'Afrique. Il s'agit d'os entaillés vieux de plusieurs dizaines de milliers d'années. Entre deux parties de chasse et leurs activités restreintes au campement, comme la confection de vêtements et la cueillette, nos ancêtres *Homo sapiens* griffaient parfois des ossements selon des traits parallèles. Que comptaient-ils ? Des proies tuées ? Les jours qui passaient ? On l'ignore et rien n'assure d'ailleurs qu'ils utilisaient ces marques pour dénombrer quelque chose.

Quoi qu'il en soit, l'exemplaire le plus ancien connu de ces vestiges a été daté de trente-cinq mille ans avant notre ère. C'est un os de babouin comportant 29 entailles, découvert dans les années 1970 dans les montagnes Lebombo au Swaziland, en Afrique australe. Parfaitement parallèles les unes aux autres, signe qu'une volonté délibérée a guidé la main de celui qui a fait ces marques. Si on ajoute qu'il y en a 29… certains verront dans ces entailles un calendrier lunaire. Peut-être a-t-on cherché à compter les jours d'une lunaison ?

L'os d'Ishango

Mais l'os entaillé qui a fait le plus parler de lui est un manche d'outil exhumé à Ishango dans l'actuelle République démocratique du Congo. Il y a environ 20 000 ans, *Sapiens* a gravé dessus plusieurs dizaines d'encoches parallèles et régulièrement espacées, qui font immédiatement songer à la représentation de nombres.

Un débat houleux portant sur l'origine de ces marques s'est ouvert lorsqu'on a mis au jour l'os dans les années 1950. En particulier, le regroupement des encoches en séries variables (de 11 traits, puis 21, 19…) demeure une énigme. Selon une hypothèse, ces irrégularités pourraient attester que celui qui maniait cet outil comptait non pas comme nous de dix en dix, mais avec un type de numération plus complexe (comme chez les Yasgua du Nigeria, où 13 se dit 12 + 1). Aujourd'hui, les scientifiques s'écharpent encore par revues interposées ou lors de colloques pour savoir jusqu'où il faut interpréter les marques ciselant le bâton d'Ishango, même si tout le monde s'accorde pour dire qu'elles témoignent d'une capacité à compter.

L'os d'Ishango. Muséum des Sciences naturelles de Bruxelles.

Des preuves de transaction

On a en revanche plus de certitudes sur une bourse en argile nettement postérieure qui servait à compter les animaux. Datant de mille cinq cents ans avant notre ère et trouvée dans les fouilles du palais de Nuzi en Mésopotamie, cette bourse est recouverte de deux sceaux dont l'un a été identifié comme celui d'un berger, l'autre du propriétaire d'un troupeau. Sur la face externe figure la description, en écriture cunéiforme, d'un troupeau de 49 animaux.

Bourse en argile découverte à Nuzi en Mésopotamie.

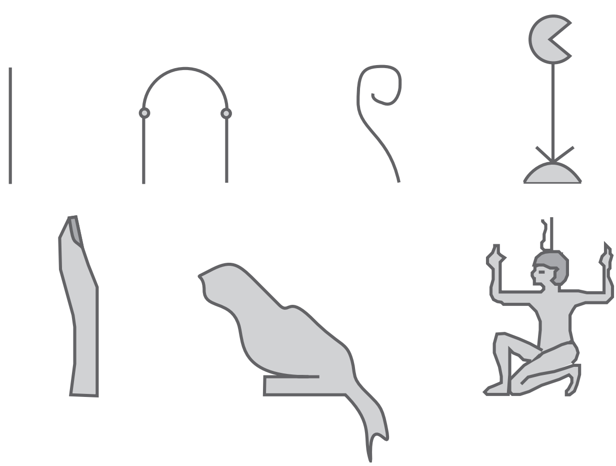
Quand elle a été ouverte, la bourse contenait exactement 49 cailloux. On peut facilement imaginer qu'elle jouait le rôle d'une sorte de reçu : les cailloux représentaient le nombre de moutons confiés au berger. À son retour au village, le propriétaire du troupeau brisait la bourse et vérifiait si le compte y était.

Quoique astucieuses, les bourses en argile ont été supplantées au fil de l'histoire par une autre preuve de transaction : les bâtons de comptage. Malgré leur nom, il s'agissait en réalité d'une planchette en bois ou en terre cuite sur laquelle acheteur et vendeur notaient par des entailles au couteau la quantité achetée de pièces d'étoffe ou de jarres de vin. L'objet était ensuite découpé dans le sens de la longueur et partagé entre les deux parties. Une technique des plus astucieuses, qui permettait au client comme au fournisseur de s'assurer de l'exactitude de la livraison et de la dette.

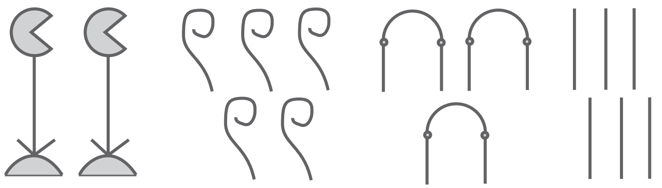
Ce type de transaction a laissé des traces dans notre vocabulaire. Le morceau de la planchette restant chez le commerçant s'appelait la *taille* et celle que gardait l'acheteur, la *contre-taille* (ou l'échantillon). Sous l'Ancien Régime, le fisc communiquait d'ailleurs le montant de l'impôt à payer au moyen d'un bâton de taille, d'où le nom de cette ancienne taxe. Comme elle était perçue souvent injustement sans véritable justification, elle a donné l'expression « taillable et corvéable à merci ».

L'invention des dizaines et des centaines

C'est bien joli de dénombrer des moutons ou des étoffes avec des traits, mais quand on a en des dizaines ou des centaines, mieux vaut compter en… dizaines et centaines. Les entailles, assimilant un nombre à une suite de traits, ont donc logiquement évolué vers des systèmes facilitant l'écriture des grands nombres. Les plus anciens sont les systèmes égyptiens et babyloniens, datant respectivement de trois mille et quatre mille ans avant notre ère. Proche du nôtre, l'égyptien utilisait la base dix, c'est-à-dire qu'il décomposait n'importe quel nombre en unités, dizaines, centaines, milliers…, oups pardon !, en bâton, fer à cheval, rouleau de papyrus, fleur de lotus, doigt pointant les étoiles, têtard et dieu (l'équivalent de 1 000 000) :



Pour faciliter la lecture, les Égyptiens n'alignaient pas les unités d'un même niveau, mais les décomposaient sur deux ou trois lignes :

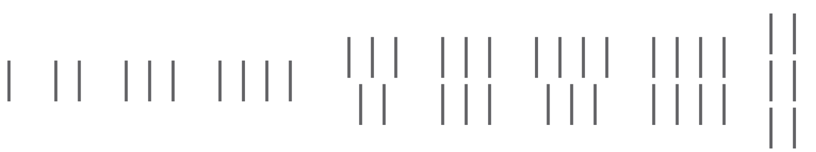


2 537 en écriture hiéroglyphique.

La notation était purement additive, c'est-à-dire que le nombre final était la somme de ses composants, contrairement à notre système actuel. Cela permettait d'écrire les signes dans l'ordre que l'on voulait. Par exemple, 24 pouvait s'écrire de deux façons :

24 écrit de deux façons différentes.

Autre caractéristique, les bâtons désignant les unités, ou les autres symboles, ne dépassaient pas le nombre de quatre sur une ligne. On écrivait les bâtons restants en dessous. Ainsi les nombres de 1 à 9 s'écrivaient-ils :



Alea jacta est !

« Les dés sont jetés ! » se serait exclamé César en franchissant le Rubicon avec son armée. S'il avait réellement jeté des dés ce jour-là, il aurait énoncé le résultat en se fondant sur un système de comptage plus complexe que celui des Égyptiens (même s'il a été inventé postérieurement). Bien qu'ils aient compté de dix en dix, les Romains ajoutaient des demi-unités : V pour 5, L pour 50 et D pour 500. Ainsi, 155 s'écrivait CLV (100 + 50 + 5).

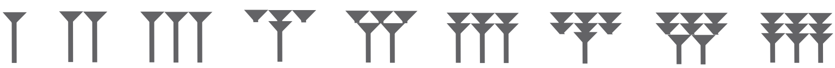
Une autre règle est apparue tardivement dans l'histoire romaine quand on décida de n'aligner pas plus de trois signes identiques. Ajoutée à un principe soustractif, cette règle faisait que le chiffre 4 s'écrivait IV. Elle trouve probablement sa justification dans notre limite naturelle dans l'appréhension immédiate des nombres. Nous avons une conscience spontanée d'une petite quantité d'objets, mais si le nombre d'objets dépasse quatre nous devons les subdiviser mentalement en groupes d'au plus quatre pour les compter. En limitant ainsi le nombre de signes semblables, les Romains s'épargnaient un effort mental.

Compter sur les doigts

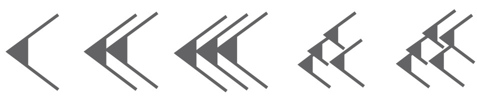
Comme les Égyptiens et les Romains, les Chinois ont également utilisé des systèmes additifs de base dix. La prédominance du système de base dix n'est guère surprenante puisque nous avons dix doigts. Mais d'autres peuples n'ont pas oublié que nous avions en réalité vingt doigts, en comptant ceux des pieds. Ainsi, en Amérique précolombienne, les Aztèques comme les Mayas ont exploité des systèmes additifs de base vingt. Les Celtes aussi probablement, ce qui expliquerait le *quatre-vingts* français et le nom de l'hôpital des Quinze-Vingts à Paris : l'établissement était destiné à accueillir 15 fois 20, c'est-à-dire 300 malades.

Même si compter dix par dix ou vingt par vingt semble naturel, le premier système de numération de position (où l'ordre des signes a son importance) était de base… soixante.

Plus stupéfiant encore, nous l'utilisons toujours pour compter les heures et les angles ! Ce système est apparu à Babylone au moins trois mille ans avant notre ère. Il est arrivé jusqu'à nous à travers des tablettes d'argile. Pour être tout à fait exact, le comptage babylonien était mixte : les chiffres de 1 à 59 s'écrivaient dans un système additif de base dix. Un clou valait une unité, ce qui donnait les nombres de 1 à 9 suivants :



On ajoutait alors les chevrons pour les dizaines (de 10 à 50) :



Nous retrouvons ici le principe déjà évoqué de décomposition en groupes de quatre éléments maximum. Par exemple, pour écrire les nombres 1637 et 5002, on les décomposait d'abord en base 60 ($1637 = 27 \times 60 + 17$ et $5002 = 3600 + 23 \times 60 + 22$), avant d'effectuer une transformation en base dix :

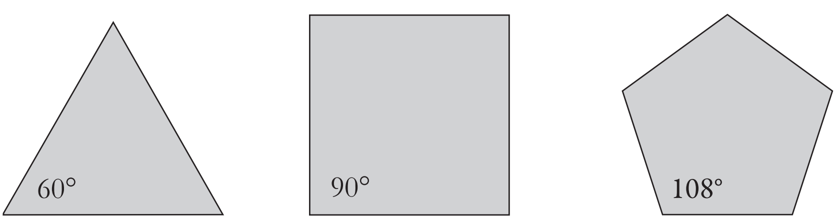
Le nombre magique

Pourquoi, allant à l'encontre du sens commun, les Babyloniens ont-ils adopté la base soixante ? En attendant qu'un document d'époque nous éclaire, nous en sommes réduits à des hypothèses. La plus probable est que ce choix fut lié à des considérations astronomiques, ou plutôt de calendrier. L'année a un caractère cyclique et peut être vue comme un cercle.

Entre un cercle métaphorique d'à peu près 360 jours et un vrai cercle de 360 degrés, il n'y a qu'un pas. Par ailleurs, comme la Lune a 12 cycles dans une année, il est possible que les Babyloniens aient choisi un compromis entre la base 10 et la base 12, ce qui mène naturellement au plus petit multiple commun aux deux… soit 60. Or 360 est aussi un multiple de 60. On voit que 60 relève d'une sorte de nombre magique si l'on se tourne vers le ciel.

La décomposition en base 60 a également un sens dans les mathématiques de l'époque où l'on s'intéressait particulièrement aux polygones réguliers simples : triangle équilatéral, carré, pentagone et hexagone. Or ces figures impliquent des angles faisant respectivement le sixième, le quart et les trois dixièmes d'un cercle placé à leur coin. Si on désire que ces angles aient des valeurs entières, on doit alors attribuer à la circonférence totale un multiple de 6, 4 et 10, donc un multiple de 60.

Si on veut de plus que tous les angles intérieurs à ces figures aient des valeurs entières, la mesure de 360 pour la circonférence entière s'impose. Dans ce cas, le triangle équilatéral implique des angles de 60°, le carré, de 90° et le pentagone, de 108° :

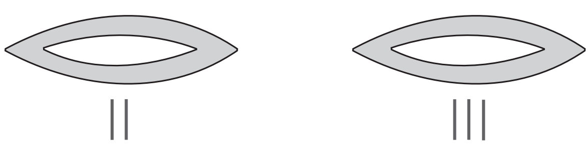


L'angle de 60 degrés, base de la géométrie, revêtait donc un sens capital aux yeux des Babyloniens. Vieil héritage de ce peuple, il se retrouve aujourd'hui dans notre façon de mesurer les angles, comme le temps, en minute (1 heure ou 1 degré = 60 minutes) et seconde (1 minute = 60 secondes).

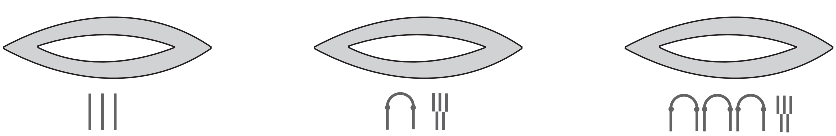
Les nombres rationnels

Il y eut l'énigme du Sphinx… et celle du papyrus Rhind : « Un nombre ajouté à son septième donne 19, quel est ce nombre ? » Ce papyrus, daté d'environ mille six cent cinquante ans avant notre ère, offre une plongée vers les mathématiques égyptiennes de l'Antiquité. C'est un recueil de 84 problèmes résolus d'arithmétique, de géométrie et d'arpentage (la mesure des surfaces). Le numéro 24 exposé ici porte sur les fractions. Si on peut admettre que les nombres entiers nous sont innés, il en est autrement des fractions, que l'on considère de nos jours comme des nombres – les nombres rationnels pour être précis.

Pour écrire les fractions, les Égyptiens développèrent un système fondé sur le partage de l'unité. Le hiéroglyphe de la bouche (qui signifie aussi « partie ») surmonté d'un nombre servait à représenter 1/2, 1/3, 1/4, etc. Les fractions courantes comme 1/2 et deux fractions non unitaires (2/3 et 3/4) bénéficiaient de leur propre symbole. Pour toutes les autres fractions, les Égyptiens respectaient le principe additif et juxtaposaient plusieurs fractions. Par exemple, ils décomposaient 5/6 en 1/2 + 1/3 de cette façon :



De nos jours, on continue d'appeler fraction égyptienne toute fraction de numérateur égal à 1. Il est toujours possible de décomposer n'importe quel nombre rationnel comme somme de fractions unitaires aux dénominateurs distincts. Par exemple 3/7 peut aussi s'écrire sous la forme 1/3 + 1/15 + 1/35 :



Les fractions égyptiennes font l'objet de fascinantes études en théorie des nombres, la branche des mathématiques qui s'occupe de révéler des liens invisibles entre les nombres entiers.

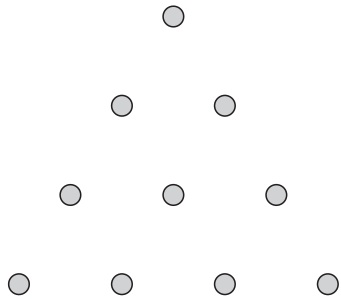
L'entrée en jeu du mysticisme

Avec l'invention des fractions s'achevait une forme de quête pour l'humanité : celle de décrire le Monde avec des nombres. Nous, habitants du XXI[e] siècle, savons évidemment qu'il existe d'autres nombres que les nombres entiers et les fractions (en particulier les nombres irrationnels dont nous reparlerons plus tard), mais à l'époque rien de tout cela ne transpirait encore. Bien après les premières fractions des Égyptiens, environ cinq cents ans avant notre ère, Pythagore fonda sa philosophie sur ce sentiment d'achèvement, toute résumée dans son célèbre aphorisme *Tout est nombre !*

Par cette proclamation, Pythagore ne se contentait pas d'entériner un constat empirique, il faisait également entrer le mysticisme dans le champ des mathématiques. Voici par exemple comment le scientifique commentait l'étonnante propriété $1 + 2 + 3 + 4 = 10$:

> « Le “un” est le divin, le principe de toute chose… Le “deux” est le couple masculin, féminin, la dualité… Le “trois”, les trois niveaux du monde, l'enfer, la terre et le ciel… Le “quatre”, les quatre éléments, l'eau, l'air, la terre et le feu… Enfin, le tout fait “dix”, la totalité de l'Univers, le divin compris ! »

Il s'agit du triangle sacré, selon Pythagore. Au sommet, nous trouvons le « un », puis le « deux », le « trois » et le « quatre » :



Pythagore et ses disciples sont loin d'avoir été les seuls à succomber à la tentation d'attribuer un sens surnaturel aux nombres, comme nous le verrons plus tard.

2

Les mathématiques secrètes des aborigènes

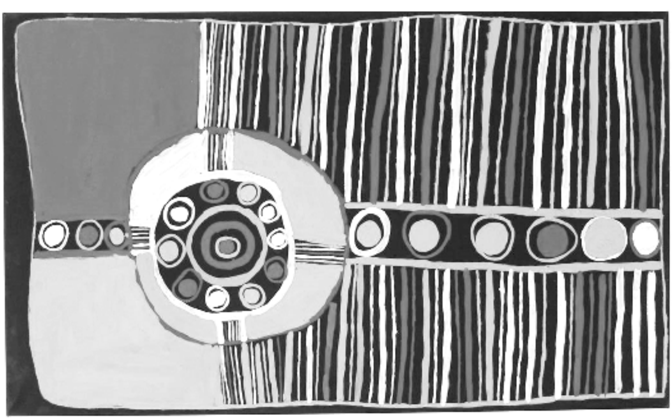
Les mathématiques sont nées sur les divers continents où s'épanouissaient les grandes civilisations. Mais l'exemple étonnant des aborigènes montre que certaines sociétés tribales ont peut-être aussi développé une culture mathématique. Les maths se cachent parfois là où on ne les attend pas, notamment… dans les règles sociales. À cause de leur gestion complexe des liens de parenté, tel Monsieur Jourdain qui faisait de la prose sans le savoir, les premiers habitants d'Australie faisaient peut-être des mathématiques sans le savoir !

Dans l'imaginaire occidental, quoi de plus éloigné des mathématiques que la culture aborigène ? Cette société semble sortir de l'époque des os d'Ishango et de Lebombo. Claude Lévi-Strauss a d'ailleurs appelé les aborigènes *les aristocrates de l'esprit du monde préhistorique*. Vieille de soixante mille ans, leur civilisation n'a connu aucun bouleversement important avant l'arrivée des Occidentaux en Australie au XVIIIe siècle.

Le temps du rêve chez les aborigènes

Les règles quasi mathématiques qui permettent aux aborigènes d'éviter la consanguinité font partie d'un ensemble plus vaste d'histoires : le temps du rêve. Il s'agit à la fois d'une mythologie de l'origine du monde et d'un corpus de contes populaires à travers lesquels se transmet la sagesse nécessaire à la survie. Ces contes ne racontent pas des rêves hallucinatoires comme on pourrait l'imaginer, mais au contraire répondent à des questions très terre à terre : comment chasser le kangourou ? Éviter les crocodiles ? Trouver les plantes nécessaires pour manger, s'habiller, se laver ?

Le temps du rêve transparaît dans les tableaux d'artistes aborigènes contemporains, à l'aspect étrange, évoquant presque des mathématiques modernes. Dans la culture aborigène, un artiste ne choisit pas le sujet de ses peintures à sa convenance comme en Occident, mais brode autour d'un thème qui dépend directement du nom de peau qu'il a reçu à la naissance.



Kulama par Timothy Cook, 2010. Galerie Luc Berthier.

Dans la culture aborigène, tout individu se voit attribué à la naissance un *nom de peau*. Ce nom détermine sa place dans la société, les contes dont il est dépositaire (voir encadré « Le temps du rêve chez les aborigènes ») et aussi les conjoints avec lesquels il peut espérer se lier. Toute personne, même occidentale, accueillie dans une tribu aborigène se verra aussi affecter un nom de peau. Sinon, elle n'y aurait ni place ni rôle et elle serait interdite de mariage. L'attribution du nom de peau se conforme à certaines règles qui masquent une complexité insoupçonnée.

Tj pour les hommes, N pour les femmes

Ces règles varient selon les ethnies. En guise d'exemple, voyons le cas des Warlpiri, une ethnie vivant dans le Centre Rouge d'Australie, le territoire qui abrite le célèbre rocher Uluru. Chez les Warlpiri, il existe huit noms de peau : *uppurula*, *apaganti*, *angala*, *apaltjari*, *apananga*, *ampitjinpa*, *ungurrayi* et *akamarra*. Les hommes les font précéder par *Tj*, les femmes par *N* et ce sont les mêmes pour les frères et sœurs. Ainsi, le frère d'une *Nuppurula* est un *Tjuppurula*.

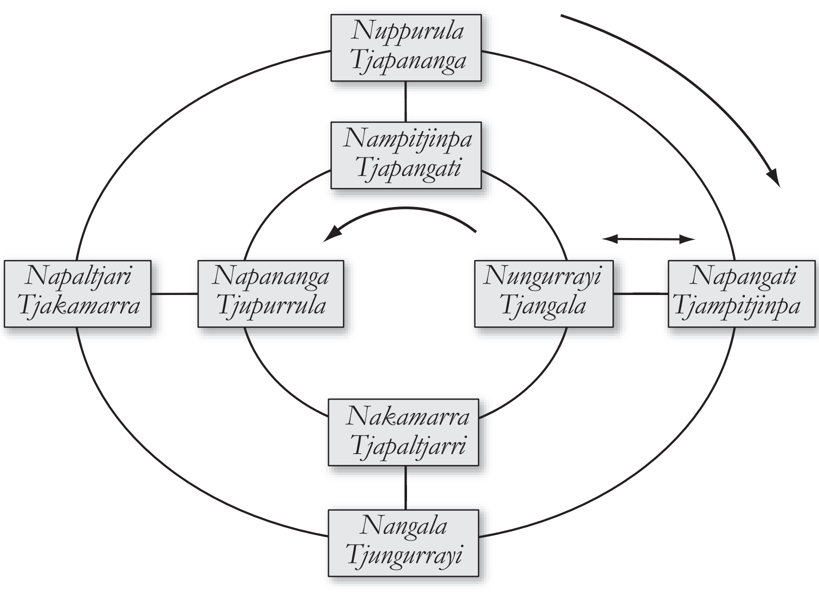
Les aborigènes doivent choisir leur conjoint en fonction de son nom de peau. La règle pour connaître le nom de son mari potentiel est plus compliquée que celle pour connaître celui de son frère, mais elle est stricte. Lorsqu'un couple a des enfants, les noms de ceux-ci sont également prédéterminés. Le tableau suivant résume la norme à suivre :

Femme	*Nuppurula*	*Napaganti*	*Nangala*	*Napaltjari*
Homme	*Tjapananga*	*Tjampitjinpa*	*Tjungurrayi*	*Tjakamarra*
Enfant	*apaganti*	*angala*	*apaltjari*	*uppurula*
Femme	*Napananga*	*Nakamarra*	*Nungurrayi*	*Nampitjinpa*
Homme	*Tjuppurrula*	*Tjapaltjari*	*Tjangala*	*Tjapangati*
Enfant	*akamarra*	*ungurrayi*	*ampitjinpa*	*apananga*

En lisant la deuxième colonne de ce tableau, on apprend qu'une femme *Nuppurula* (première ligne) doit épouser un *Tjapananga* (deuxième ligne). Leurs enfants seront des *apaganti* (troisième ligne), ce qui signifie que leurs filles seront des *Napangati* (*N-apaganti*) et leurs fils des *Tjapangati* (*Tj-apaganti*). Leurs filles étant des *Napaganti*, elles ne pourront donc épouser que des *Tjampitjinpa* et ainsi de suite.

Révélations

Ces règles d'attribution des noms de peau semblent obscures et arbitraires. De plus, elles sont bien difficiles à retenir ! De façon surprenante, les mathématiques permettent de les éclaircir. Pour cela, au lieu de les représenter en tableau, arrangeons-les sur deux cercles concentriques (au passage, un peu comme les cercles que décrivent les aborigènes en dansant les soirs de cérémonie) selon le schéma ci-dessous :



La ronde d'attribution des noms de peau.

À présent, autorisons les individus à se déplacer. D'une mère à ses filles, les femmes suivent deux cycles de période quatre en sens inverse l'un de l'autre : dans le sens des aiguilles d'une montre pour le cercle extérieur, et dans le sens opposé pour le cercle intérieur. Pendant ce temps, d'un père à ses fils, les hommes changent de cycles en évoluant entre les positions contiguës des deux cycles.

En respectant ce processus, on voit que les filles d'une *Nuppurula* (rectangle du haut) sont des *Napaganti* (rectangle à droite obtenu en tournant d'un quart de cercle), leurs garçons, des *Tjapaganti* (rectangle en dessous, donc dans le cycle intérieur). La ronde continue ainsi au long des générations et empêche filles et garçons d'un même couple de se marier. Une analyse mathématique plus poussée montre que le mariage n'est possible qu'après trois générations, et encore la probabilité que le cas de figure se présente est minime. Finalement, *a priori* étranges, ces règles préservent les aborigènes de la consanguinité. En l'absence de tout état civil !

Les aborigènes étaient-ils ou non mathématiciens ?

Aussi astucieux soit ce système pour éviter les maladies liées à la consanguinité, les aborigènes l'ont-ils conçu délibérément ? Étaient-ils de redoutables mathématiciens ? Même s'ils avaient effectivement imaginé la série des attributions des noms de peau à partir de deux cycles et que, pour nous, ce type de réflexion évoque les mathématiques, en l'absence de toute autre manifestation d'un esprit mathématique dans leur société, il peut s'agir d'une coïncidence. Il est donc hasardeux de parler de culture mathématique.

Dans les années 1940, alors qu'il préparait ce qui sera son œuvre fondamentale, *Les Structures élémentaires de la parenté*, Claude Lévi-Strauss se heurta à ces règles gouvernant le mariage dans certaines tribus aborigènes. Elles lui semblèrent tellement confuses et inextricables qu'il fit appel à un mathématicien, André Weil (que nous retrouverons plus loin à propos du phénomène Bourbaki), pour l'aider à démêler la question. Weil mit au jour une structure de groupe (un ensemble d'éléments muni d'une opération sur ces éléments, ce que nous verrons plus loin) dans le système des noms de peau, ce qui est une vision intéressante, mais ne prouve absolument pas que les aborigènes l'aient entrevu ainsi. Mais préservons-nous de l'arrogance de l'Occidental se penchant sur les peuples dits premiers : déclarer que la culture aborigène n'est pas mathématique ne signifie pas qu'elle soit simpliste. Cette façon de voir est plutôt un reflet de notre culture personnelle.

3

Magie et mathématique

Entre Dan Brown, qui truffe son *Da Vinci Code* de références à des « divines proportions », et la basilique de la Sagrada Família à Barcelone, dont une façade arbore un carré magique, les exemples de récupération ésotérique des mathématiques ne manquent pas dans la culture contemporaine. Il y a deux mille cinq cents ans, Pythagore flirtait déjà avec le mysticisme quand il déclarait que « Tout est nombre » (voir chapitre « Les racines préhistoriques et antiques »). L'idée sera peut-être difficile à avaler pour nos lecteurs les plus rationalistes, mais la magie et l'ésotérisme font partie de l'histoire des mathématiques. Ils ont même contribué à son développement !

Depuis l'époque de Pythagore, nombre de croyances magiques restent attachées aux mathématiques. L'exemple le plus simple est celui du nombre 13 qui porte chance… ou malchance selon les personnes. Aujourd'hui encore, on évite, même chez certains mathématiciens, d'être 13 à table. Cette croyance est extra-mathématique. Elle vient du dernier repas du Christ avec ses apôtres et non pas d'une propriété mathématique du nombre 13.

Il en est de même de la plupart des nombres considérés comme magiques ou sacrés, 7 par exemple. Quant à la numérologie ou à l'arithmancie, qui prétendent prévoir l'avenir au travers d'additions, elles sont l'équivalent pour les mathématiques de l'astrologie à l'astronomie… Même si des mathématiciens furent numérologues (comme certains astronomes furent astrologues), on conçoit difficilement aujourd'hui qu'un mathématicien puisse pratiquer ce type de pseudosciences.

La beauté divine des nombres parfaits

On attribuait à 13 et 7 des pouvoirs surnaturels pour des raisons extérieures aux mathématiques. Plus étonnants sont les nombres considérés comme magiques pour des motifs internes. Parmi les plus étudiés sont les nombres parfaits dont parle déjà Euclide au IIIe siècle avant notre ère dans ses *Éléments*. Par définition, les nombres parfaits sont les nombres égaux à la somme de leurs diviseurs autres qu'eux-mêmes. Par exemple, 6 est parfait puisque ses diviseurs stricts sont 1, 2 et 3, dont la somme est égale à 6. La traduction littérale du terme grec utilisé par Euclide pour désigner les nombres parfaits est *nombre à qui il ne manque rien*.

La nature « parfaite » de ces nombres aurait pu rester une curiosité mathématique, mais dans l'Antiquité on ne prenait pas cette propriété à la légère. Ainsi, dans *La Cité de Dieu*, on peut lire sous la plume d'Augustin d'Hippone (354-430) une vision mystique de cette perfection :

> « Ainsi, nous ne devons pas dire que le nombre six est parfait, parce que Dieu a achevé tous ses ouvrages en six jours : loin de là, Dieu a achevé tous ses ouvrages en six jours parce que le nombre six est parfait ; supprimez le monde, ce nombre resterait également parfait ; mais s'il n'était pas parfait, le monde, qui reproduit les mêmes rapports, n'aurait plus la même perfection. »

On trouve des idées voisines dans l'*Introduction à l'arithmétique*, un ouvrage rédigé par le philosophe néopythagoricien Nicomaque de Gérase (Ier siècle de notre ère) et véritable mathématicien puisqu'il découvrit le quatrième nombre parfait :

> « Il arrive que, de même que le beau et le parfait sont rares et se comptent aisément… les nombres parfaits se comptent facilement et se succèdent dans un ordre convenable ; on n'en trouve qu'un seul parmi les unités, 6, un seul dans les dizaines, 28, un troisième assez loin dans les centaines, 496 ; quant au quatrième, dans le domaine des mille, il est voisin de dix mille, c'est 8128. Ils ont un caractère commun, c'est de se terminer par un 6 ou par un 8, et ils sont tous invariablement pairs. »

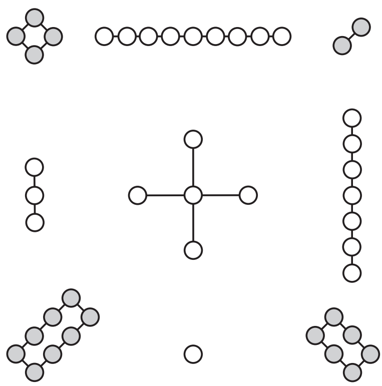
À l'heure actuelle, le dernier point évoqué par Nicomaque de Gérase (la parité des nombres parfaits) reste une conjecture. Personne n'a encore réussi à prouver qu'il n'existait pas de nombres parfaits impairs, même si le fait que personne n'en ait jamais trouvé un seul milite dans ce sens. De même, l'existence d'une infinité de nombres parfaits pairs est une conjecture. Les quatre premiers sont identifiés depuis l'Antiquité : 6, 28, 496 et 8128 et, à l'heure actuelle, nous n'en connaissons que 49 ! Les plus grands n'ont été découverts que récemment et ont plusieurs dizaines de millions de chiffres.

Les carrés magiques

Les temps ont changé et plus personne ne comprend l'expression « nombre parfait » dans le sens d'une perfection externe aux mathématiques. Curieusement, il en va autrement pour les carrés magiques, dont l'origine mythique remonte à l'Antiquité chinoise. Voici l'une des multiples versions de la légende qui raconte comment des paysans habitant le long de la rivière Luohe apaisèrent la colère d'un dieu grâce à leur intelligence :

> « Pour calmer le dieu de la rivière, à chaque inondation, les habitants d'un village menacé d'être englouti lui offraient des

sacrifices en vain. Cependant, ils remarquèrent qu'à chaque fois, une tortue venait sur les lieux du sacrifice et repartait. Le dieu du fleuve n'en tenait cure jusqu'à ce qu'un jour, un enfant remarquât des formes curieuses sur le dos de l'animal. Dans chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale, le nombre était le même. Ainsi, les villageois comprirent que le dieu du fleuve demandait quinze sacrifices, et purent l'apaiser… »



Dos de la tortue, selon la légende.

Ce dessin est depuis appelé *Luo Shu*, ce qui signifie littéralement « Le livre de la rivière ». Il a voyagé sous diverses formes au Moyen-Orient puis en Grèce où il aurait été connu de Pythagore. Il est toujours utilisé comme amulette porte-bonheur et intervient dans des exercices divinatoires dans certaines cultures asiatiques.

Ce type de carré, où les sommes des diagonales, des colonnes et des lignes prennent une seule et même valeur est nommé un carré magique. Durant l'été, il pullule dans les suppléments jeux de nos magazines sous la forme de casse-tête mathématique. Le lecteur y est invité à compléter un tableau contenant quelques chiffres en respectant les règles originelles d'addition de l'énigme du *Luo Shu*.

Une profondeur insoupçonnée

De même que les nombres parfaits, les carrés magiques ont fait l'objet de véritables mathématiques pour les dénombrer, les construire et étudier leurs propriétés. Par exemple, on s'est rendu compte très tôt qu'il n'existe qu'un seul carré magique d'ordre trois, c'est-à-dire à trois lignes et trois colonnes (aux symétries près, bien sûr, et sous réserve qu'on se limite aux chiffres de 1 à 9).

Le prouver est simplissime. L'essentiel est de remarquer que la somme des nombres dans le carré est égale à celle des chiffres de 1 à 9, c'est-à-dire à 45. On en déduit que les sommes sur les lignes, les colonnes et les diagonales sont égales à 15, le tiers de 45. Le chiffre du centre participe donc à quatre décompositions de 15 en la somme de trois chiffres. Quelques essais suffisent à déterminer qu'il s'agit de 5 et à compléter le tableau pour finalement obtenir le carré suivant :

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Le carré d'ordre trois étant unique, ce tableau est bien entendu identique au carré original du *Luo Shu*. À noter que de nos jours, les adeptes d'ésotérisme préfèrent l'écrire de façon à faire apparaître le nombre 618 en première ligne, car ce sont les premières décimales du nombre d'or. Pour eux, il devient ainsi doublement magique.

Il existe des carrés magiques de toutes les tailles. Pour une taille donnée, la somme sur les lignes, colonnes et diagonales est facile à trouver. Il faut procéder comme pour le carré d'ordre trois. Par exemple, pour les carrés d'ordre quatre, c'est la somme des nombres de 1 à 16 divisée par quatre, soit 34. Pour autant, remplir le tableau d'une combinaison de chiffres n'est pas évident (même pour un carré d'ordre quatre et malgré le nombre important de solutions, 880 si l'on tient compte de celles qui se déduisent des autres par symétrie). Si bien que pour y parvenir, on a dû inventer des méthodes.

En voici une très simple : on écrit les nombres de 1 à 16 dans les cases dans l'ordre croissant. Les sommes sur les diagonales (en gris sur la figure de gauche) sont bien égales à 34. En inversant les diagonales, sans toucher aux autres chiffres, on obtient un carré magique d'ordre quatre !

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Le plus connu des carrés magiques d'ordre quatre est contenu dans la gravure *Melencolia* d'Albrecht Dürer, qui date du XVI^{e} siècle, et que nous verrons plus loin :

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Il se déduit de celui que nous venons d'obtenir en inversant les deux colonnes centrales.

De nos jours, ces carrés magiques sont toujours étudiés, plusieurs millénaires après leur découverte. Quelques personnes, en particulier certains adeptes du feng shui, croient même encore à leur vertu magique, mais la seule magie qui les concerne est sans doute le succès planétaire d'un de leur lointain avatar, le sudoku.

Défi mathématique

Vous voulez égayer un repas familial en épatant vos convives avec un carré magique ? Mettez-les au défi de trouver un carré d'ordre 5 et pimentez le jeu en pariant une bouteille de champagne. Vous seul connaîtrez la méthode rapide proposée par un mathématicien et poète du début du XVI^{e} siècle, Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638). Toute l'astuce repose sur le fait qu'on commence avec un carré tourné de 45°. Bachet a décrit sa méthode dans *problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres.* On commence avec une figure en forme de losange englobant le carré et on y écrit les nombres de 1 à 25 suivant les diagonales comme le montre la figure :

				1				
			6		2			
		11		7		3		
	16		12		8		4	
21		17		13		9		5
	22		18		14		10	
		23		19		15		
			24		20			
				25				

La somme sur les lignes, colonnes et diagonales du carré doit être égale à la somme des nombres de 1 à 25 divisée par cinq, soit 65. On trouve effectivement ce nombre 65 comme somme des nombres des diagonales du carré et du losange. Le calcul est facilité par le fait qu'ils sont en progressions arithmétiques (5, 5 + 4, 9 + 4… par exemple). On fait alors glisser le triangle grisé de droite pour le faire coïncider avec celui de gauche et de même pour les trois autres (à gauche, en dessous et au-dessus). On obtient finalement un carré magique. Et voilà, à vous la bouteille de champagne !

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

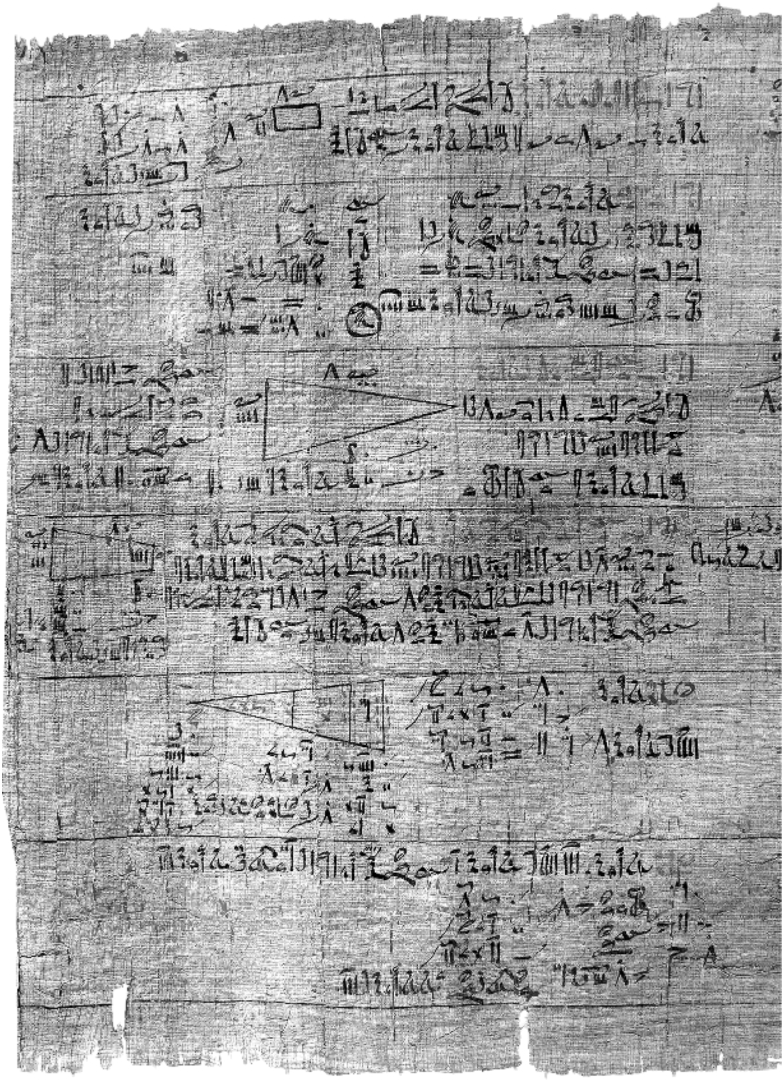
④

Les arpenteurs de l'Univers

Quelles activités humaines ont stimulé l'émergence des mathématiques ? Qu'est-ce qui a bien pu pousser les hommes à se triturer la tête pour accoucher de concepts immatériels ? L'ambition des premiers mathématiciens (ils ne s'appelaient pas encore ainsi) n'était pas de produire des connaissances désincarnées, mais de répondre à des problèmes terre à terre. Les problèmes d'arpentage (la mesure des surfaces de terrain), et de façon plus générale d'estimation des dimensions, figurent en bonne place parmi ces stimulants de l'imagination.

L'intérêt que portaient les Égyptiens aux questions d'arpentage nous est parvenu grâce notamment au papyrus Rhind que nous avons déjà évoqué et qui est conservé au British Museum. Datant du Moyen Empire, il est l'œuvre d'un scribe qui y a couché 87 problèmes résolus d'arithmétique, dont des calculs d'aires de triangles, de quadrilatères et de cercles. Grâce à ces casse-tête, les apprentis scribes, futurs fonctionnaires de l'administration, apprenaient à estimer les superficies de champs.

Il n'existe pas de raison claire à cette obsession des Égyptiens pour l'arpentage. La réponse la plus courante, donnée déjà par Hérodote au Ve siècle avant notre ère, invoque les crues du Nil. Après les inondations, les bornes des champs n'étaient en effet plus visibles. Mais quiconque avait fait estimer l'aire de

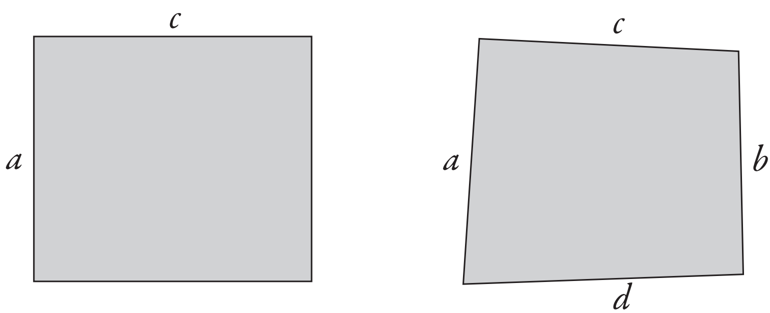


Papyrus Rhind. British Museum.

son champ pouvait récupérer facilement un terrain de même surface. Une autre hypothèse fait jouer un rôle à l'administration fiscale. Les paysans étant taxés proportionnellement aux aires de leurs champs, le fisc se devait d'établir un cadastre des terres cultivables.

Un esprit cynique pencherait plutôt pour la seconde possibilité pour la simple raison que… le fisc arnaquait vraisemblablement les paysans en usant des formules du papyrus Rhind. En effet, pour calculer la superficie d'un champ rectangulaire, les Égyptiens utilisaient la formule correcte largeur × longueur. Mais dans le cas d'un champ pas tout à fait rectangulaire, ils employaient une formule (voir encadré) que l'on sait aujourd'hui approximative et qui *surestimait* la surface. En appliquant des formules mathématiques, le fisc percevait plus qu'il ne le devait ! Les fonctionnaires étaient-ils conscients de l'abus ? Mystère.

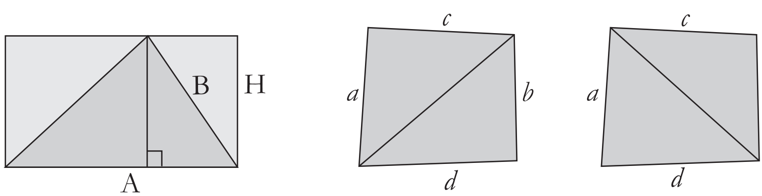
L'arnaque du fisc égyptien



Forme d'un champ en Égypte : rectangulaire ou presque.

Voici comment les Égyptiens mesuraient les champs et escroquaient les paysans. Devant un champ rectangulaire, doté des côtés a et c, ils appliquaient la formule correcte : $a \times c$. Pour les champs non rectangulaires, ils eurent l'idée de considérer qu'il s'agissait encore d'un rectangle et d'utiliser comme longueurs des côtés, les moyennes des longueurs des côtés opposés, soit $(a + b) / 2$ et $(c + d) / 2$. L'aire du quadrilatère était donc considérée comme le produit de ces deux longueurs… ce qui est faux sauf si $a = b$ et $c = d$.

On peut le démontrer en décomposant le quadrilatère en plusieurs triangles, ce qui est faisable de deux façons en utilisant l'une de ses diagonales ou l'autre. Les Égyptiens savaient le faire mais une approximation leur suffisait. Ci-dessous, la figure de gauche montre que l'aire du triangle en gris est égale à A.H / 2, donc inférieure à A.B / 2, l'égalité n'ayant lieu que si le triangle est rectangle (angle droit en bas). En appliquant cette inégalité au premier découpage du quadrilatère (au centre), on montre que son aire est inférieure à ($ac + bd$) / 2. En l'appliquant au second découpage (à droite) et en faisant la somme des inégalités, on prouve l'inégalité et le seul cas d'égalité. Les taxes étaient proportionnelles à la superficie du champ. Plus le champ s'écartait d'un rectangle, plus les fonctionnaires de l'administration surtaxaient les paysans. Majorer l'impôt à payer est-il un invariant fiscal ?

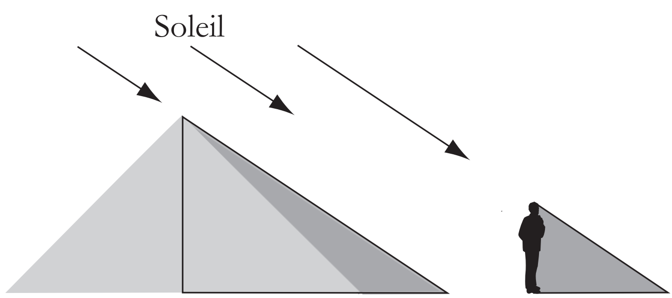


Résumé de la démonstration de l'inégalité fiscale en Égypte.

Du haut de ces pyramides, quarante siècles vous contemplent

L'évaluation des hauteurs et des longueurs a été un autre aiguillon de la pensée mathématique. L'histoire, sans doute légendaire, se déroule au pied de la pyramide de Khéops. Alors qu'il admirait le monument, le philosophe et savant grec Thalès, en visite en Égypte, se voit soudain mis au défi par le pharaon de l'époque d'en trouver la hauteur. Gardant sa contenance, Thalès aurait dit au souverain : « Le rapport que j'entretiens avec mon ombre est le même que celui de la pyramide avec la sienne », puis aurait calculé la hauteur de la pyramide. Cette célèbre anecdote a été rapportée par un certain Hiéronyme de Rhodes quatre siècles après la mort de Thalès.

N'ayons pas peur de déboulonner un mythe : cette histoire est peut-être trop belle pour être vraie ! Il n'est pas dit que Thalès ait véritablement réussi à mesurer la hauteur de la pyramide, du moins pas précisément. En revanche, il est tout à fait vrai que si on connaît la hauteur de Thalès, la longueur de son ombre et de celle de la pyramide, disons 1,80 m, 90 cm et 70 m respectivement, on obtient la hauteur de la pyramide par un simple calcul de proportions : 1,80 est le double de 0,90 donc la hauteur de la pyramide est le double de 70 m, soit 140 m. Mais ce calcul n'est que théorique car, comme le centre de la pyramide était inaccessible à Thalès… il ne pouvait pas mesurer directement la longueur de son ombre. Un calcul correctif aurait été nécessaire, calcul dont Hiéronyme ne parle pas.



Une autre version de la légende affirme que Thalès constata que, au moment où il parlait, l'ombre d'un bâton était égale à sa hauteur. Il en aurait déduit que la hauteur de la pyramide était également égale à la longueur de l'ombre. Un calcul astronomique montre que cette situation ne survient que lorsque la déclinaison solaire est égale à 15 degrés exactement, c'est-à-dire les 2 novembre et 8 février. Une marge d'erreur de 1 % sur la longueur de l'ombre permet un jour d'écart, une marge de 5 %,