**CPGE My Youssef, Rabat**

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيم
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

# Feuille d'exercices: *Espaces vectoriels normés*

**5 novembre 2009**

***Blague du jour***
**• Qu'est-ce qui est jaune, normé et complet ?**
**Réponse : Un espace de Bananach.**
**• Qu'est-ce qui est jaune, normé, complet et meilleur avec de la chantilly ?**
**Réponse : Un Bananach Split.**

***Mathématicen du jour*** — ***Banach***
**Stefan Banach (1892-1945) est un mathématicien polonais. Il est un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle. Il est à l'origine, avec Alfred Tarski, du Paradoxe de Banach-Tarski qui par la simplicité apparente de son énoncé est étrange dans sa conclusion. Ses autres travaux touchent à la théorie de la mesure de l'intégration, de la théorie des ensembles et des séries orthogonales.**

**Remerciements : À Monsieur Basso Hafid (MP-Casa) pour la source latex des exercices.**

## *Exercice 1 .*

$N : (x, y) \mapsto |5x + 3y|$ **est-elle une norme sur** $\mathbb{R}^2$ **?**

## *Exercice 2 .*

**On définit sur** $\mathbb{R}^2$ **les 3 applications suivantes :**

$$N_1((x,y)) = |x| + |y|,\ \ N_2((x,y)) = \sqrt{x^2+y^2},\ \ N_\infty((x,y)) = \max(|x|,|y|).$$

1) **Prouver que** $N_1$**,** $N_2$**,** $N_3$ **définissent 3 normes sur** $\mathbb{R}^2$**.**
2) **Prouver que l'on a :** $\forall \alpha \in \mathbb{R}^2,\ \ N_\infty(\alpha) \leq N_2(\alpha) \leq N_1(\alpha) \leq 2N_\infty(\alpha)$.
3) $N_1$**,** $N_2$ **et** $N_3$ **sont-elles équivalentes ?**
4) **Dessiner les boules unités fermées associées à ces normes.**

## *Exercice 3 .*

**Soit** $E = \mathbb{R}_3[X]$**. Pour** $P$ **élément de** $E$**, on pose :**

$$\|P\| = |P(0)| + |P(1)| + |P(2)| + |P(3)|$$

1) **Démontrer que** $\|.\|$ **est une norme.**
2) **Soit** $\varphi$ **l'application de** $E$ **dans** $E$ **définie par :** $\varphi(P)(X) = P(X+2)$**. Vérifier que** $\varphi$ **est linéaire, continue et calculer sa norme subordonnée.**

*Exercice 4 .*

1) **Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est dense dans cet espace.**
**Indication : Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $A + \mathrm{diag}\left(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{p}{n}\right)$ soit à racines simples.**
2) **Soit $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré $p$. Montrer que les racines de $P$ sont toutes dans le disque fermé $D$ de centre $0$ et de rayon $R = \max\{1, pM\}$, avec $M = \max_{0 \le i \le p-1} |a_i|$.**
3) **On se propose de montrer dans cette question que l'ensemble des polynômes de degré $p$ unitaires et scindés sur $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}_p[X]$.**
**Soit $P_n = X^p + a_{p-1}^{(n)}X^{p-1} + \cdots + a_1^{(n)}X + a_0^{(n)}$ une suite de polynômes unitaires de degré $p$ scindés sur $\mathbb{R}$ qui vers un certain polynôme $P = \sum_{i=0}^{p} a_iX^i$.**
   a) **Montrer que : $\lim_{\infty} a_i^{(n)} = a_i$ pour tout $i \in [\![0, p]\!]$.**
   b) **Dire pourquoi $a_p = 1$.**
   c) **Pour tout entier naturel $n$, notons $Z_n = (z_1^{(n)}, \cdots, z_p^{(n)})$ une liste des zéros (supposés réels) du polynôme $P_n$ pris dans un ordre arbitraire, mais bien sûr comptés avec leurs multiplicités.**
   **Montrer que la suite $(Z_n)$ admet une suite extraite $(Z_{\varphi(n)})$ convergente, de limite $Z = (z_1, \cdots, z_p)$.**
   d) **En déduire que $\prod_{i=1}^{p}(X - z_i)$.**
   e) **Conclure**
4) **Montrer que dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, de l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans celui des matrices trigonalisables.**

*Exercice 5 .*

**Soit $a, b > 0$. On pose, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x, y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$.**

1) **Prouver que $N$ est une norme. Dessiner sa boule unité.**
2) **Déterminer le plus petit nombre $p > 0$ tel que $N \le p\|.\|_2$ et le plus grand nombre $q$ tel que $q\|.\|_2 \le N$.**

*Exercice 6 .*

**Soit $E$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit pour $f \in E$**

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|;\ x \in [0, 1]\},\ \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

**Vérifier que $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ sont deux normes sur $E$. Montrer que**

$$\forall f \in E,\ \|f\|_1 \le \|f\|_\infty.$$

**En utilisant la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$, prouver que ces deux normes ne sont pas équivalentes.**

*Exercice 7 .* **Soit $N$ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ : $(x, y) \mapsto \sup_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|x + ty|}{\sqrt{1 + t^2}}$.**

1) **Montrer que $N$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.**
2) **La comparer à la norme euclidienne. Expliquer.**

*Exercice 8 .*
**Soit $E$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies, continues et dérivables sur $[0,1]$ et vérifiant $f(0) = 0$. On définit sur cet espace les deux normes suivantes :**

$$N_1(f) = \|f\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f'\|_\infty.$$

1) **Montrer que $N_1(f) \leq N_2(f)$. En déduire que l'application identique de $(E, N_2)$ vers $(E, N_1)$ est continue.**
2) **A l'aide de la fonction $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$, montrer que l'application identique de $(E, N_1)$ vers $(E, N_2)$ n'est pas continue.**

*Exercice 9 .*
**On définit $E = \{f \in C^2([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0\}$. Soient $\|.\|$ et $N$ les deux applications définies sur $E$ par**

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \text{ et } N(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)|$$

1) **Montrer que ces deux applications sont des normes sur $E$.**
2) **Sont-elles équivalentes ?**

*Exercice 10 .*
**Soit $E$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des applications de classe $C^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $N_1$, $N_2$ $N_3$ les applications de $E$ dans $\mathbb{R}$ définies par : $N_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, $N_2(f) = |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$, $N_3(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)|$.**
**Montrer que $N_1$, $N_2$ et $N_3$ sont des normes sur $E$ et les comparer.**

*Exercice 11 .*
**On définit sur l'espace vectoriel $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$ les applications $\gamma_1$ et $\gamma_2$ par**
$\gamma_1(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ **et** $\gamma_2(f) = \int_0^1 e^x\, |f(x)|\, dx$

1) **Montrer que $\gamma_1$ et $\gamma_2$ sont des normes sur $E$.**
2) **Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ la suite de fonctions définie par** $\begin{cases} f_n(x) = 1 - nx \textbf{ si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ f_n(x) = 0 \textbf{ si } \frac{1}{n} < x \leqslant 1. \end{cases}$.
   **Etudier la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ dans $(E, \gamma_1)$ dans $(E, \gamma_2)$. Conclusion ?**

*Exercice 12 .* **On définit une application sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant**

$$N(A) = n \max_{i,j} |a_{i,j}| \text{ si } A = (a_{i,j}).$$

**Vérifier que l'on définit bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis qu'il s'agit d'une norme d'algèbre, c'est-à-dire que**

$$N(AB) \leq N(A)N(B) \text{ pour toutes matrices } A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

*Exercice 13 .*
**Soit** $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ **et** $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) **Que peut-on dire de la suite $6^n A^n$ ? (on commencera par calculer $P^{-1}AP$).**
2) **Etudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{6^n}{n} A^n$.**

mamouni.myismail@gmail.com
myismail.chez.com

*Exercice 14 .*
**Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. On définit sur $E$ trois normes par, si $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ :** $N_1(P) = \sum_{i=0}^{p} |a_i|$, $N_2(P) = \left(\sum_{i=0}^{p} |a_i|^2\right)^{1/2}$, $N_\infty(P) = \max_i |a_i|$.

1) **Vérifier qu'il s'agit de 3 normes sur $\mathbb{R}[X]$.**
2) **Sont-elles équivalentes deux à deux ?**

*Exercice 15 .*
$E = \mathbb{R}[X]$ **et si** $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, **on pose** $\| P \| = \sum_{k=0}^{+\infty} | a_k |$

1) **Montrer que** $(E, \|\|)$ **est un evn.**
2) **On pose** $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. **Montrer que la suite** $P_n$ **est de Cauchy dans** $E$.
3) **Converge-t-elle dans** $E$ **?**

*Exercice 16 .*
$E = \mathbb{R}[X]$ **et si** $P \in \mathbb{R}[X]$, **on pose** $\| P \| = \underset{t \in [0,1]}{sup} | P(t) - P'(t) |$

1) **Montrer que** $(E, \|\|)$ **est un evn.**
2) **On pose** $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. **Montrer que la suite** $P$ **est de Cauchy dans** $E$.
3) **Converge-t-elle dans** $E$ **?**

*Exercice 17 .*
**Dire si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :**

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\}, \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\},$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| \leq 1\}, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\},$$
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}\}, \qquad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\},$$
$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - \exp(\sin y) \leq 12\right\}, \qquad H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \ln|x^2+1| > 0\}.$$

*Exercice 18 .*
**On définit un sous-ensemble** $A$ **de** $\mathbb{R}^2$ **en posant**

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\}.$$

**Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de** $A$.

*Exercice 19 .*
**Soit** $C$ **une partie convexe de** $\mathbb{R}^n$. **Prouver que** $\overline{C}$ **est aussi convexe.**

*Exercice 20 .*
**Soit** $E$ **un espace vectoriel normé, et** $V$ **un sous-espace vectoriel de** $E$.

1) **Montrer que** $\overline{V}$ **est un sous-espace vectoriel de** $E$.
2) **Montrer que si** $\overset{\circ}{V} \neq \varnothing$, **alors** $V = E$.

*Exercice 21 .*
**Soit** $E$ **un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E est fermé**

*Exercice 22 .*

**Soit $E$ un espace vectoriel normé. Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même rayon**

*Exercice 23 .*

**Donner un exemple d'ensemble $A$ tels que : $A$, l'adhérence de $A$, l'intérieur de $A$, l'adhérence de l'intérieur de $A$ et l'intérieur de l'adhérence de $A$ sont des ensembles distincts deux à deux.**

*Exercice 24 .*

**Soit $A$ une partie d'un espace vectoriel normé $E$. On rappelle que la frontière de $A$ est l'ensemble $Fr(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$. Montrer que :**

1) $Fr(A) = \{x \in E \mid \forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ **et** $B(x,\varepsilon) \cap C_E^A \neq \emptyset\}$
2) $Fr(A) = Fr(C_E^A)$
3) $A$ **est fermé si et seulement si** $Fr(A)$ **est inclus dans** $A$.
4) $A$ **est ouvert si et seulement si** $Fr(A) \cap A = \emptyset$.

*Exercice 25 .*

**Soit $E$ un espace vectoriel normé. Soit $A$ une partie non vide et bornée de $E$.**
**On définit $diam(A) = \sup\{\|y - x\|, x, y \in A\}$.**

1) **Montrer que si $A$ est bornée, alors $\overline{A}$ et $Fr(A)$ sont bornés.**
2) **Comparer $diam(A)$, $diam(\overset{\circ}{A})$ et $diam(\overline{A})$ lorsque $\overset{\circ}{A}$ est non vide.**
3) a) **Montrer que $diam(Fr(A)) \leq diam(A)$.**
   b) **Soit $x$ un élément de $A$, et $u$ un élément de $E$ avec $u \neq 0$. On considère l'ensemble $X = \{t \geq 0 \mid x + tu \in A\}$. Montrer que $\sup X$ existe.**
   c) **En déduire que toute demi-droite issue d'un point $x$ de $A$ coupe $Fr(A)$.**
   d) **En déduire que $diam(Fr(A)) = diam(A)$.**

*Exercice 26 .*

**Soit $E$ un espace vectoriel normé. On munit $\mathcal{L}_c(E)$ de la norme des applications linéaires. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$, et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $f$. Montrer que $|\lambda| \leq \|f\|$.**

*Exercice 27 .*

**Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**

*Exercice 28 .*

**Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.**

*Exercice 29 .*

**Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales $O_n(\mathbb{R})$ (celles qui vérifient ${}^tMM = I_n$) est un compact.**

*Exercice 30 .*

**Soient $A$ et $B$ deux matrices réelles d'ordre $n$.**

1) **On suppose $A$ inversible. Montrer que $P_{AB} = P_{BA}$, où $P_M$ est le polynôme caractéristique de $M$.**
2) **Montrer que ce résultat subsiste si on se suppose plus $A$ inversible.**

*Exercice 31 .*
**Soit $E$ un evn, et $A$ et $B$ deux parties de $E$. On définit :**

$$A+B=\{z\in E;\ \exists x\in A,\ \exists y\in B,\ z=x+y\}.$$

**Montrer que si $A$ est ouvert, alors $A+B$ est ouvert.**

*Exercice 32 .*
**Soit $F$ un fermé, et $C$ un compact de $\mathbb{R}^n$. On note $G=F+C=\{x+y;\ x\in F$ et $y\in C\}$. Montrer que $G$ est fermé. Que dire si $C$ est supposé simplement fermé ?**

*Exercice 33 .*
**Soit $E$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé de dimension finie, et $K$ un compact de $E$ tel que $0\in\mathring{K}$. On note $H$ l'ensemble des $u\in\mathcal{L}(E)$ tels que $u(K)\subset K$. Montrer que pour tout $u\in H$, on a $|\det u|\leq 1$**

*Exercice 34 .*
**Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts :**

$$\begin{array}{ll} A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^4=1\} & B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^5=2\} \\ C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+xy+y^2\leq 1\} & D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+8xy+y^2\leq 1\} \\ E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y^2=x(1-2x)\}. & \end{array}$$

*Exercice 35 .*
**Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $(x_n)$ une suite convergente de $E$ et soit $x$ sa limite. Montrer que l'ensemble : $A=\{x\}\cup\{x_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ est compact.**

*Exercice 36 .*
**Soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{R}^d$. Pour $n\geq 1$, on pose $A_n=\{u_p;\ p\geq n\}$.**

1) **Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)$ est : $V=\bigcap_{n\geq 1}\overline{A_n}$.**
2) **En déduire que si la suite est bornée, $V$ (l'ensemble des valeurs d'adhérence) est compact.**

*Exercice 37 .*
**Soit $A$ une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et $(x_n)$ une suite de $A$ n'admettant qu'une seule valeur d'adhérence. Montrer que $(x_n)$ converge.**

*Exercice 38 .*
**Soit $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{\|x\|\to\infty}\|f(x)\|=+\infty$. Montrer que $f$ admet un minimum.**

*Exercice 39 .*
**Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :**

1) $\forall M>0,\ \exists R>0$ **tel que** $\|x\|>R\implies |f(x)|>M$.
2) **Pour toute partie bornée $B$ de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.**
3) **Pour toute partie compacte $K$ de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.**

*Exercice 40 .*
**Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E$. On suppose que $(x_n)$ est de Cauchy. Montrer qu'elle converge si et seulement si elle admet une sous-suite convergente.**

*Exercice 41 .*
**Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$, et $A$ une partie non vide de $E$. On définit la *distance* d'un élément $x_0$ de $E$ à une partie $A$ de $E$, notée $d(x_0, A)$, par la formule**

$$d(x_0, A) = \inf_{x\in A} \|x - x_0\|.$$

**1)** **Supposons $A$ compact. Montrer que pour tout $x_0 \in E$ il existe $y \in A$ tel que $d(x_0, A) = \|y - x_0\|$.**

**2)** **Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que $A$ est fermé. (On remarquera que pour toute partie $B$ de $A$ on a $d(x_0, B) \geq d(x_0, A)$.)**

**3)** **Montrer que l'application qui à $x_0$ associe $d(x_0, A)$ est continue sur $E$ (sans aucune hypothèse sur $A$).**

**4)** **En déduire que si $A$ est un fermé de $E$ et $B$ un compact de $E$ tels que $A$ et $B$ sont disjoints, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que**

$$\|a - b\| \geq \delta \qquad \forall (a, b) \in A \times B.$$

**5)** **Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que $A$ et $B$ sont deux fermés disjoints.**

*Exercice 42 .*
**Soit $E$ un espace vectoriel normé.**
**Montrer que ($E$ est complet)$\Leftrightarrow$ (toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E$ vérifiant $\forall\ n \in \mathbb{N},\quad ||u_{n+1} - u_n|| \leq \frac{1}{2^n}$ est convergente).**

*Exercice 43 .*
**Soit $X$ un ensemble. On note $B(X,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de $X$ dans $\mathbb{R}$. On munit $B(X,\mathbb{R})$ en posant $\forall f \in B(X,\mathbb{R}),\ \|f\| = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$.**
**Muni de cette norme, montrer que $B(X,\mathbb{R})$ est un espace de Banach.**

*Exercice 44 .*
**Soit $E$ un espace vectoriel normé, $F$ un espace de Banach, et $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de $E$ dans $F$, muni de la norme des applications linéaires : $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|f(x)\|$.**
**Montrer que $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un espace de Banach.**

*Exercice 45 .*
**On note $\ell^1$ l'espace vectoriel des suites $x = (x(k))_{k\in\mathbb{N}}$ réelles vérifiant :**

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |x(k)| < +\infty.$$

**On admettra que l'on définit ainsi une norme sur $\ell^1$. On cherche à prouver que $\ell^1$ est un espace de Banach. Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de $\ell^1$. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe donc $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que, si $n, l \geq N(\varepsilon)$, alors : $\|x_n - x_l\| \leq \varepsilon$.**

**1)** **Montrer qu'on a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour tous $n, l \geq N(\varepsilon)$ $|x_n(k) - x_l(k)| \leq \varepsilon$.**

**2)** **Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n(k)$ existe pour tout $k \in \mathbb{N}$.**

**3)** **Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k\geq K} |x_{N(\varepsilon)}(k)| \leq \varepsilon$.**

**4)** **Montrer que pour tout $L \geq K$, on a : $\sum_{K\leq k\leq L} |x(k)| \leq 2\varepsilon$.**

**5)** **En déduire que l'on a $x \in \ell^1$, et que : $\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$.**

*Exercice 46 .*

**Soit $E$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit une norme sur $E$ en posant**

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)|\, dt.$$

**On va montrer que $E$ muni de cette norme n'est pas complet. Pour cela, on définit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par**

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \textbf{si } -1 \le t \le -\frac{1}{n} \\ nt & \textbf{si } -\frac{1}{n} \le t \le \frac{1}{n} \\ 1 & \textbf{si } \quad \frac{1}{n} \le t \le 1. \end{cases}$$

1) **Vérifier que $f_n \in E$ pour tout $n \geq 1$.**
2) **Montrer que**
$$\|f_n - f_p\| \le \sup(\frac{2}{n}, \frac{2}{p})$$
**et en déduire que $(f_n)$ est de Cauchy.**
3) **Supposons qu'il existe une fonction $f \in E$ telle que $(f_n)$ converge vers $f$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Montrer qu'alors on a**
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) - f(t)|\, dt = 0 \qquad \textbf{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{1} |f_n(t) - f(t)|\, dt = 0$$
**pour tout $0 < \alpha < 1$.**
4) **Montrer qu'on a**
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) + 1|\, dt = 0 \qquad \textbf{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{1} |f_n(t) - 1|\, dt = 0$$
**pour tout $0 < \alpha < 1$. En déduire que**
$$f(t) = -1, \quad \forall t \in [-1, 0[$$
$$f(t) = 1, \quad \forall t \in ]0, 1].$$
**Conclure.**

*Exercice 47 .*

**Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On rappelle qu'une application $g$ de $E$ dans $E$ est dite *contractante* s'il existe $K \in ]0,1[$ tel que**

$$\|g(x) - g(y)\| \le K\|x - y\| \qquad \forall x, y \in E.$$

1) **Montrer que toute application contractante admet un unique point fixe.**
**Soit $f$ une application de $E$ dans $E$ telle qu'il existe un entier $n$ tel que $f^n$ soit contractante. On note $x_0$ le point fixe de $f^n$.**
2) **Montrer que tout point fixe de $f$ est un point fixe de $f^n$.**
3) **Montrer que si $x$ est un point fixe de $f^n$, il en est de même pour $f(x)$.**
4) **En déduire que $x_0$ est l'unique point fixe de $f$.**

*Exercice 48 .*
**Une fonction $f$ définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est dite *localement lipschitzienne* si, pour tout $x \in A$, il existe un voisinage $V_x$ de $x$ et une constante $C > 0$ telle que :**

$$\forall (y,z) \in A \cap V_x,\ \|f(y) - f(z)\| \leq C\|y - z\|.$$

**Montrer qu'une fonction localement lipschitzienne sur une partie compacte $K$ de $\mathbb{R}^n$ est en fait lipschitzienne**

*Exercice 49 .*
**Soit $E$ une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et $f : E \to E$ une fonction continue vérifiant :**

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1) **Montrer que $f$ admet un unique point fixe (que l'on notera $\alpha$).**
2) **Ces résultats subsistent-ils si on suppose simplement $E$ complet ?**

*Exercice 50 .*
**$\mathbb{R}^2$ est muni d'une norme quelconque. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que**

$$\exists \alpha \in ]0; \frac{1}{2}[,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant \alpha(\|f(x) - x\| + \|f(y) - y\|)$$

1) **Montrer que $f$ admet au plus un point fixe.**
2) **On considère la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}^2$.**
   a) **Montrer que $\forall n \geqslant 0,\ \|u_{n+2} - u_{n+1}\| \leqslant \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\|u_{n+1} - u_n\|$.**
   b) **Montrer que la suite $u$ est de Cauchy. Conclure.**

*Exercice 51 .*
**Montrer que le système** $\begin{cases} x_1 &= \dfrac{1}{5}(2\sin x_1 + \cos x_2) \\ x_2 &= \dfrac{1}{5}(\cos x_1 + 3\sin x_2) \end{cases}$ **admet une solution unique $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.**

*Exercice 52 .*
**Soit $X$ et $F$ deux parties d'un espace vectoriel normé, $F$ étant une partie complète. On considère une application $F : X \times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto F(\lambda, x)$ continue, et $k$-contractante en la seconde variable, c'est-à-dire qu'elle existe $k \in ]0,1[$ tel que :**

$$\forall \lambda \in X,\ \forall (x,y) \in E^2,\ \|F(\lambda,x) - F(\lambda,y)\| \leq k\|x - y\|.$$

**Montrer que, pour tout $\lambda \in X$, il existe un unique $x_\lambda \in E$ tel que $F(\lambda, x_\lambda) = x_\lambda$. Montrer ensuite que l'application $X \to E$, $\lambda \mapsto x_\lambda$ est continue.**

*Exercice 53 . **Théorème des fermés emboîtés***
**Soit $E$ un espace vectoriel normé complet. Montrer que l'intersection d'une suite décroissante $(F_n)$ de parties fermées non vides et bornées de $E$ dont le diamètre tend vers 0 a une intersection non vide.**

***Exercice 54 . Théorème de Baire***

**Soit $E$ une partie complète d'un espace vectoriel normé.**

1) **Montrer qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses dans $E$ est dense dans $E$. Attention, ce n'est pas nécessairement un ouvert !**
2) **Que dire de la réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide ?**

***Exercice 55 .***

**On note $E$ l'espace des fonctions continues de $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On définit sur $E$ les deux normes suivantes :**

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \quad \textbf{et} \quad \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|;\ x \in [-1,1]\}.$$

1) **Montrer que les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes.**
2) **Montrer que l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|_\infty)$ est complet.**
3) **Le but de cette question est de démontrer que $(E, \|.\|_2)$ n'est pas complet. Pour cela, on définit la suite de fonctions $(f_n)$ en posant :**

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \textbf{si } -1 \leq t \leq -\frac{1}{n} \\ nt & \textbf{si } -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \textbf{si } \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

**dont on va montrer que c'est une suite de Cauchy de $(E, \|.\|_2)$ sans que ce soit une suite convergente.**

   a) **Faire un dessin et vérifier que $f_n \in E$.**
   b) **Montrer que pour $1 \leq n \leq p$, on a :**

   $$\|f_n - f_p\|_2 \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

   **En déduire que la suite $(f_n)$ est de Cauchy dans $(E, \|.\|_2)$.**

   c) **Supposons que la suite $(f_n)$ converge vers $f$ dans $(E, \|.\|_2)$. Montrer que pour tout $t \in ]0,1]$, on a $f(t) = 1$. Que doit valoir $f$ sur $[-1, 0[$ ? Conclure.**
4) **L'application linéaire $T : E \to \mathbb{C},\ f \mapsto f(0)$ est elle continue si on munit $E$ de $\|.\|_\infty$ ? si on munit $E$ de $\|.\|_2$ ?**

*Fin*
*à la prochaine*