Fiches de Révision MP

TOME I - Physique et Chimie

Jean-Baptiste Théou

Creactive Commons - Version 0.2

Licence

J'ai décidé d'éditer cet ouvrage sous la licence Créative Commons suivante : CC-by-nc-sa. Pour plus d'information :
http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/fr/.
Ce type de licence vous offre une grande liberté, tout en permettant de protéger mon travail contre une utilisation commercial à mon insu par exemple.
Pour plus d'information sur vos droits, consultez le site de Créative Commons

Avant-propos

Il y a un plus d'un an, au milieu de ma SUP MP, j'ai décidé de faire mes fiches de révision à l'aide de Latex, un "traitement de texte" très puissant. Il en résulte les fiches qui suivent. Je pense que travailler sur des fiches de révision, totalement séparé de notre cours, est un énorme plus, et réduit grandement la quantité de travail pour apprendre son cours, ce qui laisse plus de temps pour les exercices. Mon experience en tout cas va dans ce sens, j'ai notablement progressé à l'aide de ces fiches.
J'ai décidé de les rassembler sous forme d'un "livre", ou plutôt sous forme d'un recueil. Ce livre à pour principal interet pour moi d'être transportable en cours. C'est cet interet qui m'a poussé à faire ce livre.
Dans la philosophie de mes fiches de révision, ce livre est disponible gratuitement et librement sur mon blog. Il est édité sous License Créative Commons. Vous pouvez librement adapter ce libre à vos besoins, les sources Latex sont disponibles sur mon blog. Je pense que pour être en accord avec la philosophie de ces fiches, il serai bien que si vous effectuez des modifications de mon ouvrage, vous rendiez ces modifications disponible à tous. Je laisserai volontiers une place pour vos modifications sur mon blog. Je pense sincèrement que ce serai vraiment profitable au plus grand nombre, et dans la logique de mon travail.
J'ai hiérarchisé mon ouvrage de façon chronologique. Les parties sont rangées dans l'ordre "d'apparition" en MP, tout en concervant une certaine logique dans les parties. J'ai mis en Annexe des petites fiches de méthodologie, qui peuvent s'avérer utiles.
Je vous souhaite une bonne lecture, et surtout une bonne réussite.
Jean-Baptiste Théou
PS : Pour toutes corrections, propositions, ou autre, merci de me contacter à : jbtheou@gmail.com ou par l'intermédiaire de mon site web.

Remerciements

Je tient à remercier Georges Marin, Professeur de Physique-Chimie en MP au Lycée Lesage et François Brunou, Professeur de Mathématiques en MP au Lycée Lesage.
Sans eux, ce livre ne pourrai exister.

Première partie

Electricité

Chapitre 1

Fonction de transfert

1.1 Modèle du quadripôles

Si la source est une source de tension, on étudiera le cas où la source délivre un signal sinusoïdale ou échelon
Dans le cas sinusoïdale, on défini deux sous circuits :

La source

La charge

1.2 Fonction de transfert complexe

Définition 1 *Dans le cas d'une source fournissant un signal sinusoïdale, on défini une fonction de transfert par :*

$$H(j\omega) = \frac{\underline{X}_s}{\underline{X}_e}$$

avec :
→ $\underline{X}_s$ *: Grandeur de sortie (Tension ou intensité)*
→ $\underline{X}_e$ *: Grandeur d'entrée (Tension ou intensité)*
Ces fonction de transfert sont sans dimensions.

1.2.1 Amplitude

Soit ω une pulsation, définie en rad.s^{-1}.
On associe à ω une fonction de transfert $H(j\omega)$.

Définition 2 *On appelle amplitude de H le module de H.*

$$(\ A \text{ est l'amplitude de } H\ ) \Leftrightarrow (A = |H(j\omega)|)$$

1.2.2 Gain en décibel

Définition 3 *On défini le gain en décibel d'une fonction de transfert par :*

$$G_{dB} = 20.log(|H(j\omega)|)$$

On utilise une échelle logarithmique pour pouvoir couvrir un large spectre de fréquence.

1.2.3 Bande passante

Définition 4 *On défini une bande passant comme l'ensemble des fréquences $\{f\}$ vérifiant :*

$$|H(j2\pi f)| \geq \frac{H_{max}}{2}$$

1.2.4 Phase

Définition 5 *La phase de la fonction de transfert H(jω) est l'argument de celui-ci.*

1.3 Représentations

1.3.1 Diagramme de Bode

On défini deux graphiques :
→ Celui du Gain : log(f) en abscisse, G_{dB} en ordonnée
→ Celui de la phase : log(f) en abscisse, φ en ordonnée

1.3.2 Diagramme de Nykwest

On défini, dans le plan complexe, un point M qui à pour module $|H(j\omega)|$ et pour angle par rapport à l'axe de réel, φ :

1.4 Lien entre régime transitoire et fonction de transfert

1.4.1 Précaution d'utilisation

Pour pouvoir utiliser ce procéder qui permet d'obtenir l'équation temporelle d'après la fonction de transfert, il faut que, lors de l'obtention de la fonction de transfert, si il existe plusieurs dipôles identiques dans le circuit, on les ai considérés de façon différente (ex : Si il y a deux résistance de valeur R, on pose qu'une est de valeur R, l'autre de valeur R', même si R=R').
A partir de là, on peut passer en temporel, et une fois l'équation différentielle obtenu, on utilise le faite que R=R'.

1.4.2 Principe

Considérons un quadripole. Pour déterminer l'équation différentielle relative au régime transitoire, on peut utiliser la fonction de transfert.
On considère donc que le circuit fonctionne en régime sinusoïdale. Une fois la fonction de transfert établie, on remplace les $(j\omega)^n\underline{X}^n$ par $\frac{d^nX}{dt^n}$, et on obtient l'équation différentielle qui régit le système en régime transitoire.

1.5 Type de réponses

1.5.1 Réponse indicielle

La réponse indicielle est la réponse du système à un échelon.

1.5.2 Réponse impulsionelle

La réponse impulsionelle est la réponse du système à un échelon de longueur τ.

Propriété 1 *Dans ce cas, on obtient la propriété suivante, qui est une propriété des transformée de Fourier :*

$$BP.\tau = 1$$

1.6 Réponse d'un filtre à un signal périodique

Soit e(t) la tension d'entrée du quadripole.
Si e(t) est de la forme :

$$e(t) = E.cos(\omega t)$$

Alors s(t), la tension de sortie du quadripole est donnée par :

$$s(t) = |H(j\omega)|.E.cos(\omega t + Arg(H(j\omega))$$

1.7 Caractère intégrateur ou dérivateur d'un filtre

1.7.1 Filtre intégrateur

Définition 6 *On dit d'un filtre qu'il est intégrateur si :*

$$s(t) = \frac{1}{a}.\int e(t)$$

ou

$$e(t) = a.\frac{ds(t)}{dt}$$

Ce qui signifie que la fonction de transfert du système est de la forme (Intégrateur idéal) :

$$H(j\omega) = \frac{1}{ja\omega}$$

1.7.2 Filtre dérivateur

Définition 7 *On dit d'un filtre qu'il est dérivateur si :*

$$s(t) = b.\frac{de(t)}{dt}$$

Ce qui signifie que la fonction de transfert du système est de la forme (Dérivateur idéal) :

$$H(j\omega) = jb\omega$$

Chapitre 2

Analyse d'un signal

2.1 Signal périodique

Soit f une fonction.

Définition 8 *f est une fonction périodique si :*

$$\exists T \ tq \ \forall t \ f(t+T) = f(t)$$

2.1.1 Caractéristique principale

Soit f une fonction périodique.

Période, fréquence

Ces deux caractéristiques sont fondamentale. La fréquence de la fonction est l'inverse de la période :

$$f = \frac{1}{T}$$

Valeur moyenne

Définition 9 *On défini la valeur moyenne d'une fonction f de la façon suivante :*

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt$$

Valeur efficace

Définition 10 *On défini la valeur efficace d'une fonction f de la façon suivante :*

$$F_e = \sqrt{\langle f^2(t) \rangle}$$

On peut l'écrire aussi sous la forme :

$$F_e^2 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t)dt$$

2.2 Décomposition d'un signal périodique en fonction sinusoïdale

2.2.1 Théorème de Fourier

Énoncé 1 *Considérons une fonction périodique f :*

$$\exists T \ tq \ \forall t \ f(t+T) = f(t)$$

Il existe deux suites, (a_n) et (b_n), telque :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left(\frac{2\pi mt}{T}\right)$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont appelé coefficients de Fourier.

Énoncé 2 $\forall n \in N$ *:*

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

Propriété 2 *On observe que :*
→ *Si f est impaire,* $\forall n \in N \ a_n = 0$
→ *Si f est paire,* $\forall n \in N \ b_n = 0$

Coefficients de Fourier complexe

Propriété 3 *En passant* cos *et* sin *en complexe, dans les coefficients de Fourier, on obtient que :*

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n . e^{\frac{i2\pi nt}{T}}$$

avec :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{\frac{-i2\pi nt}{T}} dt$$

2.2.2 Identité de Parseval

Soit f fonction périodique.

Définition 11 *Considérons le développement en série de Fourier de f :*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left(\frac{2\pi mt}{T}\right)$$

On en déduit que :

$$\langle f^2(t) \rangle = \frac{a_0}{4} + \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n^2}{2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{{b^2}_n}{2}$$

car tous les doubles produits, issue de l'élévation au carré, qui comporte des fonctions cos ou sin ont une valeur moyenne nulle. En posant :

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

On obtient :

$$\langle f^2(t) \rangle = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

2.2.3 Transformée de Fourier

Définition 12 *Considérons f, une fonction.*
On associe à f une fonction périodique $\widetilde{f}$ *:*

$$\forall t \quad f(t) \rightarrow \widetilde{f}(\nu)$$

Avec :

$$\widetilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

On peut retourner cette égalité.

Deuxième partie

Electrostatique et Electrocinétique

Chapitre 3

Forme locale de l'électrostatique

3.1 Champs électrique

3.1.1 Définitions

Définition 13 *Soit E une application :*

$$E : M \mapsto \overrightarrow{E}(M)$$

Si en un point M, on place une charge q_0, cette charge subit une force $\overrightarrow{f}$.
On défini donc le champs électrique par :

$$\overrightarrow{E} = \frac{\overrightarrow{f}}{q_0}$$

L'unité du champs électrique est donc le $N.C^{-1}$.
On observe donc que le champs électrique est indépendant de la charge q_0. On obtient donc qu'en introduisant un champs, on se libère du point d'observation.

Loi de Coulomb

Définition 14 *Soit $A(q_1)$ et $B(q_2)$ deux points materiels chargés. La force exercé de A sur B est donnée par, avec $r = \| \overrightarrow{AB} \|$:*

$$\overrightarrow{f} = \frac{q_1.q_2}{4\pi\varepsilon_0.r^2}.\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$$

Avec :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9$$

On en déduit le champs électrique crée par une charge ponctuelle situé au point O en M :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E}(M) &= \frac{\overrightarrow{f}}{q_0} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q.\overrightarrow{OM}}{OM^3}\end{aligned}$$

Calcul direct du champs

Considérons un volume élementaire chargée.
Considérons la charge élémentaire dans ce volume, notée dq :

$$dq = \rho.dv$$

Avec ρ la densité volumique de charge de ce volume, et dv le volume élémentaire contenant cette charge dq.
Soit M un point de l'espace, et P un point appartenant à dq. On obtient que :

$$d^3\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho.dV.\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

d'après la formule donnant le champs crée par une charge ponctuelle (On associe ici le volume élémentaire à une charge ponctuelle de charge ρdV).
En intégrant sur le volume de la source, on obtient que le champs crée par une source de charge volumique ρ est donnée par :

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{source}\frac{\rho.\overrightarrow{PM}}{PM^3}.dv$$

Élements de symétrie

Soit A et B deux point chargés de charge q,symétrique par rapport à un plan P. Soit M $\in P$. Déterminons le champs crée en M par A et B :

$$\overrightarrow{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\overrightarrow{AM}}{AM^3} + \frac{\overrightarrow{BM}}{BM^3}\right)$$

A et B sont symétrique par rapport au plan, on obtient donc que : AM=BM. De plus, avec H le point du segment [A,B] $\in$ P :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$$
$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HM}$$

Or d'après la configuration du système :

$$\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{BH}$$

D'ou :

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{HM}$$

On obtient donc que :

$$\overrightarrow{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\overrightarrow{HM}}{AM^3}$$

Or H et M sont dans le plan P, donc $\overrightarrow{HP} \in P$. On obtient donc que le champs $\overrightarrow{E} \in P$.

3.2 Potentiel électrique

3.2.1 Le champs électrique est un gradiant

Soit O(q) et M(q') deux points de l'espace. On obtient que la force crée par O sur M a pour expression :

$$\overrightarrow{f} = \frac{q_1.q_2}{4\pi\varepsilon_0.r^2}.\frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$

Le travail crée par cette force est de la forme :

$$\begin{aligned}\delta\omega &= \overrightarrow{f}\,\overrightarrow{dl}\\ &= \frac{q.q'}{4\pi\varepsilon r^2}\frac{\overrightarrow{OM}\,\overrightarrow{dl}}{OM}\end{aligned}$$

De plus, nous avons :

$$\begin{cases}\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{u_r}\\ \overrightarrow{dl} = dr\overrightarrow{u_r} + r.d\theta\overrightarrow{u_\theta} + rsin(\theta)d\varphi\overrightarrow{u_\varphi}\end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\delta\omega &= \frac{q.q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{rdr}{r^3} \\
&= \frac{q.q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} \\
&= -\frac{d}{dr}(\frac{q.q'.r}{4\pi\varepsilon_0}) \\
&= -\frac{d}{dr}(E_p)
\end{aligned}$$

On peut donc introduire une énergie potentielle (au sens mécanique du terme) :

$$\begin{aligned}
E_p &= q'\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \\
&= q'V(M)
\end{aligned}$$

On obtient donc que :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f}\,\overrightarrow{dl} &= -dE_p \\
&= -q'dV(M)
\end{aligned}$$

On obtient donc, en divisant par q' :

$$\overrightarrow{E}(M)\overrightarrow{dl} = -dV(M)$$

On peut écrire cette relation sous la forme :

$$\overrightarrow{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M)$$

En partant de l'expression du grandiant de V et de l'expression $\overrightarrow{dl}$ dans un système de coordonnée, on peut déterminer l'expression du champs électrique.

3.2.2 Calcul direct du potentiel

Considérons un volume chargé, de densité volumique de charge ρ.
Considérons un volume élémentaire dv, avec P appartenant à dv, et M un point de l'espace : Nous avons vu que :

$$\begin{cases}
\overrightarrow{E}(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{source}\dfrac{\rho.\overrightarrow{PM}}{PM^3}dv \\
\overrightarrow{E}(M)\overrightarrow{dl} = -dV
\end{cases}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{E}(M)\overrightarrow{dl} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{source}\frac{\rho.\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{dl}}{PM^3}dv \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{source}\frac{\rho.dPM}{PM^2}dv \\
&= -d\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{source}\frac{\rho}{PM}dv\right) \\
&= -dV(M)
\end{aligned}$$

On obtient donc que :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{source}\frac{\rho}{PM}dv$$

3.2.3 Condition pour qu'un champs de vecteurs soit un gradiant

Soit $\overrightarrow{D}(M)$ un champs de vecteur.
Soit $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{D})$, le rotationnel de D, défini par :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{D} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial D_z}{\partial y} - \dfrac{\partial D_y}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial D_x}{\partial z} - \dfrac{\partial D_z}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial D_y}{\partial x} - \dfrac{\partial D_x}{\partial y} \end{array} \right.$$

Si $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{D}) = \overrightarrow{0}$, alors :

$$\exists g \ tq \ \overrightarrow{D}(M) = \overrightarrow{grad}(f)$$

3.2.4 Lien entre direction de champs et surface equipotentielle

Propriété 4 *Nous avons :*

$$(\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V) \Rightarrow dV = -\overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl}$$

Sur les surfaces équipotentielles, nous avons dV = 0, donc $\overrightarrow{E} \perp \overrightarrow{dl}$.
$\overrightarrow{E}(M)$ *sera donc perpendiculaire à la surface équipotentielle V(M), avec* $\overrightarrow{E}(M)$ *dirige vers les potentiels décroissants*

3.3 Théorème de Gauss

Le flux à travers une surface orienté Σ du champs électrique, noté Φ, est défini par :

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n} dS$$

avec $\overrightarrow{n}$ la normale à Σ. Soit O(q) et M $\in \Sigma$ deux points materiels (L'espace ne contient que la charge q). On obtient que :

$$\overrightarrow{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$$

Le flux s'exprime donc :

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{n}}{OM^3} dS \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{\Sigma} d\Omega \end{aligned}$$

Avec $d\Omega$ l'angle solide sous lequel la surface Σ est vu par O. On montre que $d\Omega = \sin(\theta)d\theta d\varphi$.
Considérons une surface Σ fermé avec une normale orienté vers l'exterieur. On peut donc définir un milieu extérieur et un milieu interieur.

→ Si O est exterieur à Σ, les contributions sont opposé quand on somme sur la surface, on obtient donc $\Phi = 0$

→ Si O est interieur à Σ :

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta d\varphi \\ &= \frac{q}{2\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta = \frac{q}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

On obtient donc, quand O est intérieur à Σ, surface fermé avec normale $\overrightarrow{n}$ orienté vers l'exterieur, que :

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}.dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Avec q la charge à l'interieur de la surface.

Énoncé 3 *Le flux du champ électrique à travers une surface fermé Σ orienté vers l'extérieur est égale à la charge intérieur à cette surface sur la permitivité du vide, ε_0 :*

$$\phi = \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}.dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Discontinuité du champs de part et d'autre d'une surface chargé

Considérons un cylindre élémentaire de longeur 2ε situé de tel sorte que ces bases, de surface dS, sont situé de part et d'autre de la surface Σ, Σ chargé et de densité de charge surfacique σ. Notons $\overrightarrow{E_1}$ et $\overrightarrow{E_2}$ les champs électriques de part et d'autre de la surface. La surface est toujours orienté vers l'extérieur. On obtient que le flux à travers la surface dS est donné par :

$$\Phi = \frac{\sigma dS}{\varepsilon}$$

Or Φ se décompose de la façon suivante :

$$\Phi = \overrightarrow{E_2}.\overrightarrow{n}_{1\to 2}dS + \Phi_L + \overrightarrow{E_1}.\overrightarrow{n}_{2\to 1}$$

Avec Φ_L le flux latéral. Or, quand $\varepsilon \to 0$, la surface latéral tend vers 0, donc le flux latérale aussi. On obtient donc que :

$$(\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1})\overrightarrow{n}_{1\to 2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

En utilisant le fait que $\overrightarrow{E}(M).\overrightarrow{dl} = -dV$, on montre que la composante tangentielle du champs est continue.

Le potentiel ne peut pas etre extremum dans une volume vide de charge

Effectuons un raisonnement par l'absurde. Supposons que le potentiel soit maximal en M, avec M $\in V$, volume vide de charge. En tout point N voisin de M, on a donc :

$$V_N < V_M$$

Or le champs électrique est dirigé vers les potentiels décroissant, donc dans le sens de $\overrightarrow{n}$ (orienté vers l'extérieur). On obtient donc :

$$\overrightarrow{E}.\overrightarrow{n} > 0$$

Donc d'après le théorème de Gauss :

$$Q_{\text{int}} > 0$$

Ce qui est impossible.

3.3.1 Forme locale du théorème de Gauss

Opérateur Divergence

Définition 15 *On défini l'opérateur divergence, notée div, par :*

$$\begin{aligned} div : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ \overrightarrow{D} &\mapsto div(\overrightarrow{D}) \end{aligned}$$

Supposons que $\overrightarrow{D}(x, y, z)$, alors :

$$div(\overrightarrow{D}) = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Théorème de Green-Ostrogradski ou Théorème de la divergence

Considérons une surface fermé Σ, de volume intérieur chargé V. Nous avons la propriété suivante :

$$\begin{aligned}\Phi &= \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{E}(M).\overrightarrow{n}.dS \\ &= \iiint_{V} div(\overrightarrow{E}).dV\end{aligned}$$

3.3.2 Équation de Poisson

Opérateur Laplacien

Définition 16 *On défini l'opérateur Laplacien, noté Δ, par :*

$$\begin{aligned}\Delta : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \Delta(A)\end{aligned}$$

Avec :

$$\Delta(A) = \frac{\partial^2 A}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 A}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 A}{\partial^2 z}$$

Énoncé

Considérons une surface fermé, Σ, de densité volumique de charge ρ, de volume chargé V. D'après le théorème de Gauss on obtient que :

$$\begin{aligned}\phi &= \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{E}(M).\overrightarrow{n}.dS \\ &= \iiint_{V} \frac{\rho.dV}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

Or d'après le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\oiint_{\Sigma} \overrightarrow{E}(M).\overrightarrow{n}.dS = \iiint_{V} div(\overrightarrow{E}).dV$$

On obtient donc que :

$$\iiint_{V} div(\overrightarrow{E}).dV = \iiint_{V} \frac{\rho.dV}{\varepsilon_0}$$

On en déduit donc le relation locale suivante, qui dépend du point M :

$$div(\overrightarrow{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Or, par définition :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$$

En développant en coordonnée cartésienne, on obtient que :

$$div(\overrightarrow{E}) = -\Delta(V)$$

Avec $\Delta(V)$ le Laplacien de V. Plus généralement, nous avons la propriété d'analyse vectorielle suivante :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{grad}(f)) = \Delta f$$

On obtient donc que :

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\Delta V$$

Ceci constitue l'équation de poisson.

Chapitre 4

Conducteur électrique en équilibre

4.1 Définitions

4.1.1 Conducteur

Définition 17 *Un conducteur est un composant qui contient des charge mobiles, susceptible de se déplacer.*

Définition 18 *On dit qu'un conducteur est à l'équilibre si il est à l'équilibre mécanique.*
Toutes les charges à l'intérieur de ce conducteur doivent être à l'équilibre mécanique.
Considérons une charge mobile. Cette charge est à l'équilibre si :

$$\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

4.2 Propriétés de l'équilibre pour un conducteur donné

4.2.1 Conséquence des définitions globales

Le champs électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur

Considérons un électron.
Le système est à l'équilibre, on obtient donc :

$$q.\overrightarrow{E} + m.\overrightarrow{g} = \overrightarrow{0}$$

Ce qui implique que :

$$\overrightarrow{E} = \frac{-m.\overrightarrow{g}}{q}$$

Par application numérique, on obtient un champs électrique de l'ordre du 10^{-11}.
On peut donc considérer qu'à l'équilibre, sont champs équilibre est nul.

Le conducteur est un volume équipotentiel

Sachant que :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$$

On obtient, qu'a l'équilibre, comme le champs est nul, le potentiel est une constante.
Un conducteur à l'équilibre est donc un volume équipotentiel

La densité volumique de charge est nul dans un conducteur

Nous avons vu que :

$$div(\overrightarrow{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Or le champs $\overrightarrow{E}$ est nul. On obtient donc que $\rho = 0$. À l'intérieur du conducteur, les charges se compensent. L'excédent de charge est porté par la surface. Il y a donc une densité surfacique de charge.

4.2.2 Cavité vide de charge dans un conducteur

En considérant le faite qu'on ne peut pas avoir un extremum du potentiel dans une zone vide de charge, et qu'il y à continuité du potentiel à la traversé de la surface, le potentiel dans la cavité est le même que dans le conducteur.

4.2.3 Champs électrique à la surface du conducteur

Nous avons vu :

$$\overrightarrow{E}_{int} - \overrightarrow{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n}$$

Or le champs intérieur est nul dans un conducteur à l'équilibre, nous l'avons vu. On obtient donc que :

$$E_{ext} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

La mesure du champs électrique extérieur permet donc de connaître la densité surfacique σ.

4.3 Système de conducteur en équilibre

4.3.1 Il y a unicité des solutions

Considérons un ensemble de conducteurs. On démontre que si on à un ensemble de conducteur, et si on fixe des conditions (ex : La charge q_i ou le potentiel V_i du conducteur i), alors $V(M)$ est fixé (Et non défini à une constante près, comme habituellement).
De plus, on as :

$$\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

Car l'espace entre les conducteurs est vide de charge. On fait appelle aux conditions appelé conditions limite :

→ Si V_i est connu, à l'aide d'une relation de continuité par exemple

→ Si q_k est connu, à l'aide d'une surface de Gauss par exemple

Alors il existe une solution unique pour définir V(M)

4.3.2 Conducteur seul dans l'espace

On pose la relation suivante :

$$Q = C.V$$

Avec Q la charge, C la capacité du conducteur, et V le potentiel.
Considérons une sphère de rayon r. Le potentiel à l'interieur de cette sphère est V_0. On note σ la charge surfacique. On obtient à l'aide d'une surface de Gauss que :

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0.r}$$

En posant que le potentiel est nul à l'infini (pour la constante).
On obtient donc quand ce cas que :

$$C = 4\pi\varepsilon_0.r$$

4.3.3 Influence électrique

Considérons une sphère métallique conducteurs.
Si on rapproche une charge de ce conducteur, la répartition des charges en surface est modifié, mais ρ, la densité volumique de charge demeure nulle.

4.4 Condensateur

Définition 19 *Un condensateur est composé de deux conducteur en influence totale.*

4.4.1 Capacité d'un condensateur

Considérons un condensateur composée de deux conducteur sphérique 1, de charge Q_1 et 2, de charge intérieur (surface la plus proche de 1) $Q_{2\ int}$, et de charge extérieur $Q_{2\ ext}$, avec 1 intérieur à 2.
Considérons une surface Σ sphérique contenu dans 2. Les conducteurs étant à l'équilibre, on obtient que :

$$\forall M \in \Sigma\ \overrightarrow{E}(M) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \iint_{\Sigma} \overrightarrow{E}(M).\overrightarrow{n}.dS = 0 = \frac{Q_1 + Q_{2\ int}}{\varepsilon_0}$$

Ceci implique que :

$$Q_{2\ int} = -Q_1$$

Considérant maintenant un point M extérieur à 2. On obtient :

$$\iint \overrightarrow{E}(M).\overrightarrow{n}.dS = \frac{Q_1 + Q_{2\ int} + Q_{2\ ext}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{2\ ext}}{\varepsilon_0}$$

Le champs entre les armatures ne dépend que de Q_1. On obtient donc :

$$Q_1 = C.(V_1 - V_2)$$

Chapitre 5

Complément d'électrocinétique

5.1 Définitions

5.1.1 Intensité de courant

Définition 20 *L'intensité est un débit de charge :*

$$i = \frac{dq}{dt}$$

5.1.2 Vecteur densité surfacique de courant

Définition 21 *On considère une surface Σ. On peut écrire :*

$$i = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{j}.\overrightarrow{n}.dS$$

Ceci équivaut à :

$$dq = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{n}.dSdt$$

Avec $\overrightarrow{j}$ le vecteur densité surfacique de courant.

Considérons un modèle composé d'un seul type de porteur de charge. Toutes les charges se déplace à la vitesse $\overrightarrow{v}$. Pendant la durée dt :

$$dl = vdt$$

avec dl le déplacement élémentaire des particules. On obtient donc que toutes les particules appartenant à dl traverse Σ durant dt.
On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} dq &= \rho_{\text{mobile}} \overrightarrow{v}.\overrightarrow{n}\Sigma dt \\ &= \rho_{\text{mobile}} \overrightarrow{v}.\overrightarrow{n}\Sigma dt \end{aligned}$$

Avec ρ_{mobile} la densité volumique de charge mobile. D'après les deux expressions de dq on obtient que :

$$\overrightarrow{j} = \rho_m.\overrightarrow{v}$$

Par un théorème de superposition, on obtient dans un modèle de multiple porteur de charge :

$$\overrightarrow{j} = \sum \rho_{m,i}.\overrightarrow{v_i}$$

5.1.3 Équation de continuité

Considérons un conducteur fermé de surface Σ de charge interieur q. Nous avons les équations suivantes :

$$\begin{cases} i = \iint\limits_{\Sigma} \overrightarrow{j}.\overrightarrow{n}.dS \\ i = \dfrac{-dq}{dt} \text{ (Conservation de l'énergie)} \\ q = \iiint_v \rho.dv \end{cases}$$

En considérant que cette surface est invariente avec le temps, on obtient que :

$$\begin{aligned} i &= -\frac{dq}{dt} \\ &= -\iiint_v \frac{d\rho}{dt} dv \\ &= \oiint\limits_{\Sigma} \overrightarrow{j}.\overrightarrow{n} dS \\ &= \iiint_v \text{div}(\overrightarrow{j})dv \text{ (D'après le théorème de Green-Ostogradski)} \end{aligned}$$

On obtient donc que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\overrightarrow{j}) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\overrightarrow{j}) = 0$$

Ceci est une équation locale, car toute ces composantes dépendent du point M. Cette équation est l'expression de la conservation de la charge.
On en déduit qu'en régime permenant, conscient que dans ce cas ρ est une constante par rapport au temps :

$$div(\overrightarrow{j}) = 0$$

5.2 Expression de la puissance reçu par un dipôle

Considérons un dipôle contenant des charges mobiles. Considérons une charge q de ce dipole. Elle est soumise à la force de Lorentz électrique :

$$\overrightarrow{f} = q\overrightarrow{E}$$

On obtient donc que le travail de cette force est donnée par :

$$\delta\omega = q\overrightarrow{E}.\overrightarrow{v}dt$$

En discrétisant le problème, et sachant que seule les charges mobiles travaille, on obtient l'expression du travail :

$$\omega = \sum q_i.\overrightarrow{E}(m_i).\overrightarrow{v_i}.dt$$

Cette somme est a réaliser sur l'ensemble des charges mobiles. Dans le cas continue, on obtient :

$$\omega = \iiint\limits_v \rho_{\text{mobile}}.d\tau.\overrightarrow{E}(M) < \overrightarrow{v} > dt$$

D'ou l'expression de la puissance, sachant que :

$$P = \frac{d\omega}{dt} = \iiint\limits_v \rho_{\text{mobile}}.d\tau.\overrightarrow{E}(M) < \overrightarrow{v} >$$

D'ou :

$$\begin{aligned} P &= \iiint\limits_v \overrightarrow{j}.\overrightarrow{E}(M).d\tau \\ &= \iiint\limits_v \overrightarrow{j}. - \overrightarrow{grad}(V).d\tau \end{aligned}$$

Cette expression est l'expression de la puissance reçu par le dipôle.
Au finale, en développant $\overrightarrow{j}.\overrightarrow{grad}(V)$, on obtient que :

$$P = i(V_A - V_B)$$

Avec A et B respectivement le point d'entre et le point de sortie du dipôle.

5.3 Conducteur ohmique

5.3.1 Loi d'Ohm

Soit la loi d'Ohm :

$$U = R.i$$

Cette relation revient à dire que :

$$\overrightarrow{j} = \sigma.\overrightarrow{E}$$

Avec σ la conductivité.
La loi d'ohm ne s'applique que si ρ_m est une constante indépendante de $\overrightarrow{E}$. En pratique, un dipôle vérifie la loi d'ohm dans un certain intervalle de valeur pour $\overrightarrow{E}$.

5.3.2 Résistance électrique

Définition 22 *Considérons un dipôle électrique. On suppose qu'il vérifie la loi d'ohm, donc :*

$$\overrightarrow{j} = \sigma.\overrightarrow{E}$$

De plus, nous avons les équations suivantes :

$$\begin{cases} i = \iint\limits_{\Sigma} \overrightarrow{j}.\overrightarrow{n}.dS \\ \overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}(V) \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$V_A - V_B = \int_A^B \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dm}$$

On obtient donc que :

$$i = \iint\limits_{\Sigma} \sigma\overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}.dS$$

$$V_A - V_B = R.i$$

Avec R une constante, appelé résistance

Exemple de calcul de résistance :
Considérons un conducteur filiforme de longeur l. Si $i \neq 0$, alors $\overrightarrow{E} \neq 0$, donc les conducteurs ne sont pas à l'équilibre. On suppose que ce conducteur vérifie la loi d'Ohm. Nous avons donc les deux égalités suivantes :

$$\begin{cases} i = \iint\limits_{E} \overrightarrow{j}.\overrightarrow{n}.dS \\ V_A - V_B = \int_A^B \dfrac{\overrightarrow{j}}{\sigma}\overrightarrow{dm} \end{cases}$$

On se place en régime permanent, donc $\text{div}(\overrightarrow{j}) = 0$. On peut donc supposer que :

$$\overrightarrow{j} = j(x)\overrightarrow{u_x}$$

De plus, nous avons $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{0}$ car il n'y a pas de champs magnétique.
On obtient donc que :

$$\overrightarrow{j} = j_0.\overrightarrow{u_x}$$

On obtient donc :

$$i = j_0.S \Rightarrow \overrightarrow{E} = \frac{j_0}{\sigma}\overrightarrow{u_x}$$

Donc obtient donc :

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= \frac{j_0}{\sigma} l \\ &= i\frac{l}{\sigma S} \end{aligned}$$

On obtient donc que :

$$R = \frac{l}{\sigma S}$$

Propriété 5 *On remarque des corrélations entre la capacité et la résistance d'un dipôle. On montre que dans une topologie proche, on as :*

$$R.C = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$$

5.3.3 Effet Joule

Considérons un dipôle. Soit P la puissance reçu par ce dipôle. On obtient :

$$P = \iiint \overrightarrow{j}.\overrightarrow{E}.d\tau$$

Or dans le cas d'un conducteur ohmique :

$$\overrightarrow{j} = \sigma\overrightarrow{E}$$

Donc :

$$P = \iiint \sigma.E^2.d\tau > 0$$

Donc un conducteur ohmique ne peut que consommé de l'énergie.

Troisième partie

Thermodynamique

Chapitre 6

Rappel et complément - Thermodynamique classique

6.1 Principe

6.1.1 Principe zéro

Énoncé 4 *Si on prend un système isolé, celui-ci évolue vers un état d'équilibre*

Ce principe est celui de l'existence d'état d'équilibre.
Dans ces états d'équilibre, les grandeurs thermodynamique, grandeurs macroscopique, sont parfaitement définies.

Grandeur intensive, extensive

Définition 23 *Une grandeur est extensive si l'addition a un sens pour elle. Si ça n'est pas le cas, la grandeur est dit intensive*

6.1.2 Premier Principe

Énoncé 5 *Le premier principe est un principe d'évolution Il existe une grandeur, appellé énergie totale, extensive et conservative, que l'on peut définir dans tous système fermé. On appelle énergie totale d'un système, toutes l'énergie présente, peu importe sa forme.*

$$E_{tot} = E_{m,M} + u + E_{nucl} + E_{autre}$$

L'énergie est une fonction d'état. Elle ne dépend pas du chemin suivit, mais uniquement de l'état de départ et de l'état d'arrivé.
La varitation de cette énergie est donnée par :

$$\Delta E = w + Q$$

Enthalpie

Définition 24 *Soit enthalpie, fonction d'état notée H, la fonction définie par :*

$$H = u + pV$$

Avec u énergie interne, p la pression et V le volume.

Propriété 6 *Dans le cas d'une transformation monobar (pression exterieur constante), on as :*

$$Q = \Delta H$$

Extension du premier principe à un systeme ouvert

Propriété 7 *On peut etendre ce principe à u système ouvert. Par exemple, dans le cas d'une fluide en écoulement, on prend comme système : Systeme ouvert (Machine) + fluide qui entre pour l'instant t, et Systeme ouvert (Machine) + fluide qui sorte à l'instant t+dt.*
Dans ce cas, on peut appliquer le premier principe à ce système.

6.1.3 Second principe

Énoncé 6 *Énoncé de Thompson :*
Une machine ne peut pas effectuer un travail si elle n'est en contact qu'avec une seul source de chaleur

Énoncé 7 *Énoncé de Clausius :*
Il ne peut pas y avoir de transformation donc le seul effet serai de transporter de la chaleur d'une source froide vers une source chaude.

Entropie

Énoncé 8 *Pour tous système fermé, on peut définir une fonction d'état, notée S, appelé entropie, qui serai une grandeur extensive, mais non conservative. Cette grandeur peut être crée ou non, mais jamais détruite.*

Définition 25 *Le bilan entropique est défini par :*

$$\Delta S = S^r + S^p = \int dS$$

$$S^r = \int \frac{\delta Q}{Tf}$$

Si le système est caractérisé par T, V, on a :

$$dS = \frac{du}{T} + \frac{p.dV}{T}$$

Si il est caractérisé par p, T, on a :

$$dS = \frac{dH}{T} - \frac{V.dp}{T}$$

On détermine S^p à l'aide de la relation :

$$S^p = \Delta S - S^r$$

Température

À l'aide de l'expression de dS dans le cas d'un système caractérisé par T,V, on peut définir la température par :

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial u}\right)_V$$

6.2 Quelques notions de mécanique statique

6.2.1 Modèle cinétique du gaz parfait

Définition 26 *On montre que la pression exercé par N molécule de masse m, dans un volume V est donnée par :*

$$P = \frac{N.m. < v^2 >}{V.3}$$

Avec $< v^2 >$ la vitesse quadratique moyenne des molécules.

Définition 27 *On défini la constant de Boltzman, notée k, par :*

$$k = \frac{R}{Na}$$

Avec R la constante des gaz parfait, et Na le nombre d'Avogadro.

Définition 28 *Chaque terme énergétique ajoute un terme en* $\frac{1}{2}R$ *dans la capacité calorifique à volume constant dans le modèle des gaz parfait.*
Pour un gaz parfait diatomique, on défini :

→ $C_v = \frac{3}{2}R$ *a basse température (Translation)*

→ $C_v = \frac{5}{2}R$ *a température ambiante (Translation + rotation)*

→ $C_v = \frac{7}{2}R$ *a haute température (Translation + rotation + vibration)*

6.2.2 Interprétation statistique de l'entropie

Définition 29 *Un état macroscopique est constitué de multiples états microscopique. Boltzman défini l'entropie par :*

$$S = k.ln(\Omega)$$

Avec Ω *le nombres d'états microscopique constituant l'état macroscopique.*
L'entropie augmente donc quand le nombres d'état microscopique augmente.

6.3 Gaz parfait

6.3.1 Équation d'état des gaz parfaits

Définition 30 *L'équation d'état des gaz parfaits est :*

$$p.V = n.R.T$$

Avec p, la pression exprimé en Pa (1 bar = 10^5 *Pa), le volume en* m^3*, n en moles et T en Kelvin. R, la constante des gaz parfait, est donnée par :*

$$R = 8,314\ J.K^{-1}.mol^{-1}$$

Cette équation est du à Gay-Lussac.

Définition 31 *Cette équation est éloigné des résultats expérimentaux. On utilise un "variante" de cette équation, appellé equation de Van der Walles. Cette équation est :*

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right).(V - b) = R.T$$

Dans cette équation, on prend en compte le covolume (le volume des atomes), ce qui réduit le volume disponible, et on considère les interactions entre atomes, ce qui diminue la pression. Ces deux choses ne sont pas considéré dans le modèle du gaz parfait.

6.3.2 Loi de Joules

Premier loi de Joules

Énoncé 9 *Le première loi de Joules postule que u est une fonction qui dépend uniquement de la température. u=f(T)*

Propriété 8 *À partir de cette loi, on peut voir que :*

$$du = \frac{\partial f}{\partial T}dT = n.C_v.dT$$

Deuxième loi de Joules

Énoncé 10 *La deuxieme loi de Joules dit que, a l'aide de l'équation d'état des gaz parfaits :*

$$H = U + pV = f(T) + n.R.T = F(T)$$

Donc l'enthalpie est aussi une fonction de la température. De plus :

$$dH = n.C_p.dT \Rightarrow C_p = G(T)$$

La capacité calorifique à pression constante est donc aussi une fonction de la température. D'après ces expression, on en déduit que :

$$n.C_p = n.C_v + n.R$$

On obtient donc la relation de Mayer :

$$C_p - C_v = R$$

6.3.3 Entropie

Définition 32 *On appelle identité thermodynamique la relation suivante :*

$$du = \delta Q + \delta w$$

Propriété 9 *D'après l'identité thermodynamique, et sachant que :*

$$dH = du + d(pV)$$

On obtient :

$$dH = \delta Q + \delta w + pdV + Vdp$$

Sachant que H et u sont des fonctions d'état, donc ne dépendent pas du chemin suivit, mais uniquement de l'état de départ et de l'état d'arrivé, on peux considérer un transformation réversible. On obtient donc :

$$\delta Q_{rev} = T_f dS$$

Donc :

$$dH = T_f ds + Vdp$$

En développement à l'aide de l'entropie, dans le cas d'une transformation adiabatique quasi statique d'un gaz parfait, on obtient la relation de Laplace :

$$p.V^{\gamma} = cte$$

Avec γ défini par :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

6.4 Machines Thermiques

Voir le cours de MPSI.

Chapitre 7

Potentiel Chimique

7.1 Enthalpie libre

7.1.1 Travail récupérable dans une transformation monotherme, monobar

Considérons une transformation monotherme, le système est en contact avec un thermostat, et monobar, la pression exterieur au système est constante (Ce genre de transformation est le cas global en chimie).
Par application du premièr principe :

$$\Delta u = w + Q$$

D'ou, avec w_a un travail autre que les forces de pression :

$$w_a = \Delta u + p_0 \Delta V - T_0 \Delta S - T_0 \Delta S^p = \Delta G^* + T_0 \Delta S^p$$

Donc $-w_a$, le travail récupérable, est limité par :

$$w_a \leq \Delta G^*$$

7.1.2 Enthalpie libre

On introduit G, une fonction d'état, appelé enthalpie libre, qui est la fonction d'état le plus approprié pour étudier un systeme chimique subissent une évolution monobar et monotherme. On peut en effet exprimé H en fonction de G, nous le verrons.
Posons :

$$G = U + pV - TS = H - TS$$

D'où :

$$dG = \delta w_a + V dp - S dT - T dS^p$$

Dans ce cas, si $w_a = 0$:

$$\Delta G \leq 0$$

G ne peut que diminuer au cours de l'évolution. L'état d'équilibre est atteint pour le minimum de cette fonction.

7.1.3 Relation de Gibbs-Helmotz

Considérons un système réversible soumis uniquement à des forces de pression.
Dans ce cas :

$$dG = V dP - S dT$$

D'ou :

$$S = -\frac{\partial G}{\partial T}$$

En utilisant la deuxième définition de G donné dans l'étude de l'enthalpie libre, on obtient que :

$$H = G - T\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{p,etc..}$$

D'ou :

$$\frac{H}{T^2} = -\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{G}{T}\right)$$

7.2 Potentiel chimique

Définition 33 *Considérons un système chimique, par exemple $C + O_2 \rightarrow CO_2$. Ce système est caractérisé par T,P,V,n_i, avec n_i les quantites de matière des entités présente.*
L'enthalpie libre est donc une fonction de ces variables. Soit μ_i, le potentiel chimique de l'entité i, défini par :

$$\mu_i = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{T,P,n_j}$$

7.2.1 Relation d'Euler

Énoncé 11 *Soit n_i la quantité de matière de l'entité i, et μ_i sont potentiel chimique. Notons l'une des entités chimiques $i0$.*
On obtient la relation d'Euler, en considérant un système "séparer vituellement" en deux partie, avec une partie négligable devant l'autre :

$$G(T,P) = \sum_i \mu_i.n_i$$

7.2.2 Relation de Gibbs-Duhem

Énoncé 12 *D'après la relation d'Euler, on obtient que :*

$$Vdp - SdT = \sum_i n_i.d\mu_i$$

7.2.3 Équilibre d'un corps présent sous deux phases

Considérons un système contenant deux solvants, Eau et Huile par exemple, et un corps présent dans chaqu'un de ces deux solvants
On défini l'enthalpie libre de ce systeme comme la somme de l'enthalpie libre des deux sous systèmes.
On obtient que le corps va migrer dans la phase où le potentiel chimique est le plus faible. Or nous avons vu que :

$$\mu_i(T,P,n_i)$$

Donc le potentiel chimique va varie avec n_i. L'équilibre du système est donc atteint quand la variation d'entalpie libre du système est nul, donc quand les potentiels chimiques seront égaux.

7.3 Expression du potentiel chimique

7.3.1 Gaz parfait pur

On obtient la relation suivante :

$$\mu(T,P) = \mu(T,P_0) + R.T.ln\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

Avec P_0 une pression de référence, qui est de 1 bar par convention.

7.3.2 Gaz réel pur

Dans le cas d'un gaz réel pur, on utilise un développent de Viriel, qui remplace d'équation d'équation d'états des gaz parfait par :

$$\frac{p.V}{R.T} = n(1 + \frac{A(T)}{V} + \frac{B(T)}{V^2} + \frac{C(T)}{V^3} + \dots)$$

On obtient donc, la relation suivante :

$$\mu(T, P) = \mu(T, P_0) + R.T.ln\left(\frac{f}{P_0}\right)$$

Avec f la fugacité du gaz, qui dépend des coefficiants A(T), B(T), C(T), ...

7.3.3 Gaz parfait dans un mélange de gaz parfait

Considérons un mélange constitué de deux gaz parfait.
On obtient la relation suivante :

$$\mu_{i_{melange}}(T, P) = \mu_{i_{pur}}(T, P_0) + R.T.ln\left(\frac{P_i}{P_0}\right)$$

Avec P_i, la pression partiel de l'entité i, c'est à dire la pression qu'exercerai le gaz si il était seul dans le système.

7.3.4 Phase condensée pur

Dans l'étude des phases condensée, on arrive à la conclusion que :

$$\mu(T, P) \simeq \mu(T, P_0)$$

Le potentiel chimique ne dépend plus que de la température

7.3.5 Mélange idéale - Mélange homogène

Définition 34 *On défini un mélange homogène comme un mélange dont la composition est identique en tout point.*

Considérons un mélange composé de n_e mole d'eau, et de n_a molécule d'alcool. Il y a une phase liquide et une phase gazeuse. À l'équilibre, il y a égalité des potentiels chimiques.
On obtient :

$$\mu_{A_{solution}} = \mu_{A_{pur}}(T, P) + R.T.ln\left(\frac{P_a}{P_{sa}}\right)$$

Avec P_i la pression partiel de l'entité A, et P_{sa} la pression de vapeur saturante de l'entité A. On obtient le schéma suivant pour un mélange idéal :

7.3.6 Solution diluée

Considérons deux composants, A, le solvant, B, le soluté, avec $n_b \ll n_a$
On obtient :

$$\mu_{B_{solution}}(T, P, compo) = f(T, P) + R.T.ln(x_b)$$

On peut obtenir cette relation à l'aide de la relation de Gibbs-Duhelm

Énoncé 13 *On a donc :*

$$Vdp - SdT = \sum_i n_i.d\mu_i$$

Si P est constant, tout comme T, on obtient donc :

$$\sum_i n_i.d\mu_i = 0$$

Donc

$$-n_a.\frac{\partial \mu_a}{\partial x_b} = n_b \frac{\partial \mu_b}{\partial x_b}$$

Grace à ceci on obtient la relation ci dessus.

Cette relation est vérifié dans le cas d'une solution infiniment dilué. Si la solution n'est que dilué, on fait appelle à l'activité.

$$\mu_{B_{solution}}(T, P, compo) = f(T, P) + R.T.ln(a_b)$$

Avec a_b l'activité de l'espèce b.

Chapitre 8

Équilibre liquide-vapeur d'un mélange binaire

8.1 Équilibre liquide-vapeur pour un corps pur

8.1.1 Équilibre d'un corps pur sous deux phases

Considérons un corps pur présent sous deux phases, liquide et gazeux.
Si on considère une transformation monotherme et monobar, on obtient que :

$$\Delta G \leq 0$$

On en déduit que le système évolue toujours vers la phase avec le potentiel chimique le plus faible.
À l'équilibre chimique, on à :

$$\mu_l(T, P) = \mu_v(T, P)$$

La pression d'équilibre est donc une fonction de la température.
De cette considération, on obtient les diagrammes visible dans les fiches de révision de Sup, dans les changements d'états.

8.1.2 Chaleur latente de changement d'état

Définition 35 *On considère un système de 1 kilogramme. A pression constant, on obtient un palier à température constante, dans le diagramme T = f(t) :*

Un corps pur est défini comme un corps admettent un palier de changement d'état, palier indépendant de la pression.

Définition 36 *La chaleur latente est l'énergie à fournir à 1 kilogramme de matière pour effectuer le changement d'état.*
On obtient :

$$L = \Delta H_{vaporisation}$$

L'enthalpie etant une fonction d'état, on peut imaginer une transformation réversible pour effectuer le changement d'état. On obtient donc que :

$$\Delta S = \frac{\Delta H}{T_v}$$

8.1.3 Relation de Clapeyron

Supposons que le système soit à l'équilibre à la température T_1 et à la pression P_1.
On as donc :

$$\mu_l(T_1, P_1) = \mu_v(T_1, P_1)$$

On peut considérer qu'à la température $T_1 + dT$ et à la pression $P + dP$, le système est encore à l'équilibre. On en déduit que :

$$\Delta\mu_l = v_l dP - s_l dT$$

avec v_l et s_l des grandeurs molaires. Sachant qu'on obtient la même relation pour $\Delta\mu_v$, on obtient que :

$$L = \frac{T_v(v_v - v_l)dP}{dT}$$

Ceci constitue la relation de Clapeyron. On peut d'après cette relation, en considérent le signe de L, déterminer la pente de la courbe de changement d'état dans un diagramme p = f(T), sachant que L est positif lors du changement d'état d'un état ordonnée vers un état moins ordonné.

Diagramme de Clapeyron

Nous avons le diagramme suivant :

8.2 Équilibre liquide-vapeur d'un mélange binaire

Définition 37 *On défini un mélange binaire comme un mélange composée de deux entités, qui peuvent être en phase liquide ou en phase gazeuse (ou inclusif ..)*

Considérons un système composé de deux entités, a et b, avec n_a et n_b les quantités de matière de a et b en phase liquide, n'_a et n'_b les quantités de matière de a et b en phases gazeuse.
Dans l'étude d'un tel système, on défini les factions molaires suivante :

$$x_a = \frac{n_a}{n_a + n_b} \ et \ x_b = 1 - x_a$$

$$x'_a = \frac{n_a}{n'_a + n'_b} \ et \ x'_b = 1 - x'_a$$

Le système est caractérisé par :

$$T, P, x'_a, x_a$$

Or, à l'aide de la relation qui dit que les potentiels chimiques des phases gazeuse et liquide sont égaux à l'équilibre, on obtient deux équations liant ces quatres inconnues.
Le système est donc divariant, il ne dépent que de deux inconnues.

8.3 Mélange de deux constituants totalements miscible à l'état liquide

8.3.1 Mélange idéale

Considérons deux constituants, a et b.
Nous avons les hypothèses suivantes :

$$P_a = x_a.P_{sa}(T)$$

$$P_b = x_b.P_{sb}(T) = (1 - x_a)P_{sb}(T)$$

On obtient donc que :

$$P = P_a + P_b = P_{sb}(T) + x_a(P_{sa}(T) - P_{sb}(T))$$

Diagramme isotherme

On en déduit que dans un diagramme isotherme, la pression est une fonction affine du titre x_a, le titre du liquide.
Si on considère le titre en vapeur, x'_a, on obtient que :

$$P = \frac{P_{sb}}{1 - x'a(1 - \frac{P_{sb}}{P_{sa}})}$$

On obtient donc une hyperbole.
Soit x''_a le nombre de mole de a (liquide + vapeur), sur le nombre totale de moles du système. Pour qu'il y ai équilibre liquide vapeur, il faut que ce titre soit compris entre les deux courbes :

Diagramme isobare

Les relations démontrer précédement reste valable. On obtient, en fixant la pression un diagramme isobare

Règle des segments inverse

Soit y, la grandeur défini par :

$$y = \frac{x''_a - x'_a}{x_a - x'_a}$$

On obtient que :

$$y = \frac{d(MV)}{d(LV)}$$

avec d(XZ) la distance entre X et Z.

8.3.2 Mélange réel

On peut toujours construire les diagrammes à l'aide d'expérience. On observe par contre des diagrammes avec un ou deux fusceaux, et des points azéotropique.

Points azéotropique

Un point azéotropique est un point de rencontre des deux courbe f(x_a) et $f(x'_a)$, par exemple. En ce point, le changement d'état s'effectue a temperature constante. On pourrai donc croire que le mélange binaire est un corps pur, car l'existance de ce palier est l'une de leurs caractéristique. Mais ce point azéotropique dépend de la pression, donc le palier dépend de la pression à la quelle on travaille, ce qui n'est pas le cas pour un corps pur.
Ces point ont une forte influence, dans la distilation par exemple, car on ne peut pas dissocier les deux composants. On peut dissocier un composant et un mélange azéotrope. Exemple dans une diagramme isobare :

Chapitre 9

Grandeurs thermochimique standards

9.1 Réaction chimiques

9.1.1 Équation bilan

Définition 38 *Considérons une réaction chimique. On associe a cette réaction une équation bilan :*

$$\alpha_1.A_1 + \alpha_2.A_2 + ... \rightleftarrows \beta_1.B_1 + \beta_2.B_2 + ...$$

Cette équation rend compte de principalement de deux principes :
→ *Conservation de la matière (Conservation des noyaux)*
→ *Conservation de la charge (Conservation des éléctrons)*

9.1.2 Avancement de la réaction

Considérons la réaction chimique précédente.
Soit dn_{A_i} la variation de quantité de matière du réactif A_i et dn_{B_j} la variation de quantité de matière du produit B_j.
On introduit l'avancement de la réaction, noté ε :

$$d\varepsilon = \frac{-dn_{A_i}}{\alpha_i} = \frac{dn_{B_i}}{\beta_i}$$

L'unite de ε est la mole.
Si il n'y a pas de réaction :

$$d\varepsilon = 0$$

Si il y a une réaction, ε est bornée par une valeur maximale :

$$\varepsilon < \varepsilon_{\text{max}}$$

Donc, dans tout les cas, ε est une grandeur bornée.
On introduit donc le degrès d'avancement, ou taux d'avancement, notée γ :

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{\epsilon_{\text{max}}} \in [0, 1]$$

9.1.3 Chaleur de réaction

Définition 39 *Considérons un système fermé.*
On appelle chaleur de réaction la chaleur reçue par le système.
Si :
→ *$Q > 0$: Réaction endothermique*
→ *$Q < 0$: Réaction exothermique*

9.2 Enthalpie de réaction

9.2.1 Variation d'enthalpie au cours d'une réaction

Propriété 10 *Considérons un transformation monobar. Dans ce cas, on obtient que :*

$$\delta Q = dH$$

D'ou l'expression de l'enthalpie du système :

$$H = \sum_i n_{A_i}.hA_i(T,P) + \sum_j n_{B_j}.h_{B_j}(T,P)$$

Avec h_{A_i} l'enthalpie molaire de A_i pure. Pour obtenir cette expression, on suppose donc que l'enthalpie n'est pas modifié par le faite de mélanger les espèces.

Propriété 11 *Considérons maintenant une réaction monotherme et monobar, ce qui est le cas dans la grande majorité des réactions chimique. On obtient :*

$$dH = \sum d_{n_{A_i}}.hA_i(T,P) + \sum_j dn_{B_j}.h_{B_j}(T,P)$$

De plus, d'apres la définition de ε :

$$d\varepsilon = \frac{-dn_{A_i}}{\alpha_i} = \frac{dn_{B_i}}{\beta_i}$$

On obtient donc :

$$dH = (\sum_j \beta_j.h_{B_j}(T,P) - \sum_i \alpha_i.h_{A_i}(T,P)).d\varepsilon$$

9.2.2 Enthalpie standard de réaction

Définition 40 *On défini l'enthalpie de réaction, par :*

$$\Delta^r H(T,P) = \sum_j \beta_j.h_{B_j}(T,P) - \sum_i \alpha_i.h_{A_i}(T,P)$$

Propriété 12 *Au cours d'une transformation monotherme et monobar, on obtient donc :*

$$dH = \Delta^r H(T,P).d\varepsilon$$

Cette enthalpie standard de réaction correspond à la variation d'enthalpie dans la réaction avec l'état initiale (T,P,juste les réactifs) et l'état finale (T,P,juste les produits).

Définition 41 *On défini l'enthalpie standard de réaction par :*

$$\Delta H^{r,0} = \Delta^r H(T_0, P_0)$$

Avec $T_0 = 25C$ et $P_0 = 1bar$

9.2.3 Relation de Kirchoff

Énoncé 14 *La relation de Kirchoff permet de déterminer l'enthalpie de réaction à partir de l'enthalpie standard de réaction. On obtient la relation suivante :*

→ *Si il n'y a pas de changement d'etat entre T_0 et T :*

$$\Delta^r H(T,P_0) = \Delta H^{r,0} + \int_{T_0}^{T} \Delta C_p(T)$$

→ *Si il y a un changement d'état, par exemple en T_1, on obtient :*

$$\Delta^r H(T,P_0) = \Delta H^{r,0} + \int_{T_0}^{T_1} \Delta C_p(T)_{Etat\ A} + L + \int_{T_1}^{T} \Delta C_p(T)_{Etat\ B}$$

En général on peut fait une approximation en négligent les intégrales à chaque fois.

9.3 Enthalpie de formation d'un corps pur

9.3.1 Détermination experimentale de $\Delta^r H$

On peut toujours, en décomposant les réactions, obtenir $\Delta^r H$. Ceci est permis car l'enthalpie est une fonction d'etat.

9.3.2 Enthalpie de formation

On défini l'enthalpie de formation comme l'enthalpie de réaction de la réaction suivante :

$$\text{Corps pur simple dans leur état stable a } T_0, P_0 \rightarrow \text{ Corps unique}$$

De cette définition, on en déduit que l'enthalipe de formation d'un corps pur simple est nulle.

9.4 Énergie interne de réaction

Définition 42 *Dans le cas d'une transformation isochore, on as :*

$$dU = \Delta^r u(T, V).d\varepsilon$$

Avec :

$$\Delta^r u(T, V) = \Delta^r H - \Delta(PV)$$

On fait l'hypothèse que les phases condensé sont incompression. On néglige donc $\Delta(PV)$.
Dans le cas des gazs parfaits :

$$PV = n.R.T \Rightarrow \Delta(PV) = R.T.(\sum_j B_{j,gaz} - \sum_i A_{i,gaz})$$

En connaisant l'enthalpie de réaction, on connait l'énergie interne de réaction.

9.5 Entropie standard de réaction

Dans ce cas, nous avons uniquement une définition formel ! Elle n'a aucune réalité physique. Car lors du mélange, l'entropie ne se conserve pas.
On a :

$$\Delta^r S(T, P) = \sum_j \beta_j.s_{B_j}(T, P) - \sum_i \alpha_i.sA_i(T, P)$$

Mais c'est tout ! ! ! Nous n'avons pas les relations vu dans les autres chapitre, car l'entropie ne se conserve pas lors du mélange.

9.5.1 Entropie absolue

Contrairement au autre grandeur vu précédement, l'entropie n'est pas défini à une constante près. On défini donc l'entropie absolue :

$$\Delta^r S(T_0, P_0) = \sum_j \beta_j.s_{B_j}(T_0, P_0) - \sum_i \alpha_i.sA_i(T_0, P_0)$$

On ne considère pas de mélange, on considere les corps non mélangé. On obtient la meme relation pour obtenir l'entropie standard de réaction à l'aide de l'entrope absolue, sauf que les approximations précédente ne sont plus vérifié. Encore une fois, cette définition est purment formel. Elle n'a pas de réalité phyisique.

Chapitre 10

Equilibre chimique

10.1 Affinité chimique

10.1.1 Variation de l'enthalpie libre au cours d'une réaction monobar et monotherme

Considérons le système suivant :

$$\alpha_i.A_i + \alpha_2.A_2... \rightleftarrows \beta_1.B_1 + \beta_2.B_2.....$$

On obtient :

$$dG = VdP - SdT + \sum_i \mu_i.dn_i$$

D'ou ici, considérant que cette réaction est monobar et monotherme :

$$dG = [\sum_j \beta_j.\mu_{B_j} - \sum_i \alpha_i \mu_{A_i}].d\varepsilon$$

Avec $d\varepsilon$ l'avancement.

10.1.2 Définition

Définition 43 *On défini l'affinité chimique, notée A, défini dans le cas d'une transformation monotherme et monobar de la façon suivante :*

$$dG = -A.d\varepsilon$$

L'unité de A est le Joules.moles^{-1}.
En considérant l'énergie interne et sa relation avec l'enthalpie libre, on considérant que les seules forces sont des forces de pression, on obtient :

$$\frac{A.d\varepsilon}{T} > 0 = \text{ Entropie crée}$$

On en déduit donc que A et $d\varepsilon$ sont toujours de meme signe.

10.1.3 Prévision de l'évolution de la réaction

Considérons une transformation monobar, monotherme, donc les seuls forces sont des forces de pressions. Nous avons le principe d'évolution suivant :

$$\Delta G \leq 0$$

L'enthalpie libre évolue toujours vers un minimum.
Si la réaction est quantitative, la fonction G=f(ε) est décroissante jusqu'a atteint son minimum pour ε_{max}.
Si la réaction admet un état d'équilibre, la fonction décroissant jusqu'a un maximum, pour le ε_{eq} et croit jusqu'a ε_{max}.
Nous avons donc un principe d'évolution à l'aide de l'affinité chimique :

→ Si A > 0, alors $d\varepsilon > 0$, la réaction se produit donc dans le sens direct
→ Si A < 0, alors $d\varepsilon < 0$, la réaction se produit donc dans le sens indirect

10.1.4 Expression de A

L'expression de l'affinité de A est :

$$A = \sum_i \alpha_i.\mu_{A_i} - \sum_j \beta_j.\mu_{B_j}$$

En considérant des solutions idéale et des gaz parfaits, on obtient, en partant de l'expression des potentiels, et sachant que :

$$G \sum n.\mu$$

On obtient :

$$A = -\Delta^r G(T,P) - RTln(Q)$$

Avec Q le quotient de réaction, défini par :

$$Q = \frac{\prod_j a_{B_j}^{\beta_j}}{\prod_i a_{A_i}^{\alpha_i}}$$

Ce quotient est défini $\forall\varepsilon$.

10.1.5 Relation de Gulberg et Waages

Condition d'équilibre

A l'équilibre, on a :

$$A = 0$$

On obtient donc que :

$$ln(Q) = \frac{-\Delta^r G(T,P)}{R.T}$$

Si on fixe la pression et la température, le quotient de réaction est totalement défini à l'équilibre. On le note K(T).
D'ou à l'équilibre :

$$Q = K(T) = e^{-\frac{\Delta^r G(T,P)}{R.T}}$$

10.2 Déplacement de l'équilibre

10.2.1 Influence d'une variation de température

Loi de Van't Hoff

Nous avons par définition :

$$A = -\Delta^r G(T,P) - R.T.ln(Q)$$

Soit T_1 la température d'équilibre. On a donc :

$$ln(Q) = \frac{-\Delta^r G(T,P)}{R.T}$$

On introduit une petite variation de température :

$$T = T_1 + \nu,\ \nu \ll T_1$$

D'après la relation de Gibbs-Helmotz, qui dit que :

$$\frac{\partial \frac{G}{T}}{\partial T} = \frac{-H}{T^2}$$

On obtient que :

$$\frac{\partial Ln(K)}{\partial T} = \frac{\Delta^r H}{R.T^2}$$

Ceci constitue la loi de Van't Hoff.
Donc, si $\Delta^r H > 0,\ A > 0$, la réaction à lieu dans le sens direct.

Principe de modération

Si on éleve la température, l'équilibre se déplace dans le sens de la réaction endothermique, qui consomme de l'énergie.
En d'autre terme, si on apporte de l'énergie à un système, celui ci réagit en s'opposant à cette énergie en quelque sorte, en consommant une partie de cette énergie.

10.2.2 Influence d'une variation de pression

Une élévation de pression déplace l'équilibre dans le sens de la diminution du nombre mole. Ceci consititue encore un principe de modération

10.2.3 Influence de l'ajout d'un constituant

A volume constant

A température constante et à volume constant, l'ajout d'un réactif déplace l'équilibre de la réaction dans le sens de la consommation du réactif

A pression constant, gaz inerte

A pression constante, l'ajout d'un gaz inerte déplace l'équilibre quand le sens qui augmente le nombre de mole de gaz

A pression constant, ajout d'un reactif

Si on ajoute un réactif à pression constante, il y a plusieurs cas de figure :
→ L'équilibre peut se déplacer dans le sens de la consommation des réactifs
→ Mais il peut aussi se déplacer dans le sens de la production des réactifs, dans le sens indirect donc.

10.3 Potentiel d'oxydo-réduction

10.3.1 Force électromotrice d'une pile

Considérons une pile, consititué d'un circuit exterieur et deux becher, constitué respectivement de (Ox_1, Red_1) et (Ox_2, Red_2). La pile est en convention générateur, et le circuit en convention récepteur.
Considérons un avancement $d\varepsilon$. Pour cette avancement, nous observons le déplacement de la charge dq dans le circuit :

$$dq = n.m.N_a.e.d\varepsilon$$

On obtient donc l'expression de la puissance et du travail reçu par le circuit :

$$P_{elec} = i.(-u) = -u.\frac{dq}{dt}$$

$$W_{elec} = -U.n.m.N_a.e.d\varepsilon$$

On voit donc que la réaction est controlé par le circuit exterieur.
On peut donc se placer dans un cas réversible, en placant un GBF de force électromotrice E dans le circuit externe.
Considérons une transformation réversible, monotherme et monobare. On obtient donc :

$$dG = W_{elec}$$

Avec G l'enthalpie libre. D'ou :

$$-Ad\varepsilon = -n.m.N_a.e.E.d\varepsilon$$

D'ou :

$$A = n.m.N_a.e.E$$

On peut donc relier l'avancement de la réaction à E.

10.3.2 Relation de Nernst

En partant de l'expression précédente, et en développent l'expression de l'affinité chimique, on obtient que :

$$\prod_{ox/red} = \prod^{0} + \frac{R.T}{n.N_a.e}.ln(10).log(\frac{a(ox)}{a(red)})$$

Avec $\prod$ le potentiel du groupe ox/red, $\prod^0$ le potentiel standard du groupe ox/red, et a(X) l'activité de X.
Pout T = 25°C, on obtient :

$$\frac{R.T}{N_a.e}.ln(10) = 0.06$$

On obtient donc la formule de Nernst :

$$\prod_{ox/red} = \prod^{0} + \frac{0.06}{n}.log\left(\frac{a(ox)}{a(red)}\right)$$

Mais c'est formule n'est valable qu'a 25°C, a cause du 0.06.

10.4 Variance

Définition 44 *On considère une système chimique à l'équilibre (il y a donc coexistance des réactifs et des produits).*
On appelle variance le nombre de paramètre intensif que l'on peut fixer arbitrairement sans rompre l'équilibre.

Chapitre 11

Diagramme d'Ellingham

11.1 Construction du diagramme

11.1.1 Oxyde

Définition 45 *Un oxyde est de la forme M_yO_x, avec M un élément (ici un métal) , et O l'oxygène.*
En général, le nombre d'oxydation de l'oxygène est -II.
Si ce n'est pas le cas, on appele ces entités des peroxyde.
On defini aussi des oxydes mixtes, très présent dans les roches par exemple. Exemple :

$$Al_2N_gO_4$$

Un oxyde peut passer par les trois états de la matière, mais on le trouve majoritairement, sous les "conditions normal" de température et de pression, dans l'état solide.

Structure

La structure d'un oxyde peut être des liaisions covalente, ou une forme parfaitement ionique, ou encore un mixte de ces deux structures.

Propriétés acide-base

Les oxydes peuvent etre acide au sens de Brönsted, c'est à dire capable de céder un ou plusieurs H^+, comme au sens de Lewis, c'est a dire capable de capter des doublets.
Il peuvent aussi etre des bases au sens de Brönsted, c'est a dire capable d'accepter un ou plusieurs H^+.

Réaction de formation d'un oxyde

Par convention, dans toutes réactions de formation d'un oxyde, on pose 1 pour le coefficiant stochiométrique de O_2, et on équilibre l'équation en conséquence.

11.1.2 L'approximation d'Elligham

Dans les réactions étudié, à savoir les réactions de formation des métaux à partir des oxydes, on peut introduire l'enthalpie libre :

$$\Delta G^r(T) = \Delta H^r(T) - T.\Delta S^r(T)$$

L'approximation d'Elligham consiste à dire qu'en l'absence de changement d'état, l'ethalpie de formation et l'entropie de formation sont des constantes indépente de la température. On obtient donc une fonction affine en fonction de la température pour l'enthalpie libre.
Si il y a un changement d'état, la fonction reste affine, mais la pente est différente, il y a donc une brisure de pente.

11.2 Utilisation du Diagramme d'Elligham

11.2.1 Prévison des réactions

On utilise le diagramme d'Elligham pour étudier la faisabilité d'une réaction.
En effet, la réaction à lieu si l'affinité chimique A est positive, donc si $\Delta G^r(T)$ est négatif, et on peut lire cette information directement sur le diagramme d'Elligham.
Lorsque les deux droites impliqué dans la réaction se croise, on appele la température où ceci arrive température d'inversion. Cette température correspond a :

$$\Delta G^r(T) = 0$$

Par exemple, nous avons le diagramme suivant pour la réaction ayant l'affinité suivante :

$$A = -\Delta G^r + 2RTln(\frac{P_{H_2}}{P_{H_2O}})$$

11.2.2 Domaine d'existence

Grâce au diagramme d'Elligham, on obtient le domaine d'existence du métal et de son oxyde, à un T fixé.
Par exemple, dans le cas où l'affinité est donnée par :

$$A = -\Delta G^r + RTln(\frac{P_0}{P_{CO_2}})$$

Chapitre 12

Transferts Thermiques

12.1 Introduction

12.1.1 Irreversibilité

La chaleur, noté Q, est un transfert d'énergie qui ne provient pas d'un travail. La variation de l'énérgie interne est donnée par :

$$dU = TdS - pdV + \mu dn$$

On peut obtenir l'expression de la variation d'entropie de la relation précédente :

$$dS = \frac{1}{T}du + \frac{P}{T}dV - \frac{\mu}{T}d_n$$

Toute la termodynamique est présente dans cette formule. Nous avons :

$$S \geq 0$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U}$$

Toutes les autres grandeur sont défini par l'entropie.
On monter, a l'aide des relations precédente, que l'énergie va du plus chaud vers le moins chaud.
Dans ce chapitre, on s'interesse au cas ou des solides échange de la chaleur

12.1.2 Les différents type de transfert thermique

Nous évoquerons trois type de transfert thermique :
→ La conduction : Ce type concerne des solides, éventuellement des fluide au repos. La conduction est un échange d'énergie de proche en proche à l'aide des interactions de la matière (niveau microscopique).
→ La convection : C'est un transfert d'énergie lié à un transfert de matière.
→ Rayonnement : Un transfert d'énergie par rayonnement électromagnétique

12.1.3 Hypothèse de l'équilibre thermique local

Cette hypothèse considère à supposer qu'a chaque instant on peut définir la température et l'énergie de tout point d'un materiau. Il faut considérer deux échelles de temps :
→ La constante de temps pour homogénéiser la température autour du volume élementaire
→ La constante de temps du volume macroscopique
Cette hypothèse est vérifié si le temps macroscopique $\gg$ au temps microscopique

12.1.4 Vecteur densité surfacique de flux de puissance

Nous l'avons vu, le transfert de chaleur est directif : Il va du chaud vers le froid. Considérons une surface élementaire $d\Sigma$. On montre que :

$$\delta P = \overrightarrow{j_q}.\overrightarrow{n}.d\Sigma$$

$\overrightarrow{j_q}$ est appelé flux de puissance. Son unité est W.m^{-2}

12.2 Conduction

12.2.1 Loi de Fourier

La loi de Fourier dit que :

$$\overrightarrow{j_q} = -\lambda\overrightarrow{grad}(T)$$

λ est appelé conductivité. Son unité est $W.m^{-1}.K^{-1}$. Cette loi est une loi phénoménologique. Cette loi suppose des materiaux isotropes, de part le λ scalaire.

12.2.2 Équation de la chaleur

En considérons un volume élémentaire de masse volumique μ, on montre, en considérant la puissance, que :

$$\mu C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda\Delta T - \Gamma = 0$$

Avec ΓdV l'énergie crée (Par effet Joule par exemple). Cette équation constitue l'équation de la chaleur.

12.2.3 Analogie Electrocinétique

Nous avons des analogies formelles, à l'aide de la loi d'Ohm et de la loi de Fourier :

Loi d'Ohm	Loi de Fourier
$\overrightarrow{j} = -\sigma\overrightarrow{grad}(V)$	$\overrightarrow{j_q} = -\lambda\overrightarrow{grad}(T)$
$\overrightarrow{j}$	$\overrightarrow{j_q}$
I = $\iint \overrightarrow{j}.\overrightarrow{n}.dS$	$\iint \overrightarrow{j_q}.\overrightarrow{n}.dS$ = Puissance Thermique
V	T
$\overrightarrow{E}$	$-\overrightarrow{grad}(T)$
σ	λ

On a donc l'équivalent de toute les théorèmes de l'électrocinétique. On appelle résistance thermique, en analogie avec l'électricité :

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{P}$$

Avec P la puissance, et T_1 et T_2 les températures (analogie avec les potentiels) aux "bornes" du système.

12.2.4 Convection

Loi de Newton

Considérons le transfert de chaleur entre un fluide et un solide par convection. On considère que la température est constante dans le fluide à une certaine distance du solide. Au contact du solide, le fluide est au repos.
Nous avons :

$$\overrightarrow{j_q} = h(T_p - T_f)\overrightarrow{n}$$

On obtient donc dans ce cas pour la résistance :

$$R_{th} = \frac{1}{\Sigma h}$$

Variation d'enthalpie pour un système ouvert

Considérons un système ouvert, par exemple un tuyau contenant un fluide qui s'écoule avec un débit massique D. Pour pouvoir appliquer le premier principe, on considère une système fermé en considérant un système à l'instant t, et un système à l'instant t+dt contenant le fluide qui s'est écoulé. On obtient, en régime permanent, avec un section constante :

$$0 = W_A + Q + Ddt(h_{m,1} - h_{m,2})$$

12.2.5 Rayonnement thermique

On considère ici le transfert d'énergie à l'aide des ondes électromagnétiques.

Transfert thermique par rayonnement

Considérons une surface S. Par définition, la puissance sur cette surface est donnée par :

$$P = \iint_S \overrightarrow{\pi}.\overrightarrow{n}.dS$$

On considère ici pas une onde qui arrive sur la surface, mais une superposition d'onde. Considérons "une" onde incidente, avec le flux Φ_i. En contact avec un corps, cette onde peut avoir plusieurs "actions" :

→ Se Propager dans le corps, avec le flux Φ_t

→ Le solide peut absorber le flux Φ_a

→ Se réfléchir sur le corps, avec le flux Φ_r

Dans la suite, on s'intéressera uniquement aux bilans à la surface, en notant, par abus, Φ_a le flux réelement absorbé et le flux transmit (car, au niveau de la surface, le flux "absorbé" est bien la somme de ces deux grandeurs). Par la conservation de l'énergie, on obtient que :

$$\Phi_i = \Phi_a + \Phi_r$$

Définition 46 *On appelle flux émis le flux éffectivement émis par le corps, sans tenir compte du flux réfléchi, et on le note* Φ_e

On peut caractériser un corps de la façon suivante :

→ Corps transparent : $\Phi_i = \Phi_t$: Le corps n'absorbe pas, ni ne réflechi.

→ Corps blanc : $\Phi_i = \Phi_r$: Le corps réflechi tout ce qu'il recoit.

→ Corps noir : $\Phi_i = \Phi_a$: Le corps absorbe tout le flux, d'où l'adjectif noir par analogie avec l'optique.

Un corps peut être caractérisé de façon différente selon la longeur d'onde.

Emittance Hémisphérique

Définition 47 *On appelle émittance la puissance émise par une surface dans toutes les directions, dans le demi espace défini par la normale à la surface :*

$$d^2P = EdS$$

Et avec, si on considére l'émittance d'une longeur d'onde :

$$E = \int E(\lambda)d\lambda$$

Dans le cas ou le rayonnement est directif (ex : Le soleil), on introduit la notion d'angle solide, défini par :

$$d\Omega = \frac{dS\overrightarrow{n}\overrightarrow{OM}}{OM^3}$$

$$\Omega = \iint_S d\Omega dS$$

L'angle solide est une notion lié à une surface. Il défini la façon par laquelle on observe la surface. C'est une grandeur sans dimension, d'unité le Stéradian. L'angle solide caractérise l'ensemble des droites passant par O et s'appuyant sur dS. On peut montrer, à l'aide d'une sphère par exemple, que l'on peut toujours exprimer l'angle solide par :

$$d\Omega = \sin(\theta)d\theta d\phi$$

Définition 48 *On défini la luminance, noté L, par :*

$$d^3P = L.dS.d\Omega$$

On obtient avec cette définition :

$$E = \iint L\cos(\theta)d\Omega$$

Si le corps considéré vérifie L = constante, on obtient que :

$$E = \pi L$$

Bilan radiatif d'une source

On définit le flux radiatif par :

$$\Phi_R = \Phi_i - \Phi_a$$

C'est l'énergie qui quitte la surface

12.2.6 Loi de Planck

Cette loi répond à l'étude d'un corps noir défini comme précédement. Plusieurs scientifiques avant Planck ont proposé des lois, mais nous verrons que ces lois ne sont "que" des cas limites de la loi de Planck. Énonçons cette loi :
Considérons la densité volumique d'énergie :

$$u = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Et le vecteur de Poynting :

$$\overrightarrow{\pi} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0}$$

En considérant l'énergie reçu par la surface pendant le temps dt du à des ondes arrivant avec une incidence θ, on montre que l'émittance est donnée par :

$$E = \frac{u.c}{4}$$

On montre que la densité d'énergie par unité de fréquence est donnée par :

$$u(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^2(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)}$$

avec $h = 6,0210^{-34}$ $J.s$ la constante de Planck et $k = \dfrac{R}{N_a} = 1.3810^{-23}$ la constante de Bolzman. La densité d'énergie est donnée par intégration sur les fréquences. En changeant de variable, on obtient la densité d'énergie par unité de longeur d'onde :

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1)}$$

Quand on fait tendre $\lambda \to \infty$ dans cette relation, on obtient la relation de Releigh :

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hTc}{\lambda^4}$$

Quand on fait tendre $\lambda \to 0$ dans la relation générale, on obtient la relation de Wien :

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} e \frac{-hc}{\lambda kt}$$

Loi de déplacement de Wien

Cette loi caractérise le déplacement du maximum entre la loi donnée par fréquence et celle donnée par longeur d'onde. Ce déplacement est du au fait que ces deux grandeurs ne sont pas proportionnel, mais inversement proportiel :

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

On obtient que les maximums sont donnés par :

$$u(\nu, T) \Rightarrow \nu_{\max} = \beta T$$

Le maximum en fréquence est donc proportionel à la température ($\beta = 5.8810^{10}$).

$$u(\lambda, T) \Rightarrow T\lambda_{\max} \simeq 3000\mu_m K$$

Loi de Stephan

On peut montrer, à partir de la loi de Planck, la loi de Stephan :

$$u = \int_0^\infty u(\lambda)d\lambda = \int_0^\infty u(\nu)d\nu = \alpha T^4$$

En pratique, on utilise plus l'émittance. On montre que :

$$E = \sigma T^4$$

Avec σ la constante de Stephan :

$$\sigma = 5.669610^{-8} W.m^{-2}.K^{-4}$$

De plus, on peut montrer que le maximum de l'énergie est comprise dan un petit intervalle de longeur d'onde (ex : [0.55λ_{max} - 5λ_{max}] contient 95

12.3 Thermodynamique du rayonnement

On peut appliquer la thermodynamique classique pour étudier le rayonnement, en ayant une approche corpusculaire de l'onde électromagnétique.

12.3.1 Pression de radiation

Considérons un rayon incident perpendiculaire à la surface externe d'un conducteur. On peut montrer que ce rayon induit une force à la surface de ce conducteur (effet de peau, voir électromagnétisme), ce qui peut se mettre sous la forme d'une pression, appelé pression de radiation. On montre que cette pression s'exprime sous la forme :

$$P = \frac{u}{2}$$

12.3.2 Relation entre la pression et l'énergie interne

On considère une surface, séparant un solide et le vide. On considère uniquement les particulier arrivant selon l'inclinaison θ. On peut montrer que dans ce cas, en sommant le résultat précédent entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, que :

$$P = \frac{u}{3} = \frac{U}{3V}$$

Car, par définition, avec U l'énergie interne, V le volume :

$$U = uV$$

12.3.3 Calcul de U

Nous avons donc :

$$U = 3PV$$

En considérant l'identité thermodynamique :

$$dU = TdS - PdV$$

On peut montrer que :

$$u = 3P\alpha T^4$$

On retrouve donc la loi de Stephan par une considération corpusculaire.

12.3.4 Calcul de l'entropie

On peut, avec toujours l'identité thermodynamique, calculer l'entropie. On obtient que :

$$dS = \frac{4}{3}V\alpha T^3$$

On obtient donc que l'entropie est proportionnel à T^3.

12.3.5 Facteur de forme

Définition 49 *On défini le facteur de forme, noté* $\underset{B\to A}{f}$*, comme la puissance émise par B et reçu par A, divisé par la puissance totale émise par B :*

$$\underset{B\to A}{f} = \frac{\textit{puissance reçu par } A}{\textit{Puissance totale émise par } B}$$

Si on se place dans le cas de l'hypothèse lambertien, on peut montrer, en considérant l'angle solide, que :

$$\underset{B\to A}{f} = \frac{1}{\pi S_B} \iiiint \frac{dS_B.\cos(\theta_B)dS_A\cos(\theta_A)}{PQ^2}$$

Cependant, ce calcul est très vite complexe. Cependant, nous allons voir qu'avec certaine propriétés, on peut simplifier ce calcul.

Propriétés

Propriété 1 Considérons un corps B convexe (propriété importante pour que le corps ne reçoit pas de rayonnement émis par lui-même), et un corps A entourant totalement B. Toute ce que va émettre B est récupéré par A. On obtient donc que :

$$\underset{B\to A}{f} = 1$$

Propriété 2 Nous avons la propriété suivante :

$$S_B \underset{B\to A}{f} = S_A \underset{A\to B}{f}$$

On peut donc obtenir, en considérant la première propriété, $\underset{A\to B}{f}$:

$$\underset{A\to B}{=} \frac{S_B}{S_A}$$

Propriété 3 Si le corps B est entouré de plusieurs corps, on obtient que :

$$\sum \underset{B\to S_i}{f} = 1$$

Dans l'exemple de la propriété 1, on obtient que :

$$\underset{A\to B}{f} + \underset{A\to A}{f} = 1$$

$$\underset{A\to A}{f} = 1 - \frac{S_B}{S_A}$$

Toutes ces propriétés sont indépendaente de la géométrie, si on se place sous les hypothèses spécifiées au début.

12.3.6 Echange radiatif entre deux sphères

Considérons une cavité sphérique A, et une sphère B. On as l'expression du flux radiatif :

$$\Phi_B^R = \Phi_B^P - \Phi_B^i = \Phi_B^E - \Phi_B^A$$

En considérant la première partie de l'égalité, et en introduisant, ε_B le coefficient d'absorbtion, on montre que l'on peut écrire :

$$\Phi_B^i = \frac{\varepsilon_A \sigma T_A^4 (1-\varepsilon_A)\frac{S_B}{S_A}\varepsilon_B \sigma T_B^4}{1-(1-\varepsilon_A)(1-\varepsilon_B\frac{S_B}{S_A})}$$

Si on se place dans le cas ou $S_A \gg S_B$, on obtient :

$$\Phi_B^i = \sigma T^4$$

On obtient que le corps B se comporte comme un corps noir. En remplaçant dans l'expression, on détermine le flux radiatif, donné par :

$$\Phi_B^R = \frac{\varepsilon_A \varepsilon_B \sigma (T_B^4 - T_A^4)}{1-(1-\varepsilon_A)(1-\varepsilon_B\frac{S_B}{S_A})}$$

Quatrième partie

Magnétostatique

Chapitre 13

Loi de Biot et Savart

13.1 Distribution linéique

Énoncé 15 *Considérons le champ magnétique $d\overrightarrow{B}$ crée par un élément de longueur dl.*
On obtient l'expression du champs par la relation suivante :

$$d\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\frac{\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

13.2 Distribution volumique

Énoncé 16 *On peut élargir la loi de Biot et Savart à une distribution volumique de charge.*
Sachant que :

$$i = \iiint \overrightarrow{j}.\overrightarrow{n}.dS$$

On obtient l'expression du champs $\overrightarrow{B}$ crée par une distribution volumique de courant :

$$\overrightarrow{B} = \iiint \frac{\mu_0}{4.\pi}.\frac{\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}.dV$$

13.3 Propriété de symétrie

Propriété 13 *Nous avons les propriétés suivantes concernant les symétries :*

→ *Si M appartient à un plan de symétrie, alors le champs $\overrightarrow{B}(M)$ est perpendiculaire à ce plan*
→ *Si M appartient à un plan d'anti-symétrie, alors le champs $\overrightarrow{B}(M)$ appartient à ce plan.*

Chapitre 14

Potentiel Vecteur

14.1 La divergence du champs magnétique est nul

14.1.1 Calcul pour le champs crée par un élément de circuit

Propriété 14 *Considérons le champs crée en un point M par une surface élémentaire dl d'un fil parcourus par l'intensité i.*
Considérons Σ, une surface contenant M. D'ou, l'expression du flux sur cette surface :

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{dB}.\overrightarrow{n}.dS$$

Or, les $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{dB}$ s'annule car chaque terme possède sont anti-symétrique. Donc le flux à travers la surface Σ est nul. De plus, nous savons que, avec V le volume délimité par Σ :

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{dB}.\overrightarrow{n}.dS = \iint_{V} div(d\overrightarrow{B})dV$$

Or le flux est nul quelque soit Σ. On obtient donc que :

$$div(d\overrightarrow{B}) = 0$$

Donc que :

$$div(\overrightarrow{B}) = 0$$

La divergence du champs magnétique est donc nul.

14.1.2 Calcul utilisant l'analyse vectorielle

Propriété 15 *Soit $\overrightarrow{D}$ un champs vectorielle et f une grandeur scalaire. Nous avons la propriété suivante :*

$$\overrightarrow{rot}(f.\overrightarrow{D}) = f.\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{D}) + \overrightarrow{grad}(f) \wedge \overrightarrow{D}$$

Propriété 16 *Considérons un circuit filiforme. D'après la loi de Biot et Savard, nous avons :*

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0.i}{4\pi} \int \overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{PM}.\frac{1}{PM^3}$$

En développent PM, on obtient que :

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0.i}{4\pi} \int \overrightarrow{grad}_M(\frac{1}{PM}) \wedge \overrightarrow{dl}$$

Avec $\overrightarrow{grad}_M$ le gradiant par rapport à aux coordonnées de M.
De plus, avec la propriété précédente, on obtient que :

$$\overrightarrow{grad}_M(\frac{1}{PM}) \wedge \overrightarrow{dl} = \overrightarrow{rot}_M(\frac{\overrightarrow{dl}}{PM} - \frac{1}{PM}.\overrightarrow{rot}_M(\overrightarrow{dl})$$

Or $\overrightarrow{dl}$ est totalement indépendant de M, donc $\overrightarrow{rot}_M(\overrightarrow{dl} = 0$.
On obtient donc que :

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int \overrightarrow{rot}_M(\frac{\overrightarrow{dl}}{PM})$$

De plus, $\overrightarrow{rot}_M$ est indépendant du point P, on peut donc inverser l'intégrale et le $\overrightarrow{rot}$.
On obtient donc :

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}_M\left(\int \frac{\mu_0.\overrightarrow{dl}}{4.\pi.PM}\right)$$

De plus on sait que quelque soit le champs de vecteur $\overrightarrow{D}$, nous avons le résultat suivant :

$$div(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{D})) = 0$$

On obtient donc que :

$$div(\overrightarrow{B}) = 0$$

14.2 Défintions du potentiel vecteur

Définition 50 *On défini le potentiel vecteur par :*
Si $div(\overrightarrow{B}) = 0$, alors $\exists \overrightarrow{A}$ telque $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A})$.
On appele potentiel vecteur le vecteur $\overrightarrow{A}$. Ce potentiel vecteur peut avoir une "infinité" d'expression.
Son expression classique est :

$$\overrightarrow{A} = \int \frac{\mu_0.i}{4.\pi.PM}.\overrightarrow{dl}$$

14.2.1 Jauge dite de Coulomb

Propriété 17 *Pour réduire en quelque sorte cette infinité, on pose que le potentiel vecteur doit vérifier :*

$$div(\overrightarrow{A}) = 0$$

Cette condition réduit le nombre de possibilité pour $\overrightarrow{A}$. Le potentiel classique vérifie cette condition.

14.3 Théorème de Stokes

Théorème 1 *Soit $\overrightarrow{D}(M)$ un champs de vecteur associé au point M.*
Considérons un contour γ.
Soit C la circulation du champs de vecteur sur γ. On obtient que :

$$C = \oint \overrightarrow{D}.\overrightarrow{dl} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{D}).\overrightarrow{n}.dS$$

Avec Σ une surface quelconque de contour γ.
Ce théorème est utile pour détérminer un potentiel vecteur à partir du champs magnétique

14.4 Analogie entre le potentiel vecteur et le potentiel scalaire

On peut étendre les propriétés vu pour le potentiel scalaire V au potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$.

Potentiel scalaire	Potentiel vecteur
$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$	$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A})$
V $= \iiint \frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon_0.PM}$	$\overrightarrow{A} = \iiint \frac{\mu_0 \overrightarrow{j}\, d\tau}{4\pi.PM}$

Ceci consiste à faire les transpositions suivantes pour la composante A_x par exemple :

$$\rho \rightarrow j_x$$
$$\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \rightarrow \frac{\mu_0}{4.\pi}$$

Avec j_x la composant selon u_x du vecteur densité de courant. On obtient donc le parralèle suivant par exemple :

$$\Delta V = \frac{-\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \Delta A_x = -\mu_0.j_x$$

14.5 Champ magnétique au voisinage d'un axe d'anti-symétrie

Considérons le champs magnétique crée par un spire centré sur l'axe Oz par exemple. On obtient donc par raison de symétrie que :

$$\overrightarrow{B} = B_1(r,z)\overrightarrow{u_r} + B_2(r,z)\overrightarrow{u_z}$$

Plaçons nous dans le plan Oxy. peut donc assimiler $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_z}$ au vecteur des coordonées cartésiennes. Sachant que l'axe est un axe d'anti-symétrie, on obtient que B_1 est une fonction impaire et que B_2 est une fonction paire (utile pour envisager un développement limite de ces fonctions).
De plus on sait que :

$$div(\overrightarrow{B}) = 0$$

Ceci implique donc que

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{n}.dS = 0$$

On obtient au final que :

$$B_1(r,z) = -\frac{\partial B_2}{\partial z}.\frac{r}{2}$$

En connaisant la composante du champs sur l'axe, on connait le champs au voisinage de l'axe.
On peut étendre ce résonnement en électrostatique, en considérant que div$(\overrightarrow{E}) = 0$, c'est à dire que l'axe ne porte par de charge.

Chapitre 15

Théorème d'Ampère

15.1 Laplacien vecteur

En coordonée cartesienne, on peut définir le Laplacien vecteur du potentiel vecteur de la façon suivante :

$$\overrightarrow{\Delta(\overrightarrow{A})} = \left| \begin{array}{l} \Delta(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{u_x}) \\ \Delta(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{u_y}) \\ \Delta(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{u_z}) \end{array} \right.$$

15.2 Forme locale du théorème d'Ampère

Théorème 2 *Nous avons, nous l'avons vu :*

$$\Delta\overrightarrow{A}.\overrightarrow{u_x} = -\mu_0.\overrightarrow{j}.\overrightarrow{u_x}$$

De plus, on obtient le résultat suivant :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A})) = \overrightarrow{grad}(div(\overrightarrow{A})) - \overrightarrow{\Delta(\overrightarrow{A})}$$

D'ou, en considérant la jauge de Coulomb sur le potentiel vecteur, on obtient que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B}) &= -\overrightarrow{\Delta(\overrightarrow{A})} \\ &= \mu_0.\overrightarrow{j} \end{aligned}$$

Ceci consitue la forme locale du théorème d'Ampère.

15.3 Forme global du théorème d'Ampère

Théorème 3 *Considérons un coutour fermé Γ, et Σ une surface quelconque de contour Γ.*
En considérant la forme locale du théorème d'Ampère et le théorème de Stockes, on obtient que :

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0.i$$

Avec i le courant enlacé défini par :

$$i = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{j}.\overrightarrow{n}.dS$$

On doit définir le sens de $\overrightarrow{dl}$. Le courant enlacé est donc une grandeur algébrique

Chapitre 16

Champs magnétique crée par un dipole magnétique

16.1 Définitions et propriétés

Définition 51 *Un dipole magnétique est n'importe quel circuit "vu de loin", c'est à dire que pour un point M suffisament loin du dipole, on peut faire l'approximation dipolaire, c'est à dire que* $\| \overrightarrow{OM} \| \gg$ *devant toutes les distances caractéristique du circuit.*

Propriété 18 *En partant de l'expression "classique" du potentiel vecteur, en déterminant le produit scalaire :*

$$\overrightarrow{K}.\overrightarrow{A} = \int \mu_0.i.\frac{\overrightarrow{K}.\overrightarrow{dl}}{4.\pi.PM}$$

Avec $\overrightarrow{K}$ *un vecteur constant et en effectuant l'approximation dipolaire, on obtient que :*

$$\overrightarrow{A} = \frac{\mu_0}{4.\pi}.\frac{\overrightarrow{\mathcal{M}}.\overrightarrow{OM}}{OM^3}$$

Avec $\overrightarrow{M}$ *le moment magnétique défini par :*

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = \iint i.\overrightarrow{n}.dS$$

A partir de cette expression du potentiel vecteur, on peut détérminer l'expression du champs magnétique, sachant que :

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A})$$

16.2 Analogie entre dipole électrique et dipole magnétique

Sachant que le potentiel crée par un dipole électrique est donnée par :

$$V = \frac{\overrightarrow{p}.\overrightarrow{OM}}{4\pi\varepsilon_0.r^3}$$

En effectuant l'approximation du dipole électrique, et que le potentiel vecteur dans le cas qu'un dipole magnétique est donnée par :

$$\overrightarrow{A} = \frac{\mu_0.\overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{OM}}{4.\pi.OM^3}$$

Toujours en effectuant l'approximation du dipole magnétique. On peut donc étendre les résultats obtenu dans le cas d'un dipole électrique pour un dipole magnétique en effectuant les modifications suivantes, avec $\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{p} \rightarrow \overrightarrow{M}$$

$$\overrightarrow{p}.\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \rightarrow \mu_0$$

Cinquième partie

Electromagnétisme

Chapitre 17

Actions électromagnétique exercées sur un circuit

17.1 Effet Hall

Définition 52 *Considérons un conducteur, par exemple un pavé, dans lequel se déplace des particules chargée selon la vitesse :*

$$\overrightarrow{v} = v.\overrightarrow{u_x}$$

Supposons l'existance d'un champs magnétique portée par $\overrightarrow{u_y}$, orienté selon l'axe Oy. Nous savons qu'une particule chargée subit la force de Lorentz :

$$\overrightarrow{f} = q.\overrightarrow{E} + q.\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

Sous l'action du champs magnétique, le force de Lorentz, qui est porté par $\overrightarrow{u_z}$ crée une disymétrie dans la répartition des charges. On observe donc la créaction d'un champs électrique.
Ce champs électrique entraine la création d'une différence de potentiel. De plus, la force de Lorentz tend vers un équilibre caractérisé par :

$$\overrightarrow{f} = \overrightarrow{0}$$

On en déduit donc que le champs éléctrique crée suite à l'action du champs magnétique est égale à :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

De plus, nous avons :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$$

En projetant sur $\overrightarrow{u_z}$, on obtient :

$$dV = v. \parallel \overrightarrow{B} \parallel .dz$$

En intégrant entre 0 et d sur l'axe z, on obtient que :

$$\begin{aligned} U &= V(d) - V(0) \\ &= v. \parallel \overrightarrow{B} \parallel .d \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{cases} \overrightarrow{j} = \rho_{mob}.\overrightarrow{v} \\ i = \iint \overrightarrow{j}.\overrightarrow{n}.dS \end{cases}$$

On obtient donc l'expression de la tension crée par effet Hall :

$$U = \frac{I.d.B}{S.\rho_{mob}}$$

Avec ρ_{mob} la densité de charge des charges en mouvement.

17.2 Force de Laplace

17.2.1 Expression

Définition 53 *La force de Laplace est la force magnétique exercé sur un circuit.*
Considérons un conducteur parcours par un courant. Les charges en mouvement subissent la force de Lorentz, donnée par :

$$\overrightarrow{f} = q.\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

Comme vu précédent, il apparait un champs magnétique d'expression :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

Mais le conducteur contient aussi des charges fixes. Ces charges subissent le nouveau champs électrique à travers la force de Lorentz électrique.
Considérons un élément $\overrightarrow{dl}$ du conducteur :

$$d\overrightarrow{F} = \Sigma q_f.\overrightarrow{E} = -\rho_{fixe}.\overrightarrow{V}.dS.dl \wedge \overrightarrow{B}$$

De plus, nous avons les relations suivantes :

$$\begin{cases} \rho_{fixe} + \rho_{mob} = 0 \\ \overrightarrow{j} = \rho_{mob}.\overrightarrow{v} \end{cases}$$

On obtient donc l'expression de la force de Laplace :

$$d\overrightarrow{F} = i.\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}$$

Cette force s'applique sur les charges fixes.
Dans le cas d'un distribution volumique de courant, on obtient :

$$d\overrightarrow{F} = dV.\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}$$

17.2.2 Définitions légale de l'Ampère

Définition 54 *Considérons deux fils parcourus par un même courant (sens opposé).*
Par application du théorème d'Ampère, à l'aide de symétrie, et de la force de laplace, on obtient que :

$$d\overrightarrow{F} = \frac{\mu_0.i^2.dl}{2.\pi.r}.\overrightarrow{u_r}$$

Cette relation constitue la définition légale de l'Ampère. À l'aide de la force, on peut définir i = 1 A

17.3 Torseur des forces exercées sur un circuit

17.3.1 Energie d'interaction entre le champ et un circuit

Travail des forces de Laplace

Considérons une portion de circuit $\overrightarrow{dl}$ qui, sous l'action d'un champ magnétique, effectue une translation de $\overrightarrow{d\lambda}$. Par définition :

$$d\overrightarrow{F} = i\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}$$

Déterminons le travail de cette force :

$$\begin{aligned} \partial\omega &= d\overrightarrow{F}.\overrightarrow{d\lambda} \\ &= i(\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}).\overrightarrow{d\lambda} \\ &= i(\overrightarrow{d\lambda} \wedge \overrightarrow{dl}).\overrightarrow{B} \text{ (Permutation circulaire)} \\ &= i\overrightarrow{n}dS.\overrightarrow{B} \quad (\wedge = \text{ la normale multiplié par la surface engendré par les deux vecteurs)} \\ &= i.d\Phi_C \end{aligned}$$

Avec Φ_C le flux coupé défini par :

$$\Phi_C = dS.\overrightarrow{n}.\overrightarrow{B}$$

On obtient donc :

$$\omega = i\Phi_C$$

On montre que :

$$\Phi_C = \Delta\Phi$$

Avec Φ le flux propre du circuit, c'est à dire le flux qui traverse le circuit.

Energie d'interaction électromagnétique

On observe que le travail ne dépend que du point de départ et du point d'arrivé.
On peut mettre le $\Delta\Phi$ sous forme d'une différence d'energie potentiel :

$$W = E_{p1} - E_{p_2}$$

Avec $E_{pX} = -i.\Phi_X$. On obtient donc un principe d'évolution. Le circuit évolu dans le sens de la diminution de l'énergie potentiel, donc vers une augmentation du flux.

17.3.2 Dipole magnétique dans un champs magnétique uniforme

Mouvement de Translation

Propriété 19 *Considérons un dipole magnétique qui, sous l'action d'un champs magnétique uniforme, subit une translation $\overrightarrow{d\lambda}$.*
On obtient que :

$$\begin{aligned}\delta W &= i.d\Phi \\ &= i.(\Phi_2 - \Phi_1) \\ &= 0\end{aligned}$$

Avec les deux surfaces sont identiquement orienté et parcours par le meme courant, donc la variation de flux propre est nul. De plus, par définition, avec $\overrightarrow{R}$ la résultant de la force de Lorentz :

$$\delta W = \overrightarrow{R}.\overrightarrow{dl}$$

Donc la résultante de la force de Lorentz est nulle.

Mouvement de Rotation

Propriété 20 *De la même façon, mais cette fois ci en considérant un mouvement de rotation. Par définition :*

$$\delta\omega = id\Phi$$

Or par définition :

$$\begin{aligned}\Phi &= \overrightarrow{B}.\overrightarrow{n}.S \\ &= B.S.\cos(\alpha)\end{aligned}$$

Avec α l'angle entre $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{n}$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}\delta\omega &= -iBS\sin(\alpha)d\alpha \\ &= \mathcal{M}d\alpha\end{aligned}$$

Avec $\mathcal{M}$ le moment des forces. De plus :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathcal{M}} &= -iBS\sin(\alpha)\overrightarrow{u_z} \\ &= -BM\sin(\alpha)\overrightarrow{u_z} \text{ (Avec } M \text{ le moment magnétique)} \\ &= \overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{B}\end{aligned}$$

17.3.3 Dipole magnétique dans un champs magnétique non-uniforme

Propriété 21 *Nous avons :*

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{B}$$

Par définition :

$$d\overrightarrow{F} = i\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}$$

On obtient donc que la résultante de la force de Lorentz est donnée par :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{R} &= \oint_{\Gamma} d\overrightarrow{F} \\ &= \oint_{\Gamma} i\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}\end{aligned}$$

Déterminons la projection selon $\overrightarrow{u_x}$ de la résultante :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{R}.\overrightarrow{u_x} &= \oint i(\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B})\overrightarrow{u_x} \\ &= \oint i(\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{dl})\overrightarrow{B} \text{ (permutation circulaire)} \\ &= \oint i(\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{u_x})\overrightarrow{dl} \text{ (permutation circulaire)}\end{aligned}$$

Appliquons le théorème de Stockes :

$$\overrightarrow{R}.\overrightarrow{u_x} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{rot}(i(\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{u_x}))\overrightarrow{n}.dS$$

En développant en coordonnée cartésienne, et en utilisant le fait que :

$$div(\overrightarrow{B}) = 0$$

On montre que :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{u_x}) = \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial x}$$

On obtient donc que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{R}.\overrightarrow{u_x} &= \iint_{\Sigma} i.\overrightarrow{n}.dS \\ &= \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial x}.\overrightarrow{M}\end{aligned}$$

Avec $\overrightarrow{M}$ le moment magnétique. Si le mouvement n'est qu'un mouvement de translation, $\overrightarrow{M}$ est constant donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{R} &= \overrightarrow{M}\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial x} + \overrightarrow{M}\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial y} + \overrightarrow{M}\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial z} \\ &= \overrightarrow{grad}(\overrightarrow{M}.\overrightarrow{B})\end{aligned}$$

17.3.4 Analogie entre dipole magnétique et dipole électrique

Dipole magnétique

→ Moment magnétique : $\overrightarrow{M} = i.S.\overrightarrow{n}$
→ Energie potentiel : $E_p = -\overrightarrow{M}.\overrightarrow{B}$
→ Moment des forces : $\mathcal{M} = \overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{B}$
→ Résultante des forces : $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{grad}(\overrightarrow{M}.\overrightarrow{B})$

Dipole électrique

→ Moment dipolaire : $\overrightarrow{P} = q.\overrightarrow{AB}$
→ Energie potentiel : $E_p = -\overrightarrow{P}.\overrightarrow{E}$
→ Moment des forces : $\mathcal{M} = \overrightarrow{P} \wedge \overrightarrow{E}$
→ Résultante des forces : $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{grad}(\overrightarrow{P}.\overrightarrow{E})$

Chapitre 18

Induction Electromagnétique

18.1 Loi de Faraday

18.1.1 Expression de Faraday

Pour Faraday, une modification de la disposition des lignes de champs induit un courant

18.1.2 Déplacement d'un élément de circuit dans un champs permanent

Considérons un conducteur. Sous l'action d'un champs magnétique $\overrightarrow{B}$, le conducteur se déplace. Ceci donne donc à tous points du circuit une vitesse. Tous ces point sont donc soumis à la force de Lorentz magnétique :

$$\overrightarrow{f} = q.\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

Il se peut que cette force admette une composante sur son axe, ceci entraine donc un déplacement de charge, donc création d'un courant.
Considérons un circuit fermé contenant des charges mobiles. Faissons travailler la force de Lorentz :

$$\begin{aligned}\omega &= \oint \overrightarrow{f}.\overrightarrow{dl} \\ &= \oint q(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}).\overrightarrow{dl} \\ &= q \oint \overrightarrow{E_m}.\overrightarrow{dl}\end{aligned}$$

On peut introduire un champs électromoteur, dit de Newman :

$$\overrightarrow{E_m} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

Dans ce cas, tous se passe comme si le circuit n'était pas soumis à un champs $\overrightarrow{B}$, mais a un générateur de champs électromoteur, de champs le champs de Newman. Dans ce cas, on peut introduire une force électromotrice :

$$\begin{aligned}e &= \oint \overrightarrow{E_m}.\overrightarrow{dl} \\ &= V_1 - V_2 \\ &= \oint (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}).\overrightarrow{dl} \\ &= \oint -(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{dl}).\overrightarrow{B}\end{aligned}$$

En considérant un élément de circuit qui se déplace :

$$\overrightarrow{v}\,dt \wedge \overrightarrow{dl} = \overrightarrow{n}\,dS$$

On obtient donc que :

$$\begin{aligned} e &= -\iint \overrightarrow{B}.\overrightarrow{n}.\frac{dS}{dt} \\ &= -\frac{d\Phi_C}{dt} \end{aligned}$$

Avec Φ_c le flux coupé de $\overrightarrow{B}$

18.1.3 Enoncé

Généralisation

Il apparait un courant induit dès qu'il y a une variation du flux coupé de $\overrightarrow{B}$

Loi de Faraday

Considérons un cylindre. En écrivant que $\text{div}(\overrightarrow{E}) = 0$ et en développant cette expression, on obtient que

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Avec Φ le flux propre de $\overrightarrow{B}$

Propriété 22 *Quand on travaille avec le flux propre, on commence par orienté le circuit, donc définir $\overrightarrow{n}$. Le flux propre est donc défini.*
Si $e > 0$, alors le courant induit $i > 0$ (Dans le sens défini arbitrairement positif)

Loi de Lentz

Énoncé 17 *Le courant induit s'oppose à sa cause*

Forme locale de la loi de Faraday

D'après le loi de Faraday :

$$\begin{aligned} e &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt}\iint_{\Sigma} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{n}.dS \end{aligned}$$

Par définition :

$$e = \oint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl}$$

En utilisant le théorème de Stockes, on obtient que :

$$e = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}).\overrightarrow{n}.dS$$

En comparant avec la forme précédente, on obtient la forme locale du théorème de Gauss :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}) = \frac{-\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$$

Expression du champs

Nous avons div$(\overrightarrow{B}) = 0$, on obtient donc :

$$\exists \overrightarrow{A} \ tq \ \overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A})$$

En remplacant dans la forme locale de la loi de Faraday, on obtient que :

$$\overrightarrow{rot}(E + \frac{d\overrightarrow{A}}{dt}) = \overrightarrow{0}$$

On obtient donc :

$$\exists V \ tq \ \overrightarrow{E} + \frac{d\overrightarrow{A}}{dt} = -\overrightarrow{grad}(V)$$

D'ou :

$$\overrightarrow{E} = \frac{-\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad}(V)$$

On peut mettre ceci sous la forme :

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_m} + \overrightarrow{E_c}$$

Avec $\overrightarrow{E_m}$ le champs de Newman, qui provient de la variation du champs magnétique, et $\overrightarrow{E_c}$ le champs électrostatique dù aux charges présente.

18.1.4 Quantité d'électricité induit

Nous avons d'après la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} i &= \frac{e}{r} \\ &= \frac{-1}{r}\frac{d\Phi}{dt} \end{aligned}$$

Or :

$$dq = idt$$

D' ou :

$$\begin{aligned} q &= \int_{t_1}^{t_2} idt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{-1}{r}\frac{d\Phi}{dt}dt \\ &= \frac{\Phi(t_1) - \Phi(t_2)}{r} \end{aligned}$$

On observe donc que la charge est indépendente du temps. Elle ne dépend que du point de départ et du point d'arrivé. La charge est une fonction d'état.

18.2 Induction mutuelle de deux circuits

18.2.1 Coefficient d'induction mutuelle

Énoncé 18 *Considérons deux circuits. Déterminons le flux crée par le circuit 1 sur le circuit 2 :*

$$\Phi_{1\to 2} = \iint_{\Sigma_2} \overrightarrow{B_1}.\overrightarrow{n_2}.dS$$

De plus :

$$\overrightarrow{B_1} = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A_1})$$

En remplacant dans l'expression et en utilisant le théorème de Stockes, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\Phi_{1\to 2} &= \oint_{C_2} \overrightarrow{A_1}.\overrightarrow{dl_2} \\
&= \oint_{C_2}\oint_{C_1} \frac{\mu_0 i_1 \overrightarrow{dl_1}}{4\pi PM}\overrightarrow{dl_2} \\
&= M_{1\to 2} i_1
\end{aligned}$$

$M_{1\to 2}$ *est appelé coefficient d'induction mutuelle. On montre que :*

$$M_{1\to 2} = M_{2\to 1}$$

Cette propriété est utile car il est souvent plus simple de déterminer le flux dans un sens que dans l'autre.

18.2.2 Auto-induction

Considérons le flux propre du circuit 1 par rapport au champs $\overrightarrow{b}$ crée par 1 :

$$\Phi = \iint \overrightarrow{b}.\overrightarrow{n}.dS$$

On obtient que :

$$\Phi = L.i$$

L est appelé coefficiant d'auto induction. Pour détérminer L, on doit connaitre le champs crée en tout point.

Chapitre 19

Équations de Maxwell

19.1 Les quatres équations

19.1.1 Flux magnétique

L'équation de Maxwell du flux magnétique, est donnée par :

$$div(\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{0}$$

Ceci est la forme locale de l'équation. Nous avons aussi une forme intégrale, à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski :

$$\oiint_{\Sigma} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{n}.dS = 0$$

Avec Σ une surface fermé.

19.1.2 Équation de Maxwell-Faraday

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit, sous sa forme locale :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}) = \frac{-\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

En faisant circuler le champs électrique, on obtient que :

$$\begin{aligned} e &= \oint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} \\ &= \iint_{\Sigma} \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}).\overrightarrow{n}.dS \\ &= \iint_{\Sigma} -\frac{d\overrightarrow{B}}{dt}.\overrightarrow{n}.dS \\ &= \frac{-d\Phi}{dt} \end{aligned}$$

Ceci est l'expression globale. On remarque que les deux équations précédentes sont indépendante du milieu considéré.

19.1.3 Équation de Maxwell-Gauss

La forme locale est donnée par :

$$div(\overrightarrow{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

On en déduit la forme global, qui n'est d'autre que le théorème de Gauss :

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}.dS &= \iiint_V div(\overrightarrow{E})dV \\ &= \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}.dV \\ &= \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

19.1.4 Équation de Maxwell-Ampère

La forme locale de cette équation est donnée par :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B}) = \mu_0.\overrightarrow{j} + \varepsilon_0.\mu_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$$

On observe donc que cette forme locale est la forme locale du théorème d'Ampère, à laquelle on à ajouté une différentielle du champs éléctrique. Cette modification était obligatoire pour corriger des abérrations du théorème d'Ampère.

19.1.5 Explication de la modification

La forme locale du théorème d'Ampère ne suffit pas. Considérons un circuit en régime non permanent. D'après la forme locale du théorème d'Ampère, nous avons :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B}) = \mu_0.\overrightarrow{j}$$

Or nous savons que :

$$div(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B})) = 0$$

Ce qui équivaut à :

$$div(\overrightarrow{j}) = 0$$

Or d'après l'équation de conservation de la charge :

$$\begin{aligned}\frac{-d\rho}{dt} &= div(\overrightarrow{j}) \\ &= 0\end{aligned}$$

Or le circuit est en régime non permanent. C'est donc incohérent. Pour corriger ce défaut, on introduit un courant de déplacement, noté $\overrightarrow{j_s}$ de tel sorte que :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B}) = \mu_0(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{j_s})$$

De même, on obtient que :

$$\begin{aligned}div(\overrightarrow{j}) &= -\frac{d\rho}{dt} \\ &= -\varepsilon_0\frac{d}{dt}div(\overrightarrow{E})\end{aligned}$$

On obtient donc que :

$$\overrightarrow{j} = -\varepsilon_0\frac{d}{dt}\overrightarrow{E}$$

$$\begin{aligned}div(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B})) &= \mu_0(div(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{j_s})) \\ 0 &= div(\overrightarrow{j_s} - \varepsilon_0\frac{d}{dt}\overrightarrow{E})\end{aligned}$$

Maxwell à donc pris le cas le plus simple :

$$\overrightarrow{j_s} = \varepsilon_0\frac{d}{dt}\overrightarrow{E}$$

19.2 Propriétés des champs

19.2.1 Conditions limites

Du champs électrique

Discontinuité de la composante normale Considérons une surface de densité surfacique σ, séparant deux milieux (1) et (2). Nous avons :

$$div(\overrightarrow{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

D'ou :

$$\oiint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

D'ou

$$\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n_{1\to 2}}$$

Avec $\overrightarrow{E_k}$ le champs électrique crée dans le milieu k, en un point très prés de la surface de séparation.

Continuité de la composante tangentielle Nous avons :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

D'ou :

$$\begin{aligned}\oint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} &= \iint \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}).\overrightarrow{n}.dS \\ &= -\frac{d\Phi}{dt}\end{aligned}$$

D'ou :

$$\overrightarrow{E_2}.\overrightarrow{u_x}dx - \overrightarrow{E_1}.\overrightarrow{u_x}dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \overrightarrow{E}(x+dx).\overrightarrow{u_y}.dy - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \overrightarrow{E}(x).\overrightarrow{u_y}.dy = \frac{-d\Phi}{dt}$$

Si $\varepsilon \ll dx$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E_2}.\overrightarrow{u_x}dx - \overrightarrow{E_1}.\overrightarrow{u_x}dx &= -\frac{d\Phi}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt}(\overrightarrow{B}.\overrightarrow{u_z}dx2\varepsilon)\end{aligned}$$

Donc, quand $\varepsilon \to 0$:

$$\overrightarrow{E_2}.\overrightarrow{u_x}dx = \overrightarrow{E_1}.\overrightarrow{u_x}dx$$

Il y a donc continuité de la composante tangentielle

Champs magnétique

Considérons par exemple que $\overrightarrow{j_s} = j_s.\overrightarrow{u_x}$ Considérons un "cylindre élémentaire", parcouru par un vecteur densité de courant $\overrightarrow{j_s}$.

Continuité de la composante normale Nous avons :

$$div(\overrightarrow{B}) = 0$$

D'ou :

$$\oiint \overrightarrow{B}.\overrightarrow{n}.dS = 0$$

On obtient donc que : $(\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1})\overrightarrow{n_{1\to 2}} = 0$.

Discontinuité de la composante tangentielle Nous avons :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B}) = \mu_0.\overrightarrow{j} + \varepsilon_0.\mu_0.\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0.\overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{n_{1\to 2}}$$

On obtient donc :

$$\oint \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0 i + \varepsilon_0.\mu_0.\iint \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\overrightarrow{n}dS$$

D'ou :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1})\overrightarrow{u_x}dx &= \mu_0 j_s dx + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}dx2\varepsilon \\ &= \mu_0.j_s \text{ quand } \varepsilon \to 0\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0.\overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{n_{1\to 2}}$$

Avec $\overrightarrow{B_k}$ le champs magnétique crée dans le milieu k, en un point très prés de la surface de séparation.

19.2.2 Équations de propagation des champs

Champs électrique

En appliquant l'opérateur $\overrightarrow{rot}$ à $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E})$, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot})(\overrightarrow{E}) &= \overrightarrow{grad}(div(\overrightarrow{E})) - \overrightarrow{\Delta}(\overrightarrow{E}) \text{ (Voir analyse vectorielle)} \\ &= \overrightarrow{rot}(-\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}) \\ &= \frac{-\partial}{\partial t}\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B}) \\ &= -\mu_0\frac{\partial \overrightarrow{j}}{\partial t} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \overrightarrow{j}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

En considérant la première et la dernière ligne, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Delta}(\overrightarrow{E}) - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \overrightarrow{j}}{\partial t^2} &= \overrightarrow{grad}(div(\overrightarrow{E})) + \mu_0\frac{\partial \overrightarrow{j}}{\partial t} \\ &= \overrightarrow{grad}(\frac{\rho}{\varepsilon_0}) + \mu_0\frac{\partial \overrightarrow{j}}{\partial t}\end{aligned}$$

Champs magnétique

De la même façon pour le champs magnétique, on obtient que :

$$\overrightarrow{\Delta(\overrightarrow{B})} - \varepsilon_0.\mu_0.\frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2} = \mu_0.\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{j})$$

19.3 Potentiels

19.3.1 Définitions

Potentiel vecteur

En partant de la définition du potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$:

$$div(\overrightarrow{B}) = 0 \Rightarrow \exists \overrightarrow{A} \ tq \ \overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}(A)$$

On peut considérer deux potentiel vecteur associé à $\overrightarrow{B}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B} &= \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A}) \\ &= \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A'}) \end{aligned}$$

On obtient donc que :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{A'}) = 0$$

Nous l'avons vu, si un rot s'annule, nous pouvons l'exprimer à l'aide d'un gradiant :

$$\overrightarrow{A} - \overrightarrow{A'} = \overrightarrow{grad}(\gamma)$$

On obtient donc :

$$\overrightarrow{A'} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{grad}(\gamma)$$

On obtient donc une expression pour un autre potentiel vecteur à partir de $\overrightarrow{A}$.

Potentiel scalaire V

Nous avons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}) &= -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A}) \end{aligned}$$

On obtient donc que :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E} + \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}) = 0$$

De même que précédement, un rotationel nul peut s'exprimer au moyen d'un gradiant :

$$\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad}(V)$$

On obtient donc l'expression connu dans le cas statique.
De même que pour le potentiel vecteur, on montre que :

$$V' = V - \frac{\partial \Phi}{\partial t} + cte$$

Φ est donc le lien entre $\overrightarrow{A}$ et V. On ne peut pas fixer arbitrairement $\overrightarrow{A}$ et V, ces deux potentiels sont liée.

19.3.2 Conditions de Jauge

Équations verifié par le potentiel vecteur et V

On montre que ces deux potentiels doivent vérifier les relations suivantes :

$$\overrightarrow{\Delta(\overrightarrow{A})} - \varepsilon_0.\mu_0.\frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial t^2} = \mu_0.\overrightarrow{j} + \overrightarrow{grad}(div(\overrightarrow{A}) + \varepsilon_0.\mu_0.\frac{\partial V}{\partial t})$$

Jauge de Coulomb

La jauge de Coulomb est de poser que :

$$div(\overrightarrow{A}) = 0$$

L'équation précédente devient donc :

$$\overrightarrow{\Delta(\overrightarrow{A})} - \varepsilon_0.\mu_0.\frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial t^2} = \mu_0.\overrightarrow{j} + \varepsilon_0.\mu_0.\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{grad}(V)$$

Jauge de Lorentz

La jauge de Lorentz est de poser que :

$$div(\overrightarrow{A}) + \varepsilon_0.\mu_0.\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

À l'aide des ces jauges, on obtient donc deux équations :

$$\overrightarrow{\Delta(\overrightarrow{A})} + \epsilon_0.\mu_0.\frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial t^2} = -\mu_0.\overrightarrow{j}$$

$$\Delta(V) + \epsilon_0.\mu_0.\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Chapitre 20

Énergie Electrostatique

20.1 Énergie d'une charge dans un champs électrique exterieur

Soit M(q) une charge. Elle subit de la part des autres charges une force électrique $\overrightarrow{f}$. Déterminons le travail de cette force :

$$\begin{aligned}\omega &= \int_A^B \overrightarrow{f}.\overrightarrow{dl} \\ &= -q\int_A^B -\overrightarrow{grad}(V).\overrightarrow{dl} \\ &= q(V_A - V_B)\end{aligned}$$

Or par définition :

$$\omega = -d(Ep)$$

On peut écrire l'énergie potentielle d'interaction de la charge q avec le champ exterieur sous la forme :

$$E_p = q.dV(M)$$

Avec V(M) le potentiel crée par les charges exterieurs.

20.2 Énergie électrique d'un système de charges fixes

20.2.1 Cas de deux charges

Soit A(q_A) et B(q_B) deux charges. La première exerce sur la seconde une force donnée par (force de Coulomb) :

$$\overrightarrow{f}_{A\to B} = \frac{q_a q_b}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{AB}}{AB^3}$$

Et d'après le principe de réaction de Newton :

$$\overrightarrow{f}_{A\to B} = -\overrightarrow{f}_{A\to B}$$

Lorsque les charges se déplace respectivement de A à A' et de B à B', on obtient que :

$$\begin{aligned}
d\omega &= \frac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{AB}}{AB^3}(BB' - AA') \\
&= \frac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{AB}}{AB^3}d\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr_{AB}}{r_{AB}^2} \quad (r_{AB} = \| \overrightarrow{AB} \| \\
&= -d\left(\frac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{AB}}\right)
\end{aligned}$$

On peut donc écrire l'énergie potentielle de deux charges sous la forme :

$$E_p = \frac{q_A.q_B}{4\pi\varepsilon_0.r_{ab}}$$

20.2.2 Cas d'un ensemble de N charges

Considérons le cas de n charges. L'energie potentielle de la charge (i) avec toutes les autres est donnée par la somme de l'énergie précédent. On peut écrire l'énergie potentielle sous la forme :

$$\begin{aligned}
E_p &= \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\frac{q_i q_j}{4_p i\varepsilon_0 r_{ij}} \\
&= \frac{1}{2}\sum_i q_i \sum_j \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{ij}} \\
&= \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i
\end{aligned}$$

En notant V_i le potentiel électrostatique crée par les charges autres que i au point M_i, occupé par la charge q_i.

20.2.3 Généralisation

On peut généraliser ceci à une distribution continue de charges, en écrivant l'énergie potentielle d'interaction sous la forme :

$$E_p = \frac{1}{2}.\iiint \rho.V.d\tau$$

Avec $d\tau$ un élément de volume et et V le potentiel.

20.2.4 Cas particulier

Conducteur seul dans l'espace

Dans le cas d'un conducteur seul dans l'espace, on obtient que :

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}QV \\
&= \frac{1}{2}CV^2
\end{aligned}$$

Energie d'un dipole dans un champs exterieur

Nous avons :

$$\begin{aligned}
E &= q[V_A - V_B] \\
&= q\overrightarrow{grad}(V).\overrightarrow{AB} \\
&= -\overrightarrow{P}.\overrightarrow{E}
\end{aligned}$$

20.3 Densité d'énergie électrostatique

L'énergie d'une distribution de charge est donnée par, dans le cas continue :

$$E = \iiint \rho V d\tau$$

D'après la forme locale du théorème de Gauss :

$$div(\overrightarrow{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

On peut donc écrire :

$$E = \iiint \varepsilon_0 div(\overrightarrow{E}) V d\tau$$

En effectuant de l'analyse vectorielle, on obtient qu'il existe une densité volumique d'énergie :

$$\frac{1}{2}.\varepsilon_0.E^2$$

20.4 Énergie Magnétique et Électromagnétique

20.4.1 Densité volumique d'énergie magnétique

De façon analogue à précédement, on montre que :

$$E = \iiint \frac{B^2}{2.\mu_0} dv$$

On montre bien que l'énergie est réparti de façon uniforme dans tout l'espace, avec un densité volumique de :

$$\frac{B^2}{2.\mu_0}$$

20.4.2 Bilan d'énergie dans un volume élémentaire

On postule l'existence d'une densité volumique d'énergie u telle que l'énergie électromagnétique d'un système puisse s'écrire :

$$\overrightarrow{E} = \iiint \overrightarrow{u}.dv$$

De même, on postule qu'il existe un vecteur densité de flux de puissance, noté Π, telque :

$$\overrightarrow{P} = \iint \Pi.\overrightarrow{n}.dS$$

On montre que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + div(\overrightarrow{\Pi}) + \overrightarrow{J}.\overrightarrow{E} = 0$$

Ceci constitue le bilan d'énergie dans un volume élémentaire.

20.4.3 Vecteur de Poynting

On montre que $\overrightarrow{\Pi}$, appelé vecteur de Poynting, a pour expression :

$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0}$$

On montre que ce vecteur donne la direction dans lequel se transfert l'énergie.

20.5 L'essentiel

Nous devons retenir les choses suivantes :

20.5.1 Équation de Maxwell

$\rightarrow\ div(\overrightarrow{B}) = 0$
$\rightarrow\ \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}) = \dfrac{-\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$
$\rightarrow\ div(\overrightarrow{E}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$
$\rightarrow\ \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B}) = \mu_0.\overrightarrow{j} + \varepsilon_0.\mu_0.\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$

20.5.2 Force de Lorentz

Une charge q plongé dans un champs $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$ subit la force suivante :

$$\overrightarrow{f} = q.(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

20.5.3 Autres expressions

Les deux relations suivantes :
$\rightarrow\ u = \dfrac{\varepsilon_0.E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2.\mu_0}$ (u = densité volumique d'énergie)
$\rightarrow\ \overrightarrow{\Pi} = \dfrac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0}$
Avec toutes ces expressions, on redémontre l'ensemble des lois de l'électromagnétisme

Chapitre 21

Régime quasi-stationnaire

21.1 Approximation des régimes quasi-stationnaire

21.1.1 Définitions

Nous avons les relations suivantes :

$\rightarrow\ \Delta(V) - \frac{1}{c^2}.\frac{\delta^2 V}{\delta t^2} = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$

$\rightarrow\ \overrightarrow{\Delta(\overrightarrow{A})} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial t^2} = -\mu_0.\overrightarrow{j}$

On montre que l'on peut faire l'approximation des régimes quasi-stationnaires si :

$$d \ll c.\tau$$

Avec d une distance caratéristique et τ un temps caractéristique.

21.1.2 Approximation du régime quasi-stationnaire électrique

On a :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$$

On fait l'approximation du régime quasi-stationnaire électrique si :

$$\parallel \overrightarrow{j} \parallel \ll \rho.c$$

Dans ce cas, on peut écrire :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$$

Ceci modifie les équations de Maxwell, car on obtient :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{0}$$

21.1.3 Approximation du régime quasi-stationnaire magnétique

On a :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B}) = \mu_0.\overrightarrow{j} + \varepsilon_0.\mu_0.\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

On fait l'approximation du régime quasi-stationnaire magnétique, si :

$$\parallel \varepsilon_0.\mu_0.\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \parallel \ll \parallel \overrightarrow{j} \parallel$$

Dans ce cas, on obtient donc que :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B}) = \mu_0 . \overrightarrow{j}$$

21.2 Cas des conducteurs ohmique

21.2.1 Loi d'ohm

Un conducteur vérifie la loi d'ohm si :

$$\overrightarrow{j} = \gamma . \overrightarrow{E}$$

$$\overrightarrow{j} = \rho_m . < \overrightarrow{v} >$$

Avec $< \overrightarrow{v} >$ la valeur moyenne de la vitesse et ρ_m la densité de charge mobile.

21.2.2 Densité volumique de charge

La conservation de la charge est donnée par la relation :

$$div(\overrightarrow{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

On montre que la densité de charge peut se mettre sous la forme :

$$\rho = \rho_0 . e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon_0} . t}$$

On montre que la densité de charge devient nul en un temps extremement court, de l'ordre de 10^{-11} pour le cuivre par exemple.

21.2.3 Cas du régime sinusoïdale

Dans le cas sinosoïdale, on montre qu'on peut considérer qu'on est en régime quasi stationnaire si :

$$f \ll \frac{1}{2.\Pi.\tau}$$

21.2.4 Interface conducteur-vide

Densité de courant

Dans le cas d'un fil, dans un régime statique, le vecteur densité $\overrightarrow{j}$ à la surface du fil est tangent, car autrement, il y aurait accumulation de charge.
Dans le cas du régime variable, on montre que $\overrightarrow{j}$ n'est pas forcement tangent à la surface.

21.2.5 Cas du conducteur parfait

Définitions

On dit d'un conducteur qu'il est parfait si :

$$\gamma \rightarrow +\infty$$

Avec :

$$\overrightarrow{j} = \gamma . \overrightarrow{E}$$

Champs électrique à l'interieur du conducteur

On montre que dans un conducteur, le courant passe à la surface. Ceci est appelé effet de peau

Sixième partie

Onde Electromagnétique

Chapitre 22

Ondes électromagnétique

22.1 Solution des équations de propagations

22.1.1 Équation de propagation

D'après les quatres équations de Maxwell, nous pouvons obtenir des équations de propagations. Par exemple, pour l'équation de propagation du champs électrique $\overrightarrow{E}$, nous faisons :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}))$$

Qui, d'après les équations de Maxwell donne :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E})) = \overrightarrow{rot}(-\frac{d\overrightarrow{B}}{dt})$$

En développant à l'aide de l'analyse vectorielle, et en se placant dans le vide, c'est à dire avec :

$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \overrightarrow{j} = 0 \end{cases}$$

On obtient l'équation de propagation : $\overrightarrow{\Delta \overrightarrow{E}} - \varepsilon_0.\mu_0.\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = 0$ On obtient de même pour $\overrightarrow{B}$

22.1.2 Ondes planes

Définition 55 *Une onde plane est une solution de l'équation de propagation qui ne dépend que d'une variable d'espace en coordonnée cartésienne.*

Par exemple (ceci reste valable dans toute cette fiche), soit f une onde plane ne dépendant que de x et de t :

$$f(x,t)$$

L'équation de propagation devient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

En posant α et β défini par :

$$\alpha = x - ct$$

$$\beta = x + ct$$

Et en développant, on obtient que la solution général est une combinaison linéaire de deux ondes progressive (c'est à dire qui translate le motif), qui progresse dans des sens opposés

22.1.3 Onde sphérique

Définition 56 *En coordonnée sphérique, une onde sphérique est une solution de l'équation de propagation qui ne dépend que de r et t.*

En développant de façon analogue à précédement, mais cette fois en utilisant le changement de variable y=rf, on obtient que cette solution est une onde progression atténué en $\frac{1}{r}$.

22.2 Onde électromagnétique plane progressive

Définition 57 *Une onde plane progressive, f, est définie par :*
→ *Plane : f(x,t)*
→ *Progresssive : f(x-ct), c'est à dire que :* $x_2 - x_1 = c.(t_2 - t_1)$

22.2.1 Les champs E et B sont transverse

Nous avons : En utilisant les divergences de ces champs, on montre respectivement que :

$$\overrightarrow{E} \perp \overrightarrow{u_x}$$

$$\overrightarrow{B} \perp \overrightarrow{u_x}$$

22.2.2 Les champs sont orthogonaux

En partant de l'expression du rotationel de $\overrightarrow{E}$, on montre que :

$$\overrightarrow{B} \perp \overrightarrow{E}$$

En se placant dans l'hypothèse d'une onde plane progressive.
On montre plus particulièrement que :

$$\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{E}}{c}$$

22.2.3 Force exercée sur une particule chargée par l'onde

La force exercée est la force de Lorentz :

$$\begin{cases} \overrightarrow{f} & = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}) \\ & = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \left(\frac{\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{E}}{c}\right) \end{cases}$$

On obtient que dans le cadre de le mécanique classique, c'est à dire pour des vitesse négligable devant la vitesse de la lumière, la force de Lorentz se ramène dans ce cas à :

$$\overrightarrow{f} \backsimeq q.\overrightarrow{E}$$

22.2.4 Vecteur de Poynting

Nous avons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\pi} &= \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0} \\ &= \frac{\overrightarrow{E} \wedge (\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{E})}{c.\mu_0} \\ &= \frac{E^2}{c\mu_0}\overrightarrow{u_x} \end{aligned}$$

Nous avons défini précédement la densité volumique d'espace :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \\ &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{E^2}{c^2.2\mu_0} \\ &= \varepsilon_0 E^2 \text{ (car } \mu_0.\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}) \end{aligned}$$

On obtient donc que :

$$\overrightarrow{\pi} = c.u.\overrightarrow{u_x}$$

On obtient donc que l'énergie se progage selon l'axe de propagation.
Par définition :

$$\begin{aligned} P &= \overrightarrow{\pi}\overrightarrow{u_x}dS \\ &= cudS \\ &= \frac{dE}{dt} \end{aligned}$$

Avec E l'énergie. On obtient donc que :

$$dE = ucdtdS$$

L'énergie se propage donc à la vitesse de la lumière.

22.3 Onde plane progressive monochromatique

Définition 58 *On dit que f est une onde monochromatique si l'on peut l'écrire sous la forme :*

$$f = A.cos(k(x - ct))$$

22.3.1 Propriétés

Celle d'une onde progressive

Cette onde possède toutes les propriétés énoncé précédement, de part son caratère progressive :

$$\begin{cases} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{u_x} = 0 \\ \overrightarrow{B}.\overrightarrow{u_x} = 0 \\ \\ \overrightarrow{B} = \dfrac{\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{E}}{c} \\ \overrightarrow{\pi} = cu\overrightarrow{u_x} \\ u = \varepsilon_0 E^2 \end{cases}$$

Double periodicité

Posons :

$$kc = \omega$$

De ce fait, on peut écrire f sous la forme :

$$f = A.cos(k.x - \omega.t)$$

En fixant t, on montre que la fonction est periodique par rapport à x, on défini sa période λ, periode spatial, par :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

De même, en fixant x, on montre que la fonction est periodique par rapport à t, on défini sa période T, période temporel, par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

On peut donc écrire f sous la forme suivante, qui fait apparaitre la double periodicité :

$$f = A.cos(2\pi.(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}))$$

Vecteur d'onde

Définition 59 *On appelle vecteur d'onde :*

$$\overrightarrow{k} = k.\overrightarrow{u_x}$$

avec k nombres d'onde.

$$f = A.cos(\overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM} - \omega.t)$$

22.3.2 Polarisation

Représentation complexe des champs

On peut écrire le champs électrique par exemple sous la forme :

$$\overrightarrow{E} = Re(\underline{\overrightarrow{E}}.e^{i(\omega.t-k.x)})$$

On peut aussi l'écrire sous la forme :

$$\overrightarrow{E} = E_{oy}.\overrightarrow{u_y} + E_{oz}.e^{i\varphi}\overrightarrow{u_z}$$

Onde polarisée rectilignement

Cette onde est polarisée rectiligement si $\varphi = 0$. Dans ce cas, l'onde décrit une droite en vibrant.

Onde polarisée elliptiquement

Si $\varphi \neq 0$, alors l'onde décrit en vibrant un éllipse.

Chapitre 23

Propagation d'une onde plane électromagnétique progressive monochromatique dans un milieu matériel

23.1 Plasma

23.1.1 Position du problème

Définition 60 *Un plasma est un milieu totalement ionisé. On considère cet état comme le quatrième état de la matière. C'est un milieu électriquement neutre. Posons n_0 le nombre d'électron par unité de volume. C'est donc un milieu qui répond aux équations suivantes, en considérons une onde plane monochromatique :*

$$\begin{cases} \overrightarrow{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_y} \\ div(\overrightarrow{B}) = 0 \ \textit{(condition toujours vérifié)} \\ div(\overrightarrow{E}) = 0 \ \textit{(absence de charge)} \\ \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}) = -\dfrac{-\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{B}) = \mu_0 \overrightarrow{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \end{cases}$$

23.1.2 Expression de j

Considérons un électron du plasma. Cette électron est soumis à la force de Lorentz. D'ou, par application du P.F.D :

$$m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -e\overrightarrow{E}$$

De plus, nous connaisons l'expression de $\overrightarrow{E}$. D'ou :

$$m\frac{d\overrightarrow{\underline{v}}}{dt} = -eE_0\overrightarrow{u_y}e^{i(\omega t - kx)}$$

D'ou :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\underline{v}} &= -\frac{-eE_0}{i\omega m}e^{i(\omega t - kx)}\overrightarrow{u_y} \\ &= -\frac{ie\overrightarrow{E}}{m\omega} \end{aligned}$$

D'ou :

$$\begin{aligned}\underline{\overrightarrow{j}} &= -en_0 < \overrightarrow{v} > \\ &= -\frac{ie^2 n_0}{m_e \omega}\overrightarrow{E}\end{aligned}$$

Avec
→ n_0 : Nombre d'électrons par unité de volume
→ m_e : Masse de l'électron
→ ω : Pulsation du champs électrique
On ne considère que la masse de l'électron car la partie de $\underline{\overrightarrow{j}}$ du au cation est négligable par rapport à celle dù aux électrons.

23.1.3 Équation de Maxwell

(En utilisant les équations de Maxwell liant $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$, c'est à dire les rotationnels, on obtient l'expression suivante pour le nombre d'onde :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}$$

Avec :

$$\omega_c^2 = \frac{\mu_0.n_0.c^2.e^2}{m_e}$$

ω_c est appelé pulsation de coupure. On défini aussi la fréquence de coupure par :

$$f_c = \frac{w_c}{2.\pi} = \frac{1}{2.\pi}\frac{\sqrt{\mu_0.n_0.e^2.c^2}}{m_e}$$

On obtient une fréquence de coupure de l'ordre du Mhz

23.1.4 Étude des diverses solutions

Si $\omega > \omega_c$

Dans ce cas, nous avons :

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c}$$

En utilisant l'expression du rotationnel de $\overrightarrow{E}$, on obtient que :

$$\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{E}}{\frac{\omega}{k}}$$

On obtient dans ce cas une expression de $\overrightarrow{B}$ proche de celle déterminé dans le chapitre précédent, sauf que la vitesse est n'est pas la vitesse de la lumière, mais la vitesse de phase, que nous définir plus tard.
On obtient que l'expression du champs dans le plasma est donnée par :

$$\overrightarrow{E} = E_0.e^{\frac{-x}{\delta}}.cos(\omega.t)\overrightarrow{u_y}$$

avec :

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}$$

Si $\omega_c > \omega_c$

Dans ce cas, on obtient pour le nombre d'onde :

$$k = \pm i \frac{\sqrt{\omega_c - \omega}}{c}$$

En développant, on obtient que l'onde ne rentre pas dans le plasma, mais qu'elle est totalement réflechi. Comme application de celà, nous avons par exemple le fait que les ondes FM sont des ondes de courtes portées (de l'ordre du MHz), car elles ne se réfléchissent pas dans la ionosphère (qui est assimilable à un plasma), alors que les ondes longues (de l'ordre du KHz) s'il réflechissent, ce qui permet une plus grande propagation.

23.2 Vitesse de phase - Vitesse de groupe

23.2.1 Vitesse de phase

On considère le cas ou :

$$\omega > \omega_c$$

Nous avons :

$$\overrightarrow{E} = E_0.cos(\omega(t - \frac{x}{(\frac{\omega}{k})}))\overrightarrow{u_y}$$

On obtient donc que l'onde se propage à la vitesse $\frac{\omega}{k}$. Cette vitesse est appelé vitesse de phases. En développant, on obtient que :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$$

On obtient donc que :

$$v_\varphi > c$$

Ceci semble surprenant car la relativité restreint montre qu'aucun objet ou énergie ne peut se déplacer plus rapidement que la vitesse. Cependant, la vitesse de phase ne rentre pas dans ces catégorie car c'est la vitesse de déplacement d'un champs, et non d'une énergie. Cependant, nous ne pouvons pas mettre en évidance ce champs car il est dépourvu d'énergie. Car nous allons le voir, l'énergie se déplace à une vitesse inferieur à la vitesse de la lumière, se qui est en accord avec la relativité restreinte d'Einstein.

23.2.2 Vitesse de groupe

En développant le vecteur de Poyting, on montre que l'énergie se déplace à une vitesse v_g appelé vitesse de groupe. Nous avons :

$$v_g < c$$

23.2.3 Vitesse de deplacement d'un signal

Pour déterminer la vitesse de déplacement d'un signal, considérons une solution de l'équation de propagation non monochromatique, c'est a dire que la signal ne possède pas une fréquence, mais un spectre très réduit centré autour de cette fréquence ω_0. On écrit cette solution sous la forme :

$$\underline{f(x,t)} = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(\omega).e^{i(\omega.t - k.x)} d\omega$$

On montre que k n'est plus égal à $f(\omega)$, mais on peut éffectuer un développement limité de k :

$$k \backsimeq k_0 + (\omega - \omega_0)\frac{\partial k}{\partial \omega}_{\omega_0}$$

On obtient d'après l'expression de la solution que f est un produit que l'intégrale d'une onde se déplacement avec la vitesse de phases et d'une intégrale d'une onde qui se déplace à la vitesse de groupe.
Considérons le cas ou :

$$w > w_c$$

On montre que si :

$$\frac{\omega}{k} = c$$

Alors l'onde rentre totalement dans le milieu. Sinon, il y a une partie de l'onde qui est réfléchi. En utilisant les relations de continuité de l'énergie, on obtient les relation suivante :

$$E_0' = \frac{2.E_{0i}}{1 + \frac{c}{v_\phi}}$$

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)^2 = \left(\frac{\frac{c}{v_\varphi} - 1}{\frac{c}{v_\varphi} + 1}\right)^2$$

Avec :
→ E_0' l'énergie de l'onde qui rentre dans le plasma
→ E_{0r} l'énergie de l'onde réflechie
→ E_{0i} l'énergie de l'onde incidente
On observe bien les considérations de réflections selon la valeur de ω.

23.3 Conducteur ohmique

Considérons une onde incidente qui rentre dans un conducteur ohmique. L'onde initiale est caractérisé par :

$$\overrightarrow{E} = E_0.cos(\omega.t - kx)\overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{B} = \frac{E_0.i}{c} cos(\omega t - kx).\overrightarrow{u_z}$$

Nous rechercherons une solution de la forme :

$$\overrightarrow{E}(x,t) = Re[\underline{E}(x)e^{i\omega t}]\overrightarrow{u_y}$$

Pour l'onde dans le milieu conducteur.

23.3.1 Approximation des régimes quasi-stationnaire

A l'aide des équations de Maxwell, on montre que l'on peut faire cette approxiation, c'est à dire considérer que :

$$\rho = 0$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = 0$$

Dans les équations de Maxwell si :

$$\varepsilon_0.\omega \ll \gamma$$

23.3.2 Expression du champs électrique

En utilisant les équations de Maxwell, on montre que :

$$\overrightarrow{E} = E_0.e^{\frac{-x}{\delta}} cos(\omega.t - \frac{x}{\omega})\overrightarrow{u_y}$$

De la même façon, on obtient l'expression du champs magnétique :

$$\overrightarrow{B} = \frac{E_0.e^{\frac{-x}{\delta}}.\sqrt{2}}{2.\delta.\omega}.cos(\omega.t - \frac{\pi}{4})$$

23.3.3 Puissance absorbée par une tranche de conducteur

Considérons une tranche de conducteur, c'est à dire une longeur finie en y et en z, noté a et b, et infinie en x. On obtient :

$$< P >= \frac{E_{Ot}^2.ab}{2.\sqrt{2}}.\sqrt{\frac{\gamma}{\omega.\mu_0}}$$

On peut obtenir cette expression directement ou à l'aide du vecteur de Poynting.

23.3.4 Onde transmise - Onde réfléchie

À l'aide de relation de continuité de l'énergie, et à l'aide de relation sur les champs, on obtient que l'onde est intégralement transmise si :

$$\omega = \frac{c^2.\mu_0.\gamma}{4\pi}$$

On obtient des fréquence de l'ordre de 10^{17}, c'est à dire une longeur d'onde dans le vide de l'ordre du nanomètre. Si cette condition n'est pas rempli, c'est à dire si on travaille avec des fréquences inferieur, alors on obtient une onde réfléchi. Les caractéristiques de cette onde réflechi sont donnée par :

$$\frac{E_{Or}}{E_{0i}} = \frac{1 - \frac{c}{\omega.\delta}}{1 + \frac{c}{\omega.\delta}}$$

Pour des fréquences de l'ordre du kHz, ce rapport est $\backsimeq 1$, on obtient donc que le conducteur se comporte comme un mirroir.

Chapitre 24

Ondes électromagnétiques "confinées" avec conditions aux limites

24.1 Réflexion d'une onde plane progressive monochromatique sur un plan conducteur parfait

Définition 61 *On considère qu'un conduteur est parfait quand :*

$$\gamma \to +\infty$$

Ce qui revient donc à :

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$$

24.1.1 Réflexion normale

Considérons un champs électrique et un champs magnétique de la forme :

$$\overrightarrow{E_i} = E_{0i} cos(\omega.t - kx)\overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{B_i} = \frac{E_{0i}}{c}.cos(\omega.t - kx)\overrightarrow{u_z}$$

Onde réflechie

On obtient une onde réfléchi, avec un coefficiant de réflexion -1, c'est à dire que :

$$\frac{E_{Or}}{E_{0i}} = -1$$

Il n'y a donc pas d'onde transmise. On obtient donc comme expression pour les champs réfléchis :

$$\overrightarrow{E_r} = -E_{oi} cos(\omega.t + kx)\overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{B_r} = \frac{-\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{E_r}}{c} = \frac{E_{oi}}{c}.cos(\omega.t + kx)\overrightarrow{u_z}$$

On obtient donc des ondes planes progressive, mais de sens opposé.

Onde stationnaire

En étudiant maintenant le champs électrique totale, et le champs magnétique totale, c'est à dire :

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_i} + \overrightarrow{E_r}$$
$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B_i} + \overrightarrow{B_r}$$

On obtient que ces champs ne sont pas des ondes progressives :

$$\overrightarrow{E} = 2.E_{Oi}.sin(kx)sin(\omega.t).\overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{B} = \frac{2.E_{Oi}}{c}.cos(kx).cos(\omega.t)\overrightarrow{u_z}$$

On obtient que ces champs s'annule periodiquement selon x. On obtient donc, par analogie avec les cordes vibrante, des ventres et des noeuds. Le champs vibre donc sur place.

Énergie transporté

En calculant le vecteur de Poyting, on obtient que :

$$< \overrightarrow{\pi} >= 0$$

Sur une periode, il n'y a donc pas de transporte d'énergie.

Interface

En considérant les rélations de discontinuité des champs a la frontière, on obtient qu'en $x = 0^-$, les charges oscille, avec :

$$\overrightarrow{j_s} = \frac{2.E_{Oi}}{\mu_0.c}.cos(\omega.t)\overrightarrow{u_y}$$

On obtient donc que les charges oscille à la surface du conducteur

Phénomène de résonnance

Considérons deux conducteurs parralèle séparé par une distance L. Il faut que L vérifie, pour pouvoir observé un phénomène de résonnance, la relation suivante :

$$L = p.\frac{\lambda}{2}$$

24.1.2 Réflexion oblique

Considérons une onde arrivant oblique par rapport à l'axe Ox, formant l'angle i avec cette axe. Elle se réflechie sur le conducteur parfait. Nous avons :

$$\overrightarrow{E_i} = E_{Oi}.cos(\omega.t - \overrightarrow{k_i}.\overrightarrow{OM})\overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{B_i} = \frac{\overrightarrow{k_i}}{k} \wedge \frac{\overrightarrow{E_i}}{c}$$

Avec :

$$\overrightarrow{k_i} = k.(cos(i).\overrightarrow{u_x} + sin(i).\overrightarrow{u_y})$$
$$\overrightarrow{k_r} = k.(-cos(i).\overrightarrow{u_x} + sin(i).\overrightarrow{u_y})$$

On obtient donc par continuité, c'est à dire sachant que le champs en nul en x=0, que :

$$\overrightarrow{E_r} = -E_{Oi}.cos(\omega.t - \overrightarrow{k_r} \wedge \overrightarrow{OM})\overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{B_r} = \frac{\overrightarrow{k_r}}{k} \wedge \frac{\overrightarrow{E_r}}{c}$$

En développant, a l'aide des équations de Maxwell, on obtient les expressions des champs totaux $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$.

24.2 Propagation guidée entre deux plans parallèle

Considérons deux plans parallèle, l'un défini par x=0, l'autre par x=a. Par discontinuité des champs, nous avons les relations de passage suivante en 0 :

$$\overrightarrow{E}_{x=0^+} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\overrightarrow{u_x}$$

$$\overrightarrow{B}_{x=0^+} = \mu_0.\overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{u_x}$$

Nous allons rechercher des solutions de la forme :

$$\overrightarrow{E} = Re[\underline{\overrightarrow{E}}](x,y).e^{i(\omega.t-k.z)}$$

On recherche donc des solutions qui se propage selon l'axe des z.

24.2.1 Champs électrique transverse normale aux plaques

On recherche un champs électrique porté par $\overrightarrow{u_x}$. En utilisant les équations de Maxwell, on montre que si :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Alors :

$$E(x,y) = E_0$$

est une solutions du problème.

24.2.2 Champs électrique parallèle aux plaques

On recherche un champs électrique cette fois ci porté par $\overrightarrow{u_y}$.

Équation de propagation

À l'aide de l'équation de propagation, on montre que le champs vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2} = (k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}).E(x)$$

On observe donc que le type de solution dépend du signe de :

$$(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})$$

Conditions aux limites

Les conditions aux limites nous disent que E(x) s'annule deux fois en 0 et en a. Le cas hyperbolique est donc impossible dans la résolution de l'équation différentielle, on obtient donc une solution sinusoïdale :

$$\overrightarrow{E} = E_0.sin(\frac{n.\pi.x}{a}.cos(\omega.t - kx)).\overrightarrow{u_y}$$

Relation de dispersion

D'après l'équation différentielle et les conditions aux limites, nous savons que :

$$\frac{n.\pi}{a} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}$$

Ceci implique donc que :

$$f \geq \frac{n.c}{2.a}$$

Le choix de n n'est donc pas totalement libre.
De plus, d'après l'expression de la vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}$$

On obtient que cette vitesse dépend de la fréquence.

Vitesse de groupe

En développant l'expression de l'énergie, on montre qu'elle se déplace à une vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{c^2}{v_\varphi}$$

Asymptotiquement en fréquence, on obtient donc que la vitesse de groupe et la vitesse de phases tendent vers c.

24.2.3 Interprétation en termesde superposition d'onde plane

On peut interpréter :

$$\overrightarrow{E} = E_0.sin(\frac{n.\pi.x}{a}.cos(\omega.t - kx)).\overrightarrow{u_y}$$

Qui n'est pas une onde plane, comme la superposition de deux ondes planes. On obtient cette décomposition à l'aide d'un changement de variable :

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{2}.E_0[cos(\omega.t - \overrightarrow{k_1}.\overrightarrow{OM}) - cos(\omega.t - \overrightarrow{k_2}.\overrightarrow{OM})]$$

On obtient donc que ça peut être interprété comme la superposition de deux ondes planes. En développant les expression de $\overrightarrow{k_1}$ et de $\overrightarrow{k_2}$, on reconnait la figure d'onde réfléchi, et en calculant le module de ces vecteurs, on obtient que l'onde se propage à la vitesse de la lumière.

Septième partie

Mécanique

Chapitre 25

Mécanique du solide

25.1 Lois de la mécanique d'un système materiel

25.1.1 Modélisation d'un système matériel

On peut modifier un système materiel de deux façons :
→ Approche discrète : $m_t = \sum m_i$
→ Approche continue : $m_t = \iiint \rho.dV$
Dans la suite de l'exposé, on utilise la notation discrète, mais la notation continue est totalement utilisable.

25.1.2 Théorème du centre d'inertie (ou de la résultante cinétique)

Quantité de mouvement d'un système

Définition 62 *On appelle quantité de mouvement d'un système, notée $\overrightarrow{p}$:*

$$\overrightarrow{p} = \sum m_i.\overrightarrow{v_i}$$

En introduisant le barycentre, ou centre de masse, noté G :

$$m_t.\overrightarrow{OG} = \sum m_i.\overrightarrow{OM_i}$$

On obtient que :

$$\overrightarrow{p} = m_t.\overrightarrow{V_G}$$

Théorème 4 *Par application de la seconde loi de Newton, on obtient que :*

$$\frac{d\overrightarrow{P}}{dt} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$$

Ceci constitue le théorème du centre d'inertie

25.1.3 Référentiel Barycentrique

Définition 63 *Un référentiel barycentrique est un référentiel qui a pour origine le centre des masses du système, et qui est en translation uniforme par rapport à un référentiel galiléen.*

Définition 64 *On note X^* la grandeur X dans le référentiel barycentrique.*

Propriété 23 *Dans un référentiel barycentrique, nous avons :*

$$\overrightarrow{p^*} = \overrightarrow{0}$$

25.1.4 Système ouvert

Pour un système ouvert, on considére la masse à l'instant t, et la masse à l'instant t+dt du système, plus la masse éjecté durant dt. On peut donc définir dans ce cas un système fermé.

25.2 Théorème du moment cinétique

25.2.1 Moment cinétique

Définition 65 *Considérons le moment cinétique d'un point materiel O, dans le référentiel R, défini par :*

$$\overrightarrow{L_{O/R}} = \overrightarrow{OM} \wedge m.\overrightarrow{v}$$

On defini donc le moment cinétique pour un ensemble de point par :

$$\overrightarrow{L_{O/R}} = \sum \overrightarrow{OM} \wedge m.\overrightarrow{v_i}$$

Propriété 24 *On obtient la formule de changement de point du moment cinétique :*

$$\overrightarrow{L_{A/R}} = \overrightarrow{L_{O/R}} + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{p}$$

Avec $\overrightarrow{p}$ la quantité de mouvement du système. On obtient donc que le moment cinétique et la quantité de mouvement constitue un torseur cinétique

Moment cinétique particulier

Considérons un axe de rotation, de moment d'intertie J. Soit A un point sur un axe lié à cette axe de symétrie qui effectue un mouvement de rotation d'angle θ autour de l'axe de rotation. On obtient que le moment cinétique est donné par :

$$\overrightarrow{L_{A/R}} = J\theta\overrightarrow{u_\theta}$$

25.2.2 Théorème de Koening

En partant de la décomposition de la vitesse :

$$\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{v_{G/R}} + \overrightarrow{v_i^*}$$

Avec $\overrightarrow{v_{G/R}}$ la vitesse du centre de masse G par rapport au référentiel R, et $\overrightarrow{v_i^*}$ la vitesse du point i dans le référentiel barycentrique.
On obtient que :

$$\overrightarrow{L_{O/R}} = m_t.\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{v_G} + \overrightarrow{L_O^*}$$

On décompose donc le moment cinétique en un moment du à un mouvement de translation, et un autre du a un mouvement de rotation.

Propriété 25 *Le moment cinétique, dans le référentiel barycentrique, ne dépend pas du point où on le calcul. On l'écrit donc :*

$$\overrightarrow{L^*}$$

25.2.3 Théorème du moment cinétique en un point fixe

Soit O un point fixe par rappor à R. On obtient que :

$$\frac{d\overrightarrow{L_{O/R}}}{dt} = \sum \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F_{ext}}$$

25.2.4 Théorème du moment cinétique en un point mobile

Soit A un point mobile par rapport à R. On obtient que :

$$\frac{d\overrightarrow{L_{A/R}}}{dt} = \sum \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F_{ext}} - \overrightarrow{v_A} \wedge \overrightarrow{p}$$

En particulier, si R est un référentiel galiléen et que le point mobile est G, le centre de masse, on obtient que :

$$\frac{d\overrightarrow{L_{G/R}}}{dt} = \sum \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{F_{ext}}$$

25.2.5 Représentation torsorielle

Nous avons les représentations suivantes :

$$\text{Torseur Cinématique} \begin{cases} \overrightarrow{P} \\ \overrightarrow{L_O} \end{cases}$$

$$\text{Torseur Dynamique} \begin{cases} \overrightarrow{R} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}} = \sum \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F_{ext}} \end{cases}$$

On observe que le torseur dynamique est la dérivé du torseur cinématique

25.3 Théorème de l'énergie cinétique

25.3.1 Énergie cinétique

Définition 66 *Par définition, pour un ensemble de point materiel, on obtient :*

$$E_c = \sum \frac{1}{2}.m_i.v_i^2$$

25.3.2 Théorème de Koening

De la façon que précédement, on obtient que :

$$\overrightarrow{E_c} = \frac{1}{2}.m_t.V_g^2 + \overrightarrow{E_c^*}$$

25.3.3 Théorèmes

Propriété 26 *En partant de l'expression de l'énergie cinétique, on obtient que :*

$$\Delta E_c = W_{ext} + W_{int}$$

Avec W_{ext} le travail des forces exterieurs et W_{int} le travail des forces interieurs. Si le système est un solide, donc indéformable, on obtient :

$$\Delta E_c = W_{ext}$$

25.4 Cas du solide

Définition 67 *On défini un solide par :*

$$\forall (A, B) \in Objet^2 \quad \| \overrightarrow{AB} \| = cte$$

C'est donc un objet indéformable

25.4.1 Cinétique

Champs de vitesse

Considérons un solide, en mouvement dans un référentiel R fixe. On défini un référentiel R', lié au solide. Soit C le centre d'un repère lié a R', et M un point du solide. On obtient :

$$\overrightarrow{v}_M = \overrightarrow{v}_C + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{CM}$$

Avec $\overrightarrow{\Omega}$ le vecteur rotation instantané

25.4.2 Torseur cinématique

Solide possédant un point fixe

Considérons que le solide possède un point fixe, notée C. D'après la relation précédente, on obtient que, pour tous point M du solide :

$$\overrightarrow{v}_M = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{CM}$$

En utilisant le théorème du moment cinétique, on obtient que :

$$I = \sum m_i.r_i^2$$

Avec I le moment d'inertie par rapport aux axes.

Solide possédant un axe fixe

On obtient que le vecteur rotation instantanée est porté par l'axe fixe, Oz par exemple. En appliquant le théorème du moment cinétique, on obtient que :

$$\overrightarrow{L}_C = I_{Oz}.\overrightarrow{\Omega} + \overrightarrow{L}_{C\perp}$$

Si z est un axe de symétrie, on obtient que :

$$\overrightarrow{L}_C = I_{Oz}.\overrightarrow{\Omega}$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\overrightarrow{L}_C = \overrightarrow{L}_{C//}$$

25.4.3 Moment d'inertie par rapport à un axe

Relation de Huygens

Soit Δ et Δ' deux droites parralèle séparé d'une distance A. On obtient que :

$$I_{\Delta'} = I_\Delta + m_t.A^2$$

Ceci constitue la relation de Huygens.

25.4.4 Energie cinétique

Supposons que le solide possède un point fixe, noté C. On obtient, en partant de l'expression général de l'énergie cinétique, et du champs de vitesse, la relation suivante :

$$E_c = \frac{1}{2}.\overrightarrow{L}_C.\overrightarrow{\Omega}$$

De plus, si on suppose qu'il existe un axe de rotation instantanée Δ parralèle à $\overrightarrow{\Omega}$, on obtient que :

$$E_c = \frac{1}{2}I_\Delta.\Omega^2$$

25.5 Contact entre deux solides

25.5.1 Types de mouvement relatif

Il existe trois types de mouvement relatif :
→ Mouvement de Translation
→ Mouvement de Rotation
→ Mouvement de Roulement

25.5.2 Vitesse de glissement

On considère deux solides en contact. À un instant t donnée, on suppose que les points I_1, du solide 1, et I_2, du solide 2, sont en contact. On obtient l'expression de la vitesse de glissement, noté $\overrightarrow{v}_g$:

$$\overrightarrow{v}_{g_{2\to 1}} = \overrightarrow{v}_{I_2/R} - \overrightarrow{v}_{I_1/R}$$

25.5.3 Lois de Coulomb pour le glissement

Considérons un contact. La résultante $\overrightarrow{R}$ se décompose en deux forces :
→ $\overrightarrow{F}$, la force de frottement
→ $\overrightarrow{n}$, la réaction normale au support

En l'absence de glissement

En l'absence de glissement, on obtient que :

$$\frac{\| \overrightarrow{F} \|}{\| \overrightarrow{n} \|} \leq f_0$$

Avec f_0 le coefficiant de frotement statique

Avec glissement

Si il y a glissement, on obtient que :

$$\frac{\| \overrightarrow{F} \|}{\| \overrightarrow{n} \|} = f$$

Avec f le coefficiant de frottement dynamique, $f \ll f_0$

Huitième partie

Optique physique

Chapitre 26

La lumière

26.1 Modèle scalaire de la lumière

26.1.1 Amplitude lumineuse

Soit M un point de l'espace, et t un instant. On associe à M et t :

$$\varphi : (M, t) \mapsto \varphi(M, t)$$

Cette fonction φ est appelé amplitude lumineuse. Cette grandeur est inobservable dans la réalité. L'éclairement est défini comme la puissance lumineuse qui arrive sur une Surface. On le note E. On montre que :

$$E \propto |\varphi|^2$$

26.1.2 Notion d'onde

Dans ce chapitre, on considère deux types d'onde :

Onde plane monochromatique

L'amplitude lumineuse associé à ce type d'onde est donnée par :

$$\begin{aligned}\varphi(M, t) &= A.cos(\omega.t - k.x + \theta) \\ &= Re(\underline{A}e^{i(\omega t - kx)})\end{aligned}$$

On peut donc adopter aussi la notation complexe, en faisant rentrer la phase dans $\underline{A}$, ce que nous allons faire dans la suite.

Onde sphérique monochromatique

L'amplitude lumineuse est ici donnée par :

$$\begin{aligned}\varphi(M, t) &= \frac{A}{r}.cos(\omega.t - k.x + \theta) \\ &= Re(\frac{\underline{A}}{r}e^{i(\omega t - kx)})\end{aligned}$$

26.1.3 Relation d'ondes - Rayon lumineux

Le rayon optique, considéré en optique géométrique, peut être représenté comme un tube selon lequel se propage l'onde. Le rayon lumieux donne la direction de propagation de l'onde.

Théorème de Malus-Dupin

Théorème 5 *La surface d'onde, défini comme :*

$$\{M/\varphi(M,t) = \varphi(M_0,t)\}$$

C'est à dire, cette surface d'onde défini touts les points ayant la même amplitude lumieuse.
Nous considérons deux types de surfaces d'ondes :
→ *Pour une onde plane : x = constante*
→ *Pour une onde sphérique : Une sphère de rayon r*
On montre que les lentilles ont pour effet de modifier cette surface d'onde. La modification entrainé dépend de la lentille considéré. Par exemple, dans le cas d'une lentille qui produit une source à l'infini :

Théorème 6 *Soit S une source et S' l'image de cette source par une lentille. Le temps mis pour relier S et S' est indépendent du chemin suivit.*

À l'aide de ce dernier théorème, nous pouvons redémontrer les lois de Snell-Descartes.

26.2 Vision

26.2.1 Formation des images

Un appareil d'optique

L'oeil, qui permet la formation d'image, est un appareil optique, qui n'est pas assimilable à une lentille simple. On montre que l'oeil s'accomode aussi, pour pouvoir être toujours au point.

Un capteur : La rétine

La rétine est composé de deux entités :
→ Les batonnets : En périphérie de la rétine, en très grand nombre, très sensible
→ Les cones : Au centre, en petit nombre mais très consentré spatialement. Responsable de la vision en couleur.
L'oeil bouge constament, car autrement, l'information n'est plus actualisé.

Vision des couleurs

L'oeil ne perçoit pas les longeurs d'ondes. On défini une couleur comme un contenu spectral, c'est à dire une énergie en fonction de la longeur d'ondes. Nous avons donc une sentation coloré. Cependant, avec la norme RGB, on ne peut pas restituer toutes les couleurs, car certain couleurs sont formé à l'aide de coefficiants négatifs pour R, G ou B.

26.2.2 Sources de Lumière

Nous avons trois types de sources de lumière :
→ Les lasers : Source cohérente, c'est à dire que θ, dans l'amplitude lumineuse, est parfaitement déterminé. Cette source est très proche d'une sources monochromatique, en effet sa composition en longeur d'onde est défini à l'aide d'une courbe de Gauss, avec à mi-hauteur un écart de l'ordre de 0,3 nm.
→ Les lampes spectrales : Source incohérente, car, de par l'agitation thermique, nous avons, par effet Doppler-Fiseau, un eventail de longeur d'onde, et non une longeur d'onde. De plus, la lumière étant émise par les atomes qui se dé-excite, il ne sont pas syncrone, donc θ est totalement aléatoire, dans l'amplitude lumineuse.

Chapitre 27

Interférence non localisées de deux ondes

27.1 Superposition de deux ondes sphérique progressive monochromatique

27.1.1 Calcul de l'éclairement

Considérons un point M, et deux sources S_1 et S_2 séparé respectivement de r_1 et r_2 de M. Ce sont deux sources monochromatique sphérique de pulsation ω.
En M, nous avons :

$$\varphi_1 = \frac{A}{r_1} cos(\omega.t - \omega.\frac{r_1}{c})$$

$$\varphi_2 = \frac{A}{r_2} cos(\omega.t - \omega.\frac{r_2}{c} + \theta)$$

Si $\theta = 0$, on dit que les sources sont syncrones.
On défini φ par :

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

Considérons E, l'éclairement, défini par :

$$E = |\varphi|^2$$

En passant en notation complexe, on obtient :

$$E = \frac{A^2}{r_1^2}(1 + \frac{B^2}{A^2}.\frac{r_1^2}{r_2^2} + 2.\frac{B}{A}.\frac{r_1}{r_2}.cos(\frac{2.\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) - \theta))$$

On montre que :
→ $\cos(\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1))$ varie extremement rapidement
→ $\frac{r_1}{r_2}$ varie très lentement par rapport au cos
On peut donc fair l'approximation suivante :

$$\frac{r_1}{r_2} = cte$$

On obtient donc une expression de la forme :

$$E = \frac{A^2}{r_1^2}(1 + \alpha^2 + 2.\alpha.cos(\frac{2.\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) - \theta))$$

27.1.2 Franges d'interférences

Natures

D'après l'expression précédente, on obtient que E varie d'un minimum vers un maxium periodiquement, avec un periode spatiale de λ. D'apres la considération que :

$$S_2M - S_1M = cte$$

On obtient que les franges d'interférences sont des hyperbolides.

Intersection des franges d'interférence par un plan parallèle au segment S_1S_2

.

Soit a la distance séparant S_1 et S_2, D la distance entre le segment S_1S_2 et le plan contenant M, et M le point défini par :

$$M = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ D \end{pmatrix}$$

En faisant les approximations suivantes, appelé approximation axiale :

$$a \ll D$$

$$X \ll D$$

$$Y \ll D$$

On montre que :

$$S_2M - S_1M = \frac{-a.X}{D}$$

On obtient donc une dépendance linéaire entre X et l'éclairement

Intersection des franges d'interférence par un plan perpendiculaire au segment S_1S_2

Soit D la distance entre S_1 et l'origine O, a la distance entre S_1 et S_2, ρ la distance entre M et l'origine. M est porté par Ox et S_1 et S_2 porté par Oy.
En faisant l'approxiation axiale, on obtient :

$$S_2M - S_1M = a.(1 - \frac{\rho^2}{2.D^2})$$

On obtient donc une dépendance quadratique.

27.2 Dispositif diviseur d'onde

27.2.1 Impossibilité de deux sources cohérentes

On ne peut pas obtenir, dans la durée, deux sources synchronisées l'une sur l'autre, c'est à dire avec θ indépendant du temps. Partant de ce constat, nous avons plusieurs moyens d'obtenir deux sources virtuels cohérente, à partir d'une source.

27.2.2 Miroir de Fresnel

Considérons deux mirroirs M_1 et M_2, lié, avec M_2 forment un angle α faible avec M_1. On montre que la source se réféchi sur les deux miroirs, ce qui permet d'obtenir des figures d'interférence, les support de rayon se croisant. On obtient donc, à l'aide de ces deux mirroirs, deux sources virtuels syncrones.

27.2.3 Autres dispositifs

Nous avons d'autre dispositif, telque les montages bi-prismes, ou bi-lentilles :

Bi-prismes

Bi-lentilles

27.3 Conditions de visibilité des franges - Cohérence

27.3.1 Cohérence temporelle d'une sources

Durée d'un train d'ondes

La lumière émise par une lampe spectrale est dù au dé-excitation d'atomes. Soit τ la durée d'émission du à un atome. On montre que l'on observe des interférences si :

$$r_2 - r_1 < c.\tau$$

On appelle longeur de cohérence, notée δ :

$$\delta = c.\tau$$

Cette condition permet de déterminer la taille observable de la figure d'interférence.

Largeur spectrale des raies d'émission

Considérons un paquet d'onde, c'est à dire un signal sinusoidale borné. On montre que ce signal peut être décomposé sous la forme :

$$s(t) = \int_0^\infty g(\nu).e^{i.2\pi.\nu.t}dt$$

La sources n'est donc absolumement pas monochromatique. On peut approximer la courbe, qui est une courbe en cloche, par un "rectangle". En considérant un $d\nu$ de la distribution, et en déterminant l'éclairement, on obtient encore une restriction sur le nombre de franges d'interférence visible. Soit p le nombre de franges visible :

$$p = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Avec $\lambda_2 - \lambda_1$ la largeur de la cloche et λ_2 une longeur d'onde de la cloche.
En intégrant l'élément différentielle de E déterminé précédement, entre deux fréquences, on obtient une porteuse, qui module un signal.

Contraste

Par définition, on appelle contraste, noté γ :

$$\gamma = \frac{E_{max} - E_{min}}{E_{max} + E_{min}}$$

Avec E_{max} l'éclairement maximale, E_{min} l'éclairement minimale.
On montre que des que l'on s'écarte un peu du centre de la figure d'interférence, le contraste devient très faible. On ne peut donc diserner qu'un très petit nombres de franges. Cependant, l'oeil est aussi sensible au couleur, ce qui nous permet de disernet un nombres plus important de franges qu'un capteur par exemple.

27.3.2 Interférences à grande différence de marche

On suppose dans ce cas que :

$$E(x) = cte$$

Définition 68 *On appelle différence de marche la différence :*

$$r_2 - r_1$$

On observe le mieux les franges d'interférence quand la différence de marche est nulle, c'est à dire quand on se trouve sur la médiatrice entre les deux sources virtuels dans le cas des mirroirs de Fresnel. Pour une longeur d'onde donnée, en fixant le point M dans le cas d'une grande différence de marche, on obtient, en simplifiant l'expression de l'éclairement

$$E(\lambda) = K.(1 + cos(\frac{2.\pi.a.X_0}{\lambda.D}))$$

On obtient que le maximum de l'éclairement est atteint pour certaine longeurs d'onde :

$$\lambda = \frac{2.a.X_0}{D(2p+1)}$$

On obtient que plus p augment, plus les longeurs d'ondes entrainent un éclairement maximum sont proche.

27.3.3 Cohérence spatiale d'une expérience d'interférence

Extension spatiale de la source

Une source ponctuelle ne peut pas être réalisé en réalité. Toute source à une épaisseur. Notons b cette largeur. On obtient donc que les franges d'interférences ne sont pas sans dimensions. Pour pouvoir voir les franges d'interférences, il faut donc que l'épaisseur soit bien inférieur à l'interfranges. On obtient donc qu'il faut que :

$$b < \frac{\lambda.D}{4.a}$$

Ceci est une condition contraignante, car la largeur de la source doit être de l'ordre de la 100 de μm.

Calcul de l'éclairement

En considérant un élement différentielle d'éclairement, on obtient que :

$$E = K.b(1 + \frac{sin(\frac{\pi.a.b}{\lambda.D})}{\frac{\pi.a.b}{\lambda.D}}.cos(\frac{2\pi.a.X}{\lambda.D}))$$

Largeur maximale de la fente source

D'après l'expression du contraste, on ne peut observer les interférences que si le contraste est suffisament important, c'est à dire qu'un obtient un constaste seuil, donc un b maximale.

Chapitre 28

Interféromètre de Michelson

28.1 L'interféromètre

28.1.1 Description

Considérons deux mirroirs, notés M_1 et M_2, et une lame semi réfléchissant, formant un angle de 45 degrée avec l'horizontale. Notons :

$$e = OM_2 - OM_1$$

Avec ce système, on obtient des interférences, car la lumière émise d'une source ne met pas le même temps pour aller de la source au plan.
Considérons deux voies :
→ Voie 1 : Réflexion sur la séparatrice, puis réflexion sur M_1
→ Voie 2 : Réflexion sur M_2, puis réflexion sur la séparatrice

28.1.2 Cas de la source ponctuelle

Tracé de rayon

A partir d'un point source Considérons donné une source ponctuelle, noté O, et l'ensemble M_1, M_2 et la lame semi-réfléchisante. M_1 à pour coordoonée (0,Y) et M_2 à pour coordonnée (X,0). Notons α l'angle entre l'horizontale et le mirroir M_1. On obtient le tracé des rayons pour la voie 1 et 2 en déterminant les images par les différents systèmes obtique. On obtient le tracé des rayons arrivant au point P, un point de l'écran.

A partir d'un point de l'écran Inversement, on peut, étant donnée le dispositif et un point de l'écran, tracé les rayons de la voie 1 et de la voie 2, provenant d'une source quelconque.

Image de M_2

On peut aussi, à partir du premier tracé, celui d'un point source, obtenir un schéma équivalent, ne portant que sur un axe du repère. Ce montage est virtuel, mais rigoureusement équivalent. Si $\alpha = 0$, on dit que le Michelson est en "lame d'air", c'est à dire que le mirroir M_1 et M_2 sont parralèle tout les deux à l'axe 0x. Si $\alpha \neq 0$, on dit que le Michelson est en "coin d'air"

28.1.3 Les différents cas

→ Disposition des mirroirs. Ceci dépend de deux paramètres : α et e.
  → $\alpha = 0$: Lame d'air
  → $\alpha \neq 0$: Coin d'air
→ Sources. On peut considérer plusieurs types de sources

→ Sources ponctuelles : Assimilable à un point
→ Sources étendue
→ Sources à distance finie
→ Sources à l'infini

Cas d'une source ponctuelle

Dans le cas d'une source ponctuelle, on obtient que les deux sources virtuel sont syncrone, notée O_1, O_2, on obtient donc que, en faisant l'hypothèse que $O_1M \backsimeq O_2M$.

$$E(M) = K.[1 + cos(\frac{2.\pi}{\lambda}(O_2M - O_1M))]$$

Les lieux d'éclairement constant sont des hyperbolïdes de révolution.

28.1.4 Michelson en "lame d'air"

Nous avons donc $\alpha = 0$. On obtient donc que 0_1 et 0_2 vont être sur l'axe.

Source ponctuelle à distance finie

Soit P un point de l'écran de coordoonée (r,Y). Soit D la distance entre l'écran et O_1, et θ l'angle entre 0_1P et la vertical, et 2.e la distance entre O_1 et O_2.
On suppose :

$$r \ll D$$

On obtient, en développant que :

$$E(M) = K[1 + cos(\frac{2.\pi}{\lambda}.2.e.cos(\theta))]$$

Description de la figure d'interférence

Considérons les franges brillantes : On obtient que :

$$cos(\theta) = \frac{p.\lambda}{2.e}$$

En général, on a :

$$\lambda \ll e$$

Soit r_k le rayon du k-ème anneau. On obtient, en considérant l'angle θ_k petit, que :

$$\frac{r_k}{D} = \sqrt{\frac{\lambda}{e}}\sqrt{k + \varepsilon - 1}$$

On ne peut pas déduit grand chose de cette expression, consernant l'évolution de r_k avec e, car le ε dépend de e. On montre cependant, en repartant de l'équation initiale, que si e augement, le rayon augmente.

28.1.5 Sources étendue

Élargissement de la source

Au lieu d'avoir un point sources, noté O, on obtient en ensemble de point source. Soit S un autre point source appartenant à la source étendue. On obtient que la figure d'interférence dû à S est translaté par rapport à celle de O. Notons a la distance entre les deux centres des anneau d'interférences. On obtient une condition sur la largeur de la source, pour pouvoir continuer des interférences. Il faut que :

$$a < r_{k+1-r_k}$$

En développant, en se placant dans le cas ou $\varepsilon = 1$ et $k \gg 1$, on obtient que a doit vérifier :

$$a < D.\sqrt{\frac{\lambda}{2}}.\frac{1}{2.\sqrt{k}}$$

Soit N le nombre d'anneau visible. On obtient que :

$$\sqrt{N} = \frac{D}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{e}}.\frac{1}{a}$$

On obtient donc que N est bornée, sauf si D $\rightarrow \infty$. En se placant à l'inifi, on observera un très grand nombre d'anneaux. Ceci peut etre réalisé à l'aide d'une lentille. Dans ce cas de figure, on obtient pour l'éclairement, en un point de l'écran M :

$$E(M) = K.[1 + cos(\frac{2\pi}{\lambda}.2ecos(\theta))]$$

On peut donc se librer de la cohérence spatiale dans le cas d'une source étendue à l'infini.

Cohérence temporelle

On ne peut, en pratique, obtenir une source monochromatique. En développant, on montre que les anneaux d'interférence vont allez en s'epaissisant. On n'observe donc que les anneaux au centre, ceux à la périphérie ne sont pas visible.

28.1.6 Anneau de Haidinger

Considérons deux lames cristallin, toutes deux parralèles, séparé d'une distance e. Considérons un rayon incident. Une partie de ce rayon se réfléchi, l'autre prénètre dans les deux lames. Et ainsi de suite pour toute les interfaces. On montre, en développant à l'aide de considération d'optique ondulatoire, que les rayons utilisable, c'est à dire ayant une énergie non négligable devant le rayon incident, se trouve au tout début du processus. Les autres "s'épuissent" très vite.

Calcul du déphasage

Considérons une interface entre deux milieux 1 et 2. Un rayon incident, provenant de 1, passe dans 2, puis se réfléchi sur la deuxième lame, pour enfin revenir dans le milieu 1, en traversant la première lame. Lors du passage de la première interface, une partie du rayon est aussi réfléchi. On obtient donc deux rayons qui peuvent interférer. On montre, à l'aide de considération géométrique, que le δt entre les deux chemins s'exprime de la façon suivante :

$$\delta t = \frac{2.e.n_2}{c}.cos(r)$$

Avec e la distance entre les deux lames, n_2 l'indice entre les lames, et r l'angle de réfraction du rayon incident.

28.2 Localisation des franges d'interférence

28.2.1 Dans le cas d'une source ponctuelle

On obtient, en utilisant le schéma équivalent, que les interférences sont non localisés, c'est à dire que l'on peut placer l'écran ou l'on veux, on observera des interférences.

28.2.2 Dans le cas d'une source étendue

Avec un Michelson en lame d'air, on obtient que la localisation est à l'infini.

28.3 Michelson en "coin d'air"

Définition 69 *Un Michelson est dit en coin d'air si :*

$$\alpha \neq 0$$

Cas d'une source ponctuelle

Considérons une source ponctuelle. On obtient que les franches d'interférence sont non localisé.

Cas d'une source étendue

Considérons une source étendue. Dans ce cas, nous avons localisation des franges d'interférence sur une sphère, défini comme passant par les deux points O_1 et O_2, et par l'intersection virtuel des deux mirroirs. Pour le moment, les images des interférences sont virtuel. Pour les voir, on utilise une lentille à la sortie du Michelson.
La nature des franges dépend de la distance de la source. En générale, on obtient des anneaux. Si d tend vers l'infini, on obtient des lignes. Pour faire tendre d vers l'infini, on place la source du Michelson dans le plan focale d'une lentille.

28.3.1 Etude du cas d'une source étendue, à l'infini

Comme nous l'avons vu, nous avons la localisation sur une sphère. Mais dans le cas ou d tend vers l'infini, on obtient que cette sphère est un plan. On obtient donc une image sur M_1. Soit P un point de M_1.
Dans ce cas, en considérant que α est petit, on obtient que l'éclairement a pour expression :

$$E(P) = K[1 + cos(\frac{2.\pi}{\lambda}.2.\alpha.x)]$$

28.3.2 Elargissement de la source

Dans ce cas, on peut considérer un autre point source (appartenant à la largeur de la source), noté S. La source étant à l'infini, les rayons sont parralèle. Cependant, ils sont incliné d'un angle β par rapport à la normale. On obtient donc une expression différente pour la différence de marche. D'ou :

$$O \rightarrow E_O(P) = K[1 + cos(\frac{2.\pi}{\lambda}.2.\alpha.x)]$$

$$S \rightarrow E_S(P) = K[1 + cos(\frac{2.\pi}{\lambda}.2.\alpha.x.cos(\beta))]$$

On obtient donc que les franges vont en s'élargissant quand on se décale vers la périphérie. On observe donc pas les franges périphérique. D'autre part, le centre de la figure n'est pas, à priori, dans le champs d'observation. On n'observe donc pas de figure d'interférence. Pour en observer, il faut tendre vers le contact optique, c'est à dire faire tendre $e \rightarrow 0$.
En résumé, nous avons ceci :
→ Source ponctuelle : La source à l'infini → Franges rectiligne
→ Source étendue : La source à l'infini et le contact optique → Franges rectiligne.
De plus, on peut déterminer, en fixant α et e, une taille maximale pour la source.

28.3.3 Source non strictement monochromatique

On ne peut, dans la réalité, obtenir une source parfaitement monochromatique. On obtient donc :

$$E_{\lambda_1}(P) = K.[1 + cos(\frac{2.\pi}{\lambda_1}(2e - 2\alpha.x))]$$

$$E_{\lambda_2}(P) = K.[1 + cos(\frac{2.\pi}{\lambda_2}(2e - 2\alpha.x))]$$

On obtient donc que les franges d'interférence vont en s'épaissant. Il faut donc encore le contact optique.

28.4 Franges de Fizeau, ou d'égale épaisseur

On considère ici une lame mince. On considère donc ici un milieu transparent, de faible epaisseur, cette épaisseur étant variable sur la surface. On montre que la couleur dépend de l'épaisseur de la lame mince. Soit i l'angle d'incidence du rayon lumineux dans la lame mince. On montre que l'éclairement à pour expression :

$$E = K[1 + cos(\frac{2.\pi}{\lambda}.2.e.cos(i))]$$

On observe donc que l'éclairement est maximal pour certaine longeurs d'onde. Ceci est observable sur un flaque d'eau avec un peu d'huile. L'huile fait office de la lame mince. On obtient une irisation, qui dépend de l'angle selon lequel on observe la flaque.

28.5 Interféromètre réel

Dans le cas d'un interféromètre réel, la séparatrice n'est pas un plan. On place donc une compensatrice dans le montage, pour corriger le retard du à l'épaisseur de la séparatrice.

28.5.1 Déphasage

On montre, qu'à la réflexion, de par les différents indices, et le fait que les réfractions ne se font pas toutes sur les mêmes interfaces, on obtient un déphasage. On obtient donc que l'expression réel de l'éclairement du Michelson est :

$$E = K[1 + cos(\frac{2.\pi}{\lambda}.2.e.cos(\theta) + \pi)]$$

Chapitre 29

Diffraction

29.1 Principe de Huygens-Fresnel

29.1.1 Énoncé de Huygens

Soit S une source lumineuse. Soit Σ une surface autour de cette source. On remplace la source S par un ensemble de source secondaire situé sur Σ.

29.1.2 Énoncé de Fresnel

Fresnel précise dans son énoncé que l'amplitude lumineuse émise de la source secondaire sur Σ est égale à l'amplitude lumineuse reçu en ce point grâce à la source S.

29.2 Diffraction à l'infini d'une onde plane monochromatique par un diaphragme rectangulaire

29.2.1 Position du problème

Considérons une onde plane. Supposons que la source soit à l'infini. On obtient des rayons parralèles arrivant en O, le centre du diaphragme. On considère le rayon passant par O comme le rayon de référence en générale. On observe ce rayon à l'infini, dans la direction caractérisé par un vecteur $\overrightarrow{u}$.

29.2.2 Calcul de l'éclairement

Soit P un point "mobile" du diaphragme. Les surfaces d'onde sont des plans perpendiculaire à la direction de propagation. Les rayons venant de P et de O ne mettent donc pas le même temps pour "aller à l'infini". Soit $\overrightarrow{OP}(X, Y, 0)$ et $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, avec $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$ pour avoir un vecteur unitaire. En calculant l'amplitude lumieuse, on obtient pour l'éclairement :

$$I = I_O \left(\frac{sin(\frac{\pi.\alpha.a}{\lambda})}{\frac{\pi.\alpha.a}{\lambda}} \right)^2 \left(\frac{sin(\frac{\pi.\beta.b}{\lambda})}{\frac{\pi.\beta.b}{\lambda}} \right)^2$$

29.2.3 Etude de la solution

Posons :

$$f(z) = \left(\frac{sin(\pi.z)}{\pi.z} \right)^2$$

On montre que :

$$\forall z \in \mathbb{Z}^* \ f(z) = 0$$

On obtient un profil pour f(z), avec des maximums sucessifs, mais la valeur de f décroit très rapidement dès qu'on s'éloigne de l'origine. On montre que les maximums sont données par :

$$\pi.z = tan(\pi.z)$$

Les maximums ne sont donc pas atteint au milieu des intervalles, mais juste un peu avant.

29.2.4 Montage à deux lentilles

Le cas décrit précédement est un cas simple. Pour le réaliser en réalité, nous devons utiliser le montage suivant : Soit S la source lumineuse, supposé ponctuelle ici. Soit L_1 une lentille de distance focal f_1, avec S situé sur le foyer objet, de tel sorte que la source soit à l'infini pour le diaphragme. Soit L_2, une lentille de distance focal L_2. On positionne le diaphragme entre ces deux lentilles. Enfin, on positionne un écran au foyer image de la lentille L_2, de tel sorte que l'on observe comme à l'infini. Soit M(X,Y,f_2) le point d'observation sur l'écran. On montre qu'on obtient pour l'éclairement en M, en faisant les approximations suivantes :

$$X \ll f_2$$

$$Y \ll f_2$$

L'expression suivante :

$$I = I_O \left(\frac{sin(\frac{\pi.X.a}{\lambda.f_2})}{\frac{\pi.X.a}{\lambda.f_2}} \right)^2 \left(\frac{sin(\frac{\pi.Y.b}{\lambda.f_2})}{\frac{\pi.Y.b}{\lambda.f_2}} \right)^2$$

Cette formule nous donne les minimums sur selon X et Y. On montre, en supposant par exemple $a \ll b$, de l'on observe uniquement la figure de diffraction sur l'axe des X, car, meme si elle existe sur l'axe Y, la periode entre les extinctions est trop petit pour être observé à l'échelle de la figure de diffraction sur X.

29.2.5 Si l'onde incident n'est plus perpendiculaire au diaphragme

Supposons que les rayons incident ne sont plus perpendiculaire au diaphragme. Ceci revient à supposé que la source n'a plus pour coordonnée (0,0,f_1) mais (X',Y',f_1). Supposons qu'il arrive selon la direction $\overrightarrow{u_0}$. Il y à donc un déphasage induit par cette inclinaison. En exprimant l'amplitude lumineuse, on obtient pour l'éclairement :

$$I = I_O \left(\frac{sin(\frac{\pi.a}{\lambda}.(\frac{X}{f_2} + \frac{X'}{f_1}))}{\frac{\pi.a}{\lambda}.(\frac{X}{f_2} + \frac{X'}{f_1})} \right)^2 \left(\frac{sin(\frac{\pi.b}{\lambda}(\frac{Y}{f_2} + \frac{Y'}{f_1}))}{\frac{\pi.b}{\lambda}.(\frac{Y}{f_2} + \frac{Y'}{f_1})} \right)^2$$

On obtient, en superposant le résultat pour les deux sources ponctuelle, en (0,0) et en (X,Y), un "élargissement" de la figure de diffraction. On obtient donc une condition sur X', donc sur la largeur d'une source non ponctuelle, pour pouvoir continuer à observer cette figure :

$$X' < \frac{\lambda.f_1}{a}$$

29.3 Diffraction par un diaphragme plan

29.3.1 Approximation de Frenel et de Fraunhofer

Intégrale de Kirchhof

Kirchhof part de l'équation de propagation d'une onde, et la simplifie en considérant des grandeurs scalaires. On obtient donc pour l'amplitude lumineuse :

$$\Delta(\varphi) - \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

Kirchhof montre que qu'au point M, nous avons :

$$\varphi(M,t) = \iint\limits_{\text{diaphragme}} \frac{1}{\lambda.i}.\varphi(P,t).\frac{e^{-i.\frac{2.\pi.PM}{\lambda}}}{PM}.\frac{cos(\theta)+cos(\theta'))}{2}.dS$$

Pour la suite, on considère que le facteur directionnel est égale à 1 :

$$\frac{cos(\theta)+cos(\theta'))}{2} = 1$$

On considère donc, ici, que l'intégrale de Kirchhof est donnée par :

$$\varphi(M,t) = k.\iint\limits_{\text{diaphragme}} \varphi(P,t).\frac{e^{-i.\frac{2.\pi.PM}{\lambda}}}{PM}.dS$$

Approximation de Fresnel

L'approximation de Fresnel consiste à dire que :

$$\| \overrightarrow{OP} \| \ll \| \overrightarrow{PM} \|$$

En développant cette approximation dans le calcul précédent, on obtient que :

$$\varphi(M,t) = k.\iint\limits_{\text{diaphragme}} \frac{\varphi(P,t)}{OM}.e^{-i.\frac{2.\pi.OM}{\lambda}}.e^{i.\frac{2.\pi}{\lambda}.(\vec{u}.\overrightarrow{OP}-\frac{OP^2}{2.OM})}.dS$$

Approximation de Fraunhofer

Cette approximation consiste à dire que :

$$.e^{-i.\frac{2.\pi}{\lambda}.(\frac{OP^2}{2.OM})} \backsimeq 1$$

Sous cette hypothèse, on obtient que l'éclairement est donnée par :

$$\varphi(M,t) = \frac{k..e^{-i.\frac{2.\pi.OM}{\lambda}}}{OM} \iint\limits_{\text{diaphragme}} \varphi(P,t).e^{i.\frac{2.\pi}{\lambda}.(\vec{u}.\overrightarrow{OP}}.dS$$

En considérant un diaphragme de largeur a et de longeur b, on obtient le même résultat que précédement pour l'éclairement.

29.4 Diffraction au voisinage d'une image optique

29.4.1 Position du problème

Considérons une source S situé sur l'axe optique, et S' son image par une lentille L_1. Considérons un diaphragme situé juste après la lentille. Soit P' la distance entre le diaphragme et l'écran. D'après l'intégrale de Kirchhof, on obtient :

$$\varphi(M,t) = \iint_D \frac{\varphi(P,t)}{PM}.e^{-i\frac{2.\pi}{\lambda}.PM}$$

29.4.2 Approximation de Fresnel

En appliquant l'approximation de Fresnel, on obtient :

$$\varphi(M,t) = \iint_D \frac{\varphi(P,t)}{OM}.e^{-i.\frac{2.\pi}{\lambda}.OM}.e^{i.\frac{2.\pi}{\lambda}.\overrightarrow{u}.\overrightarrow{OP}}.e^{-i.\frac{2.\pi}{\lambda}.\frac{OP^2}{2.OM}}dS$$

29.4.3 Calcul de l'éclairement

On a à faire à une onde sphérique. On a donc :

$$\varphi(P,t) = \varphi(S',t).\frac{e^{i.\frac{2.\pi}{\lambda}.PS'}}{PS'}$$

$$\varphi(O,t) = \frac{\varphi(S',t)}{OS'}.e^{i.\frac{2.\pi}{\lambda}.OS'}$$

On obtient donc, en faisant des approximations :

$$\varphi(M,t) = \frac{\varphi(O,t)}{OM}.e^{-i.\frac{2.\pi}{\lambda}.OM}.\iint^D e^{i.\frac{2.\pi}{\lambda}.\overrightarrow{u}.\overrightarrow{OP}}dS$$

29.4.4 Interprétation

Ceci implique que par exemple, dans le cas de l'observation d'une étoile, on obtient une tache de diffraction, et non un point.

29.5 Fente de Young

Considérons deux fentes proches, d'epaisseur c et a la distance entre les deux fentes. Soit b la hauteur des fentes. On obtient, en posant $\overrightarrow{u}(\alpha,\beta,\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2})$:

$$I = 2.|A|^2.b^2.c^2.sin_c^2(\frac{\pi.\beta.b}{\lambda}).sin_c^2(\frac{\pi.\alpha.c}{\lambda}).(1+cos(\frac{2.\pi.\alpha.a}{\lambda}))$$

Chapitre 30

Réseaux

30.1 Définitions

Définition 70 *Soit a l'espacement entre deux fentes, et d l'epaisseur d'une fente, avec a>d. a est appelé pas du réseau. Le nombre de trait est défini par :*

$$n = \frac{1}{a}$$

avec a en millimètre.

30.2 Relation du réseau

30.2.1 Cas de la transmission

Soit i l'angle incident, et θ l'angle de réfraction. On obtient la relation suivante, dit relation du réseau :

$$a(sin(\theta) - sin(i)) = p.\lambda$$

30.2.2 Cas de la réflexion

Soit i l'angle incident, et θ l'angle de réfraction. On pose :

$$\theta' = \theta - \pi$$

La condition du réseau devient comme ça :

$$a.(sin(\theta) + sin(i)) = p.\lambda$$

p est appelé ordre de diffraction.

30.3 Mesure d'une longeur d'onde

30.3.1 Transmission

On peut mesurer D_m, la déviation minimum :

$$|D_m| = 2.|i_m|$$

On montre, par la relation du réseau :

$$\lambda = 2.\frac{sin(\frac{|D_m|}{2})}{p}.a$$

30.3.2 Dispersion

On peut faire en sorte que la mesure soit linéaire :

$$a.sin(\theta_0) = p.\lambda_0$$

On montre que la mesure est dans ce cas linéaire :

$$a.cos(\theta_0)(\theta - \theta_0) = p.(\lambda - \lambda_0)$$

30.4 Calcul de l'éclairement par un réseau de fentes

On montre que l'éclairement est défini par :

$$I = A.(N.b.d)^2.sin_c^2(\frac{\pi.a.d.(sin(\theta) - sin(i))}{\lambda}).\left(\frac{sin(\frac{\pi.N.a.(sin(\theta) - sin(i))}{\lambda})}{N.sin(\frac{\pi.a.(sin(\theta) - sin(i))}{\lambda})}\right)^2$$

Neuvième partie

Chimie

Chapitre 31

Diagramme Potentiel-pH

31.1 Diagramme de prédominance Acide-Base

31.1.1 Définitions de Bronsted

Les définitions d'après Bronsted sont :
→ Acide : Une entité capable de céder un ou plusieurs protons
→ Base : Une entité capable de capter un ou plusieurs protons

31.1.2 Équation de définition

On définit le couple acide-base (AH,A^-) par l'équation : AH + $H_2O \rightleftarrows A^- + H_30^+$

31.1.3 Constante d'acidité

La constante d'acidité, noté K_A, associé à un couple (AH,A^-), est défini comme la constante de réaction de l'équation de définition. D'où :

$$K_A = \frac{[A^-].[H_30^+]}{[AH]}$$

31.1.4 Diagramme de prédominance

D'après la constante d'acidité, on peut définir un diagramme de prédominance, en remarquant que l'on peut écrire cette constante sous la forme :

$$log(\frac{[A^-]}{[AH]}) = pH - pKa$$

31.2 Diagramme de prédominance d'un complexe

31.2.1 Forme générale

On définit une réaction de complexation par :

$$M^+ + n.L \rightarrow ML_n^+$$

On peut définir des constantes de dissosiation successive par :

$$Kd_n = \frac{[ML_{n-1}^+].[L]}{[ML_n^+]}$$

A partir de ces constantes, on peut définir une diagramme de prédominance, avec les Kd1,Kd2,...,Kdn.

31.3 Diagramme d'existence d'un précipité

On définit la réaction de référence comme la réaction de dissolution du précipité. On l'écrit par exemple sous la forme :

$$\underset{\rightarrow}{Fe}(OH)_2 \rightarrow Fe^{2+} + 2.OH^-$$

On définit donc ici la constante de dissolution, noté K_s, par :

$$K_s = [Fe^{2+}].[OH^-]^2$$

On ne peut définir cette constante qu'à l'équilibre, donc en présence du précipité. A partir de cette constante, on peut définir un diagramme de prédominance en fonction du pH.

31.4 Couple oxydant-réducteur

31.4.1 Nombre d'oxydation

En étudiant le nombre d'oxydation, on peut savoir quelle entité est l'oxydant, laquelle est le réducteur, à l'aide de la règle suivante :

→ L'oxydant a le nombre d'oxydation le plus grand

→ Le réducteur a le nombre d'oxydation le plus faible

31.4.2 Domaine d'un oxydant (ou d'un réducteur)

A l'aide de la formule de Nernst, on peut obtenir un diagramme de prédominance. Si le groupe réducteur, ou le groupe oxydant, n'est composé que de solide, alors on établit le diagramme de prédominance en utilisant une concentration de référence par exemple.

Chapitre 32

Phénomènes de corrosion

32.1 L'électrolyse

32.1.1 Généralités

Un électrolyseyr est un système constitué par deux électrodes. L'électrode relié au pole + du générateur est appelé anode. Elle permet l'entrée du courant dans la solution. L'électrode de sortie du courant est la cathode, relié au pole - du générateur. Les cations se déplace vers la catode, les anions vers l'anode.

32.1.2 Lieu des réactions

Sous l'action d'un générateur, l'oxydation a lieu à l'anode, et la réduction a lieu à la cathode.

32.1.3 Condition d'existance d'une électrolyse

Notons U la différence de potentiel appliqué entre les deux électrodes. Notons V_A le potentiel de l'anode, V_C le potentiel de la cathode. Pour que l'électrolyse ai lieu, il faut que :

→ V_A supérieur au potentiel d'équilibre du couple donc le réducteur est oxydé à l'anode.
→ V_C inferieur au potentiel d'équilibre du couple donc l'oxydant est réduit à la cathode.

32.1.4 Réaction possible

A l'anode

Nous avons les possibilités suivantes :

→ L'oxydation des anions en solution
→ L'oxydation des molécules d'eau
→ L'oxydation du matériau de l'électrode

A la cathode

Nous avons les possibilités suivantes :

→ La réduction des cations en solution.
→ La réduction des molécules d'eau.

32.2 Cinétique

32.2.1 Intensité de corrosion

Considérons l'anode. Sur l'anode, nous avons la réaction suivante :

$$ox + z.e^- \rightarrow red$$

La charge élementaire est donc :

$$dq = z.d\varepsilon.Na.e$$

Avec ε l'avancement. On obtient donc, sachant que :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Que :

$$i = z.Na.e.v$$

On peut donc déterminer, juste en mesurant l'intensité, la vitesse de la réaction v.

32.2.2 Courbe intensité-potentiel

Courant anodique, courant cathodique

Courant anodique Dans le cas ou i>0, nous sommes donc quand le cas du courant anodique. On montre que l'on peut écrire, en supposant que la réaction admet un ordre :

$$i_A = k.[Ox]$$

Ceci est vrai, sachant que nous avons établi une relation liant i à v. De plus, nous avons la variation de k avec la température d'après la loi d'Arrhenius :

$$k = k_0.e^{\frac{-E_{m,a}}{R.T}}$$

Courant cathodique De même, à la cathode, nous avons le courant cathodique, défini par :

$$i_c = -k'.[red]$$

Avec toujours :

$$k' = k'_0.e^{\frac{-E_{m,a}}{R.T}}$$

Équilibre

A l'équilibre, il n'y à pas de courant dans le circuit. Nous avons donc les relations suivantes à l'équilibre :

$\rightarrow$ $i_T = i_c + i_a = 0$

$\rightarrow$ $\mu_{ox} = \mu_{red}$

En développant la première condition, on obtient qu'elle implique que :

$$\frac{[ox]}{[red]} = \frac{k_{0c}}{k_{0a}}$$

On obtient donc que le potentiel à une valeur bien définie par $\frac{k_{0c}}{k_{0a}}$ à l'équilibre.

Loi de Bothlet-Volmer

Par définition, nous avons :

$$i = i_a + i_c$$

En développant les énergies d'activation dans la formule d'Arrhenius, on obtient que :

$$i = i_0[e^{-\frac{\Delta G_a^* + \alpha.\Delta E}{RT}} - e^{-\frac{\Delta G_c^* - (1-\alpha).\Delta E}{RT}}]$$

On peut, à partir de cette relation, définir les systèmes lents et les systèmes rapides :
→ Si i_0 est grand, on obtient que le système est rapide.
→ Si i_0 est petit, on obtient que le système est lent.

Courant de diffusions

On montre que le profils intensité-potentiel est borné en intensité. Il admet des intensités limité, appelé intensité de diffusion. Ces limites sont du au fait que le système tend à s'homogénéiser.

32.3 Passivation

32.3.1 Caractérisation d'une anode passivable

On peut passiver une anode, c'est à dire empécher le métal de se corroder. En effet, pour certain métaux, dans le diagramme i=f(E), on montre une zone ou i=0. Dans cette zone, le métal est protégé par une couche d'oxyde qui empèche le contact électronique. On peut aussi procéder au couple galvanique, qui "sacrifie" un métal, souvent peu cher, pour préserver un autre.

32.4 Lutte contre la corrosion

Pour lutter contre la corrosion, nous avons plusieurs plan d'attaque :
→ Utiliser un matérium stable dans l'eau par exemple
→ Modifier le milieu pour empécher l'oxydation
→ Appliquer un revetement : Phosphataion du fer par exemple
→ Revetement métallique :
  → Revetement anodique : Galavanisation par le Zinc. Revetement non sensible au imperfection, le zinc continue à être attaqué.
  → Revetement cathodique : Chromage, qui est passifiable. Cette technique est sensible aux perforations.
→ On peut forcer le sens du courant, pour empécher une réaction. On impose un courant négatif dans l'anode de production des éléctions, c'est à dire à l'oxydation.

Chapitre 33

Cristallographie

33.1 Notions

Définition 71 *Une maille est définie par le triplet de vecteur $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, telque ce triplet soit une base de $\mathbb{R}^3$. Cet triplet n'est pas unique. Soit M et N deux points du cristal. On a :*

$$\overrightarrow{MN} = p.\overrightarrow{a} + q.\overrightarrow{b} + r.\overrightarrow{c}$$

Ce triplet défini un volume élémentaire. Un cristal est composé de multiples mailles periodiquement disposé.

Définition 72 *Une maille simple est défini comme une maille ne contenant que des atomes au sommets de la base. Par extension, on défini la multiplicité d'une base. En général, on préfère les mailles multiples.*

Propriété 27 *Si on veut remplir un volume avec des sphères dur d'une manière dense. On forme, par couche, un réseax hexagonale. On empile les plans hexagonales, de façon décalé. On peut décaler les plans de plusieurs façons. Ceci crée différentes structures.*

Définition 73 *On défini la compacité comme le volume occupé par les atomes sur le volume de la maille :*

$$C = \frac{V_{atomes}}{V_{maille}}$$

Dans le décompte des atomes, il ne faut pas oublier qu'un atome peut appartenir à plusieurs mailles, donc ne pas compter pour 1 mais pour $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

Définition 74 *On appelle site, "trou" dans la structure permettant d'y "loger" une entité. Il existe deux types de sites :*

→ *Site tétraédrique : Ce site est le centre d'un tétraèdre. Il est caractéristé par $z = \frac{a}{4}$ ou $z = \frac{3.a}{4}$. Dans ce cas, on a :*

$$r = R(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1)$$

→ *Site octoédrique : Ce site est le centre d'un octoèdre. Il est caractéristé par :*

$$r = R.(\sqrt{2} - 1)$$

Définition 75 *On appelle coordinance le nombre d'atome le plus proche entourant un atome (par exemple, un atome de cesium entouré de six atome de chlorure dans une structure).*

33.2 Les différentes structures

33.2.1 Structure dense

Cubique à face centré : CFC

On défini cette structure comme un cube, possédant un atome à chaqu'un de ces sommets, et un au centre de chaques faces et un au centre du cube. Dans cette structure, on obtient que le rayon des atomes est donnée par :

$$R = \frac{a.\sqrt{2}}{4}$$

On montre que la compacité de cette structure est de :

$$C = 0.74$$

C'est la structure la plus compact que l'on peut obtenir avec des sphères. D'autre part, on montre que l'on peut obtenir la valeur de "a" en connaisant la masse volumique du cristal.

Structure hexagonale compact

On défini cette structure comme un emplilement décalé d'hexagone possédant un atome sur chaqu'un de ces sommet, et un au centre de l'hexagone.

33.2.2 Structure non compact

On dit d'une structure qu'elle est non compact si sa compacité est inférieur à 0.74.

Cubique centré

On défini cette structure comme un cube, possédant un atome à chaqu'un de ces sommets et un au centre du cube. Le rayon des atomes est donnée par :

$$R = \frac{a.\sqrt{3}}{4}$$

La compacité est de :

$$C = 0.68$$

33.3 Exemples de cristaux à connaitre

33.3.1 Chlorure de Cesium - CsCl

Dans ce cristal, le chlorure est disposé en structure cubique centré. Le césium est aussi disposé en structure cubique centré, déclalé par rapport au chlorure.

33.3.2 Chlorure de sodium

Le chlorure est disposé en structure cubique à face centré. Le sodium en est de même, décalé par rapport au chlorure.

33.3.3 Sulfure de zinc

Il existe deux formes de cette structure :
→ Forme Blende : Forme du diamant
→ Forme Wurtzitz : Structure hexagonale compacte (Un site tétraédrique sur deux de occupé)

Dixième partie

Annexe

Annexe A

Analyse Vectorielle

A.1 Opérateur

A.1.1 Opérateur gradient

Définition 76 *L'opérateur gradient est défini par :*

$$df = \overrightarrow{grad}(f).\overrightarrow{dl}$$

Un moyen pour retenir les expressions suivant est de penser qu'on divise les dérivées par les éléments non différentiel dans l'expression du $\overrightarrow{dl}$, dans le système de coordonnée considéré. Par exemple, en cylindrique :

$$\overrightarrow{dl} = dr.\overrightarrow{u_r} + r.d\theta.\overrightarrow{u_\theta} + dz.\overrightarrow{u_z}$$

On divise donc la coordonnée du gradient selon u_θ par r.

En coordonnées cartesienne

$$\overrightarrow{grad}(f) = \left| \begin{array}{c} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right.$$

En coordonée cylindrique

$$\overrightarrow{grad}(f) = \left| \begin{array}{c} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \\ \dfrac{1}{r}.\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right.$$

En coordonnée sphérique

$$\overrightarrow{grad}(f) = \left| \begin{array}{c} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}.\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r.sin(\theta)}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \end{array} \right.$$

A.1.2 Opérateur Divergence

En coordonée cartesienne

$$div(\overrightarrow{D}) = \frac{\partial(\overrightarrow{D}.\overrightarrow{u_x})}{\partial x} + \frac{\partial(\overrightarrow{D}.\overrightarrow{u_y})}{\partial y} + \frac{\partial(\overrightarrow{D}.\overrightarrow{u_z})}{\partial z}$$

A.1.3 Opérateur Laplacien scalaire

Définition 77 *On défini le Laplacien scalaire par :*

$$\Delta f = div(\overrightarrow{grad}(f))$$

En coordonnée cartesienne

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

A.1.4 Operateur Laplacien vecteur

En coordonnée cartesienne

$$\overrightarrow{\Delta(\overrightarrow{D})} = \left| \begin{array}{l} \Delta(\overrightarrow{D}.\overrightarrow{u_x}) \\ \Delta(\overrightarrow{D}.\overrightarrow{u_y}) \\ \Delta(\overrightarrow{D}.\overrightarrow{u_z}) \end{array} \right.$$

A.1.5 Operateur Rotationnel

En coordonée cartesienne

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{D}) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial D_z}{\partial y} - \dfrac{\partial D_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial D_x}{\partial z} - \dfrac{\partial D_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial D_y}{\partial x} - \dfrac{\partial D_x}{\partial y} \end{array} \right.$$

A.1.6 Opérateur Nabla

En coordonnée cartesienne

$$\overrightarrow{\nabla} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{array} \right.$$

Propriété 28 *A partir de cet opérateur, on peut retrouver les autres opérateurs :*

$$\overrightarrow{grad}(f) = \overrightarrow{\nabla}(f)$$
$$div(\overrightarrow{D}) = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{D}$$
$$\Delta f = \overrightarrow{\nabla}^2(f)$$
$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{D}) = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{D}$$

A.2 Propriétés, formules et théorèmes

A.2.1 Propriétés des opérateurs

Nous avons les propriétés suivantes :

$\rightarrow$ $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}(f)) = \overrightarrow{0}$

$\rightarrow$ $div(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{D}) = 0$

A.2.2 Formules

Nous avons les formules suivantes :

$\rightarrow$ $\overrightarrow{grad}(fg) = f.\overrightarrow{grad}(g) + g.\overrightarrow{grad}(f)$

$\rightarrow$ $div(f.\overrightarrow{D}) = f.div(\overrightarrow{D}) + \overrightarrow{grad}(f).\overrightarrow{D}$

$\rightarrow$ $\overrightarrow{rot}(f.\overrightarrow{D}) = f.\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{D}) + \overrightarrow{grad}(f) \wedge \overrightarrow{D}$

$\rightarrow$ $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{D}) = \overrightarrow{grad}(div\overrightarrow{D}) - \overrightarrow{\Delta(\overrightarrow{D})}$

A.2.3 Théorème

Théorème de Green-Ostrogradski ou théorème de la Divergence

Soit Σ une surface fermé. On obtient que :

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{D}.\overrightarrow{n}.dS = \iint_{Vol} div(\overrightarrow{D}).dV$$

Avec Vol le volume interieur de Σ.

Théorème de Stockes

Soit Σ une surface quelconque, de contours Γ :

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{D}.\overrightarrow{dl} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{D}).\overrightarrow{n}.dS$$

Annexe B

Calcul d'une resistance ou d'une capacité

B.1 Calcul d'une capacité

Par définition, nous avons :

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B}$$

On détermine les symétries du problème, pour simplifier la détermination de $\overrightarrow{E}$, puis on utilise le théorème de Gauss pour le déterminer.
On utilise ensuite le fait que $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$. Et on détermine donc $V_A - V_B$. On obtient C.

B.2 Calcul d'une résistance

Par définition, nous avons :

$$V_A - V_B = Ri$$

On utilise les deux égalités suivantes :

$$\begin{cases} i = \iint \overrightarrow{j}.\overrightarrow{n}\,dS \\ V_A - V_B = \int_a^b \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} \end{cases}$$

On fait l'hypothèse conducteur ohmique :

$$\overrightarrow{j} = \sigma \overrightarrow{E}$$

On utilise les symétries pour simplifier $\overrightarrow{E}$, donc $\overrightarrow{j}$. On détermine R.

B.3 Vérification

Si on a R ou C, on peut vérifier le résultat de l'autre, car dans le cas d'une topologie proche, nous avons :

$$RC = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$$

Table des matières

Licence **i**

Avant-propos **iii**

Remerciements **v**

I Electricité **1**

1 Fonction de transfert **3**
1.1 Modèle du quadripôles . . . 3
1.2 Fonction de transfert complexe . . . 3
1.2.1 Amplitude . . . 3
1.2.2 Gain en décibel . . . 3
1.2.3 Bande passante . . . 4
1.2.4 Phase . . . 4
1.3 Représentations . . . 4
1.3.1 Diagramme de Bode . . . 4
1.3.2 Diagramme de Nykwest . . . 4
1.4 Lien entre régime transitoire et fonction de transfert . . . 4
1.4.1 Précaution d'utilisation . . . 4
1.4.2 Principe . . . 4
1.5 Type de réponses . . . 4
1.5.1 Réponse indicielle . . . 4
1.5.2 Réponse impulsionelle . . . 4
1.6 Réponse d'un filtre à un signal périodique . . . 5
1.7 Caractère intégrateur ou dérivateur d'un filtre . . . 5
1.7.1 Filtre intégrateur . . . 5
1.7.2 Filtre dérivateur . . . 5

2 Analyse d'un signal **7**
2.1 Signal périodique . . . 7
2.1.1 Caractéristique principale . . . 7
2.2 Décomposition d'un signal périodique en fonction sinusoïdale . . . 8
2.2.1 Théorème de Fourier . . . 8
2.2.2 Identité de Parseval . . . 8
2.2.3 Transformée de Fourier . . . 9

II Electrostatique et Electrocinétique **11**

3 Forme locale de l'électrostatique **13**
3.1 Champs électrique . . . 13
3.1.1 Définitions . . . 13
3.2 Potentiel électrique . . . 14
3.2.1 Le champs électrique est un gradiant . . . 14
3.2.2 Calcul direct du potentiel . . . 15
3.2.3 Condition pour qu'un champs de vecteurs soit un gradiant . . . 16
3.2.4 Lien entre direction de champs et surface equipotentielle . . . 16
3.3 Théorème de Gauss . . . 16
3.3.1 Forme locale du théorème de Gauss . . . 17
3.3.2 Équation de Poisson . . . 18

4 Conducteur électrique en équilibre **19**
4.1 Définitions . . . 19
4.1.1 Conducteur . . . 19
4.2 Propriétés de l'équilibre pour un conducteur donné . . . 19
4.2.1 Conséquence des définitions globales . . . 19
4.2.2 Cavité vide de charge dans un conducteur . . . 20
4.2.3 Champs électrique à la surface du conducteur . . . 20
4.3 Système de conducteur en équilibre . . . 20
4.3.1 Il y a unicité des solutions . . . 20
4.3.2 Conducteur seul dans l'espace . . . 20
4.3.3 Influence électrique . . . 21
4.4 Condensateur . . . 21
4.4.1 Capacité d'un condensateur . . . 21

5 Complément d'électrocinétique **23**
5.1 Définitions . . . 23
5.1.1 Intensité de courant . . . 23
5.1.2 Vecteur densité surfacique de courant . . . 23
5.1.3 Équation de continuité . . . 24
5.2 Expression de la puissance reçu par un dipôle . . . 24
5.3 Conducteur ohmique . . . 25
5.3.1 Loi d'Ohm . . . 25
5.3.2 Résistance électrique . . . 25
5.3.3 Effet Joule . . . 26

III Thermodynamique **27**

6 Rappel et complément - Thermodynamique classique **29**
6.1 Principe . . . 29
6.1.1 Principe zéro . . . 29
6.1.2 Premier Principe . . . 29
6.1.3 Second principe . . . 30
6.2 Quelques notions de mécanique statique . . . 30
6.2.1 Modèle cinétique du gaz parfait . . . 30
6.2.2 Interprétation statistique de l'entropie . . . 31
6.3 Gaz parfait . . . 31
6.3.1 Équation d'état des gaz parfaits . . . 31
6.3.2 Loi de Joules . . . 31
6.3.3 Entropie . . . 32
6.4 Machines Thermiques . . . 32

7 Potentiel Chimique **33**
7.1 Enthalpie libre . . . 33
7.1.1 Travail récupérable dans une transformation monotherme, monobar . . . 33
7.1.2 Enthalpie libre . . . 33
7.1.3 Relation de Gibbs-Helmotz . . . 33
7.2 Potentiel chimique . . . 34
7.2.1 Relation d'Euler . . . 34
7.2.2 Relation de Gibbs-Duhem . . . 34
7.2.3 Équilibre d'un corps présent sous deux phases . . . 34
7.3 Expression du potentiel chimique . . . 34
7.3.1 Gaz parfait pur . . . 34
7.3.2 Gaz réel pur . . . 35
7.3.3 Gaz parfait dans un mélange de gaz parfait . . . 35
7.3.4 Phase condensée pur . . . 35
7.3.5 Mélange idéale - Mélange homogène . . . 35
7.3.6 Solution diluée . . . 35

8 Équilibre liquide-vapeur d'un mélange binaire **37**
8.1 Équilibre liquide-vapeur pour un corps pur . . . 37
8.1.1 Équilibre d'un corps pur sous deux phases . . . 37
8.1.2 Chaleur latente de changement d'état . . . 37
8.1.3 Relation de Clapeyron . . . 38
8.2 Équilibre liquide-vapeur d'un mélange binaire . . . 38
8.3 Mélange de deux constituants totalements miscible à l'état liquide . . . 38
8.3.1 Mélange idéale . . . 38
8.3.2 Mélange réel . . . 39

9 Grandeurs thermochimique standards **41**
9.1 Réaction chimiques . . . 41
9.1.1 Équation bilan . . . 41
9.1.2 Avancement de la réaction . . . 41
9.1.3 Chaleur de réaction . . . 41
9.2 Enthalpie de réaction . . . 42
9.2.1 Variation d'enthalpie au cours d'une réaction . . . 42
9.2.2 Enthalpie standard de réaction . . . 42
9.2.3 Relation de Kirchoff . . . 42
9.3 Enthalpie de formation d'un corps pur . . . 43
9.3.1 Détermination experimentale de $\Delta^r H$ . . . 43
9.3.2 Enthalpie de formation . . . 43
9.4 Énergie interne de réaction . . . 43
9.5 Entropie standard de réaction . . . 43
9.5.1 Entropie absolue . . . 43

10 Equilibre chimique **45**
10.1 Affinité chimique . . . 45
10.1.1 Variation de l'enthalpie libre au cours d'une réaction monobar et monotherme 45
10.1.2 Définition . . . 45
10.1.3 Prévision de l'évolution de la réaction . . . 45
10.1.4 Expression de A . . . 46
10.1.5 Relation de Gulberg et Waages . . . 46
10.2 Déplacement de l'équilibre . . . 46
10.2.1 Influence d'une variation de température . . . 46
10.2.2 Influence d'une variation de pression . . . 47
10.2.3 Influence de l'ajout d'un constituant . . . 47
10.3 Potentiel d'oxydo-réduction . . . 47
10.3.1 Force électromotrice d'une pile . . . 47

10.3.2 Relation de Nernst . . . 48
10.4 Variance . . . 48

11 Diagramme d'Ellingham **49**
11.1 Construction du diagramme . . . 49
11.1.1 Oxyde . . . 49
11.1.2 L'approximation d'Elligham . . . 49
11.2 Utilisation du Diagramme d'Elligham . . . 50
11.2.1 Prévison des réactions . . . 50
11.2.2 Domaine d'existence . . . 50

12 Transferts Thermiques **51**
12.1 Introduction . . . 51
12.1.1 Irreversibilité . . . 51
12.1.2 Les différents type de transfert thermique . . . 51
12.1.3 Hypothèse de l'équilibre thermique local . . . 51
12.1.4 Vecteur densité surfacique de flux de puissance . . . 52
12.2 Conduction . . . 52
12.2.1 Loi de Fourier . . . 52
12.2.2 Équation de la chaleur . . . 52
12.2.3 Analogie Electrocinétique . . . 52
12.2.4 Convection . . . 52
12.2.5 Rayonnement thermique . . . 53
12.2.6 Loi de Planck . . . 54
12.3 Thermodynamique du rayonnement . . . 55
12.3.1 Pression de radiation . . . 56
12.3.2 Relation entre la pression et l'énergie interne . . . 56
12.3.3 Calcul de U . . . 56
12.3.4 Calcul de l'entropie . . . 56
12.3.5 Facteur de forme . . . 56
12.3.6 Echange radiatif entre deux sphères . . . 57

IV Magnétostatique **59**

13 Loi de Biot et Savart **61**
13.1 Distribution linéique . . . 61
13.2 Distribution volumique . . . 61
13.3 Propriété de symétrie . . . 61

14 Potentiel Vecteur **63**
14.1 La divergence du champs magnétique est nul . . . 63
14.1.1 Calcul pour le champs crée par un élément de circuit . . . 63
14.1.2 Calcul utilisant l'analyse vectorielle . . . 63
14.2 Défintions du potentiel vecteur . . . 64
14.2.1 Jauge dite de Coulomb . . . 64
14.3 Théorème de Stokes . . . 64
14.4 Analogie entre le potentiel vecteur et le potentiel scalaire . . . 65
14.5 Champ magnétique au voisinage d'un axe d'anti-symétrie . . . 65

15 Théorème d'Ampère **67**
15.1 Laplacien vecteur . . . 67
15.2 Forme locale du théorème d'Ampère . . . 67
15.3 Forme global du théorème d'Ampère . . . 67

16 Champs magnétique crée par un dipole magnétique **69**
16.1 Définitions et propriétés 69
16.2 Analogie entre dipole électrique et dipole magnétique 69

V Electromagnétisme **71**

17 Actions électromagnétique exercées sur un circuit **73**
17.1 Effet Hall 73
17.2 Force de Laplace 74
17.2.1 Expression 74
17.2.2 Définitions légale de l'Ampère 74
17.3 Torseur des forces exercées sur un circuit 74
17.3.1 Energie d'interaction entre le champ et un circuit 74
17.3.2 Dipole magnétique dans un champs magnétique uniforme 75
17.3.3 Dipole magnétique dans un champs magnétique non-uniforme 76
17.3.4 Analogie entre dipole magnétique et dipole électrique 76

18 Induction Electromagnétique **79**
18.1 Loi de Faraday 79
18.1.1 Expression de Faraday 79
18.1.2 Déplacement d'un élément de circuit dans un champs permanent 79
18.1.3 Enoncé 80
18.1.4 Quantité d'électricité induit 81
18.2 Induction mutuelle de deux circuits 81
18.2.1 Coefficient d'induction mutuelle 81
18.2.2 Auto-induction 82

19 Équations de Maxwell **83**
19.1 Les quatres équations 83
19.1.1 Flux magnétique 83
19.1.2 Équation de Maxwell-Faraday 83
19.1.3 Équation de Maxwell-Gauss 83
19.1.4 Équation de Maxwell-Ampère 84
19.1.5 Explication de la modification 84
19.2 Propriétés des champs 85
19.2.1 Conditions limites 85
19.2.2 Équations de propagation des champs 86
19.3 Potentiels 87
19.3.1 Définitions 87
19.3.2 Conditions de Jauge 87

20 Énergie Electrostatique **89**
20.1 Énergie d'une charge dans un champs électrique exterieur 89
20.2 Énergie électrique d'un système de charges fixes 89
20.2.1 Cas de deux charges 89
20.2.2 Cas d'un ensemble de N charges 90
20.2.3 Généralisation 90
20.2.4 Cas particulier 90
20.3 Densité d'énergie électrostatique 91
20.4 Énergie Magnétique et Électromagnétique 91
20.4.1 Densité volumique d'énergie magnétique 91
20.4.2 Bilan d'énergie dans un volume élémentaire 91
20.4.3 Vecteur de Poynting 91
20.5 L'essentiel 92
20.5.1 Équation de Maxwell 92
20.5.2 Force de Lorentz 92

20.5.3 Autres expressions 92

21 Régime quasi-stationnaire **93**
21.1 Approximation des régimes quasi-stationnaire 93
21.1.1 Définitions 93
21.1.2 Approximation du régime quasi-stationnaire électrique 93
21.1.3 Approximation du régime quasi-stationnaire magnétique 93
21.2 Cas des conducteurs ohmique 94
21.2.1 Loi d'ohm 94
21.2.2 Densité volumique de charge 94
21.2.3 Cas du régime sinusoïdale 94
21.2.4 Interface conducteur-vide 94
21.2.5 Cas du conducteur parfait 94

VI Onde Electromagnétique **95**

22 Ondes électromagnétique **97**
22.1 Solution des équations de propagations 97
22.1.1 Équation de propagation 97
22.1.2 Ondes planes 97
22.1.3 Onde sphérique 98
22.2 Onde électromagnétique plane progressive 98
22.2.1 Les champs E et B sont transverse 98
22.2.2 Les champs sont orthogonaux 98
22.2.3 Force exercée sur une particule chargée par l'onde 98
22.2.4 Vecteur de Poynting 98
22.3 Onde plane progressive monochromatique 99
22.3.1 Propriétés 99
22.3.2 Polarisation 100

23 Propagation d'une onde plane électromagnétique progressive monochromatique dans un milieu matériel **101**
23.1 Plasma 101
23.1.1 Position du problème 101
23.1.2 Expression de j 101
23.1.3 Équation de Maxwell 102
23.1.4 Étude des diverses solutions 102
23.2 Vitesse de phase - Vitesse de groupe 103
23.2.1 Vitesse de phase 103
23.2.2 Vitesse de groupe 103
23.2.3 Vitesse de deplacement d'un signal 103
23.3 Conducteur ohmique 104
23.3.1 Approximation des régimes quasi-stationnaire 104
23.3.2 Expression du champs électrique 105
23.3.3 Puissance absorbée par une tranche de conducteur 105
23.3.4 Onde transmise - Onde réfléchie 105

24 Ondes électromagnétiques "confinées" avec conditions aux limites **107**
24.1 Réflexion d'une onde plane progressive monochromatique sur un plan conducteur parfait 107
24.1.1 Réflexion normale 107
24.1.2 Réflexion oblique 108
24.2 Propagation guidée entre deux plans parallèle 109
24.2.1 Champs électrique transverse normale aux plaques 109
24.2.2 Champs électrique parallèle aux plaques 109
24.2.3 Interprétation en termesde superposition d'onde plane 110

VII Mécanique 111

25 Mécanique du solide 113

25.1 Lois de la mécanique d'un système materiel . . . 113
25.1.1 Modélisation d'un système matériel . . . 113
25.1.2 Théorème du centre d'inertie (ou de la résultante cinétique) . . . 113
25.1.3 Référentiel Barycentrique . . . 113
25.1.4 Système ouvert . . . 114
25.2 Théorème du moment cinétique . . . 114
25.2.1 Moment cinétique . . . 114
25.2.2 Théorème de Koening . . . 114
25.2.3 Théorème du moment cinétique en un point fixe . . . 114
25.2.4 Théorème du moment cinétique en un point mobile . . . 115
25.2.5 Représentation torsorielle . . . 115
25.3 Théorème de l'énergie cinétique . . . 115
25.3.1 Énergie cinétique . . . 115
25.3.2 Théorème de Koening . . . 115
25.3.3 Théorèmes . . . 115
25.4 Cas du solide . . . 115
25.4.1 Cinétique . . . 116
25.4.2 Torseur cinématique . . . 116
25.4.3 Moment d'inertie par rapport à un axe . . . 116
25.4.4 Energie cinétique . . . 116
25.5 Contact entre deux solides . . . 117
25.5.1 Types de mouvement relatif . . . 117
25.5.2 Vitesse de glissement . . . 117
25.5.3 Lois de Coulomb pour le glissement . . . 117

VIII Optique physique 119

26 La lumière 121

26.1 Modèle scalaire de la lumière . . . 121
26.1.1 Amplitude lumineuse . . . 121
26.1.2 Notion d'onde . . . 121
26.1.3 Relation d'ondes - Rayon lumineux . . . 121
26.2 Vision . . . 122
26.2.1 Formation des images . . . 122
26.2.2 Sources de Lumière . . . 122

27 Interférence non localisées de deux ondes 123

27.1 Superposition de deux ondes sphérique progressive monochromatique . . . 123
27.1.1 Calcul de l'éclairement . . . 123
27.1.2 Franges d'interférences . . . 124
27.2 Dispositif diviseur d'onde . . . 124
27.2.1 Impossibilité de deux sources cohérentes . . . 124
27.2.2 Miroir de Fresnel . . . 124
27.2.3 Autres dispositifs . . . 124
27.3 Conditions de visibilité des franges - Cohérence . . . 125
27.3.1 Cohérence temporelle d'une sources . . . 125
27.3.2 Interférences à grande différence de marche . . . 125
27.3.3 Cohérence spatiale d'une expérience d'interférence . . . 126

28 Interféromètre de Michelson **127**
28.1 L'interféromètre . . . 127
28.1.1 Description . . . 127
28.1.2 Cas de la source ponctuelle . . . 127
28.1.3 Les différents cas . . . 127
28.1.4 Michelson en "lame d'air" . . . 128
28.1.5 Sources étendue . . . 128
28.1.6 Anneau de Haidinger . . . 129
28.2 Localisation des franges d'interférence . . . 129
28.2.1 Dans le cas d'une source ponctuelle . . . 129
28.2.2 Dans le cas d'une source étendue . . . 129
28.3 Michelson en "coin d'air" . . . 130
28.3.1 Etude du cas d'une source étendue, à l'infini . . . 130
28.3.2 Elargissement de la source . . . 130
28.3.3 Source non strictement monochromatique . . . 130
28.4 Franges de Fizeau, ou d'égale épaisseur . . . 131
28.5 Interféromètre réel . . . 131
28.5.1 Déphasage . . . 131

29 Diffraction **133**
29.1 Principe de Huygens-Fresnel . . . 133
29.1.1 Énoncé de Huygens . . . 133
29.1.2 Énoncé de Fresnel . . . 133
29.2 Diffraction à l'infini d'une onde plane monochromatique par un diaphragme rectangulaire . . . 133
29.2.1 Position du problème . . . 133
29.2.2 Calcul de l'éclairement . . . 133
29.2.3 Etude de la solution . . . 133
29.2.4 Montage à deux lentilles . . . 134
29.2.5 Si l'onde incident n'est plus perpendiculaire au diaphragme . . . 134
29.3 Diffraction par un diaphragme plan . . . 135
29.3.1 Approximation de Frenel et de Fraunhofer . . . 135
29.4 Diffraction au voisinage d'une image optique . . . 136
29.4.1 Position du problème . . . 136
29.4.2 Approximation de Fresnel . . . 136
29.4.3 Calcul de l'éclairement . . . 136
29.4.4 Interprétation . . . 136
29.5 Fente de Young . . . 136

30 Réseaux **137**
30.1 Définitions . . . 137
30.2 Relation du réseau . . . 137
30.2.1 Cas de la transmission . . . 137
30.2.2 Cas de la réflexion . . . 137
30.3 Mesure d'une longeur d'onde . . . 137
30.3.1 Transmission . . . 137
30.3.2 Dispersion . . . 138
30.4 Calcul de l'éclairement par un réseau de fentes . . . 138

IX Chimie **139**

31 Diagramme Potentiel-pH **141**
31.1 Diagramme de prédominance Acide-Base . . . 141
31.1.1 Définitions de Bronsted . . . 141
31.1.2 Équation de définition . . . 141

31.1.3 Constante d'acidité . . . 141
31.1.4 Diagramme de prédominance . . . 141
31.2 Diagramme de prédominance d'un complexe . . . 141
31.2.1 Forme générale . . . 141
31.3 Diagramme d'existence d'un précipité . . . 142
31.4 Couple oxydant-réducteur . . . 142
31.4.1 Nombre d'oxydation . . . 142
31.4.2 Domaine d'un oxydant (ou d'un réducteur) . . . 142

32 Phénomènes de corrosion **143**
32.1 L'électrolyse . . . 143
32.1.1 Généralités . . . 143
32.1.2 Lieu des réactions . . . 143
32.1.3 Condition d'existance d'une électrolyse . . . 143
32.1.4 Réaction possible . . . 143
32.2 Cinétique . . . 144
32.2.1 Intensité de corrosion . . . 144
32.2.2 Courbe intensité-potentiel . . . 144
32.3 Passivation . . . 145
32.3.1 Caractérisation d'une anode passivable . . . 145
32.4 Lutte contre la corrosion . . . 145

33 Cristallographie **147**
33.1 Notions . . . 147
33.2 Les différentes structures . . . 148
33.2.1 Structure dense . . . 148
33.2.2 Structure non compact . . . 148
33.3 Exemples de cristaux à connaitre . . . 148
33.3.1 Chlorure de Cesium - CsCl . . . 148
33.3.2 Chlorure de sodium . . . 148
33.3.3 Sulfure de zinc . . . 148

X Annexe **149**

A Analyse Vectorielle **151**
A.1 Opérateur . . . 151
A.1.1 Opérateur gradient . . . 151
A.1.2 Opérateur Divergence . . . 152
A.1.3 Opérateur Laplacien scalaire . . . 152
A.1.4 Operateur Laplacien vecteur . . . 152
A.1.5 Operateur Rotationnel . . . 152
A.1.6 Opérateur Nabla . . . 153
A.2 Propriétés, formules et théorèmes . . . 153
A.2.1 Propriétés des opérateurs . . . 153
A.2.2 Formules . . . 153
A.2.3 Théorème . . . 153

B Calcul d'une resistance ou d'une capacité **155**
B.1 Calcul d'une capacité . . . 155
B.2 Calcul d'une résistance . . . 155
B.3 Vérification . . . 155