

ROYAUME DU MAROC



MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DU PRÉSCOLAIRE ET DES SPORTS



ASSOCIATION DES PROFESSEURS DES SCIENCES PHYSIQUES DE CLASSES PRÉPARATOIRES AUX
GRANDES ÉCOLES

CLASSE PRÉPARATOIRES AUX GRANDES ÉCOLES

SCIENCES PHYSIQUES

Annales Corrigées des Concours

Session 2022

Bulletin 2022



Avec la contribution de :

M. AFEKIR

LYCÉE D'EXCELLENCE MOHAMED VI - BENGUÉRIR
cpgeafek@gmail.com

A. TIGHIOUART

LYCÉE SALMANE AI FARISSI - SALÉ
tighiouartaicha0@gmail.com

D. LAHBOUB

CRMEF - CPA DE MARRAKECH
lahboub.driss.agr@gmail.com

S. GARMOUM

LYCÉE RÉDA SLAOUI - AGADIR
garmoumsmail@gmail.com

ÉPREUVE DE PHYSIQUE 1 -MP

L'anémométrie à fil chaud

L'anémométrie à fil chaud est une technique permettant de mesurer la vitesse d'écoulement d'un fluide. Elle est basée sur l'influence de la vitesse d'écoulement du fluide sur le transfert thermique conducto-convectif d'un solide conducteur plongé dans ce fluide.

Le système le plus couramment utilisé est un petit fil cylindrique, d'un diamètre typique d_w de l'ordre de quelques micromètres, parcouru par un courant et donc chauffé par effet Joule.

Ce petit fil est fixé à des broches d'alimentation par l'intermédiaire d'une gaine d'adaptation qui permet notamment l'alimentation du fil et de fixer la longueur active du fil, notée L_w qui est ici de l'ordre de quelques millimètres.

Quelques valeurs numériques concernant certaines caractéristiques physiques du fil chaud sont rassemblées dans le tableau ci-dessous.

Matériau	Résistivité à 20°C : ρ_{20} [$\mu\Omega.\text{cm}$]	Conductivité thermique : λ_w [$\text{W.cm}^{-1}.\text{K}^{-1}$]	Masse volumique : μ_w [kg.m^{-3}] $\times 10^4$	Capacité thermique massique : c_w [$\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$]
Tungstène	5,5	1,9	1,93	0,14
Platine	9,8	0,72	2,15	0,13
Platine-iridium	32	0,17	2,16	0,13

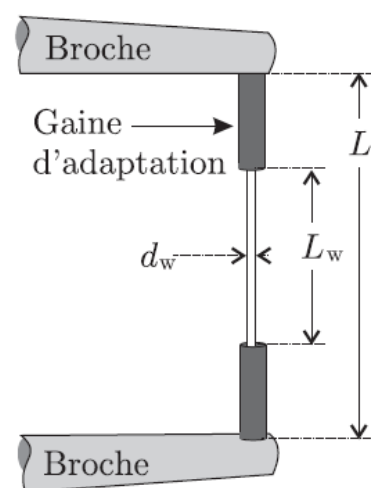


Figure 1: Anémomètre

Les applications numériques seront réalisées avec au plus 2 chiffres significatifs.

I.— Étude énergétique de l'anémomètre

I.A.— Bilan d'énergie dans le fil chaud

Le fil conducteur (en tungstène par exemple) est parcouru par un courant électrique continu d'intensité I . Il est plongé dans un fluide en écoulement. On utilisera les notations suivantes :

- Caractéristiques du fil (que l'on repère avec l'indice « w » pour *wire* en anglais) : masse volumique μ_w , capacité thermique massique c_w , température T_w , résistivité (inverse de la conductivité) électrique ρ_w , conductivité thermique λ_w , longueur L_w et diamètre d_w .
- Caractéristiques du fluide (généralement de l'air que l'on repère lorsqu'il a ambiguïté avec l'indice « f » pour fluide) et de l'écoulement : masse volumique μ_f , viscosité η , température T_f , pression p_f , vitesse de l'écoulement $\vec{V}$. Ces caractéristiques sont supposées constantes pendant la mesure.

Si l'on note h le coefficient de transfert thermique conducto-convectif, la puissance thermique surfacique cédée par le fil au fluide à travers la surface S est donnée par la loi de NEWTON :

$$\frac{\delta \dot{Q}_f}{dS} = h(T_w - T_f) \quad (1)$$

On notera (Ox) l'axe du fil, ses extrémités étant situées en $x = -L_w/2$ et $x = +L_w/2$.

□—1. Rappeler la loi d'Ohm locale. Définir les grandeurs intervenant dans cette loi et donner leurs unités usuelles. Établir l'expression de la résistance électrique totale, notée R_w , du fil en fonction de ρ_w , L_w et d_w .

En déduire la puissance $\mathcal{P}_j$ dissipée par effet Joule dans le fil en fonction de ρ_w , L_w et d_w et I , puis la puissance volumique dissipée par effet Joule : $\mathcal{P}_v = \frac{d\mathcal{P}_j}{d\tau}$.

□—2. Rappeler la loi de Fourier de la conduction thermique. Définir les grandeurs intervenant dans cette loi. On dit souvent qu'il s'agit d'une loi phénoménologique. Que cela signifie-t-il ? La température est supposée homogène sur chaque section du fil d'abscisse x . Que peut-on en déduire ?

Établir l'équation de diffusion thermique dans le cas d'un fil à la température $T(x, t)$ où seuls les transferts thermiques par conduction ont lieu.

On se place en régime permanent dans tout le reste de la partie I.— et on suppose la vitesse $\vec{V}$ de l'écoulement uniforme et indépendant du temps. En plus des transferts thermiques par conduction, on prend en compte les transferts thermiques par conducto-convection et ceux provenant de l'effet Joule. Les transferts thermiques sont intégrés dans le terme conducto-convectif.

□—3. Dans la loi de Newton (1), la grandeur h dépend de la vitesse $\vec{V}$ de l'écoulement. Quelle est son unité ? Expliquer qualitativement comment varie h en fonction de $V = \|\vec{V}\|$. Expliquer alors comment évolue T_w quand V augmente.

□—4. En effectuant un bilan énergétique sur un élément de volume de fil compris entre les abscisses x et $x + dx$, établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T_w(x, t)$.

La résistivité du fil dépend en fait de la température T_w de ce dernier. Expérimentalement, on mesure que si le fil est en contact avec un fluide à la température T_f , sa résistivité ρ_w vérifie la relation :

$$\rho_w = \rho_f [1 + \alpha(T_w - T_f)] \quad (2)$$

où ρ_f est la résistivité à la température du fluide et $\alpha = 10^{-3} K^{-1}$ est un coefficient expérimental supposé constant. On bote enfin $T_1(x) = T_w(x) - T_f$.

□—5. Mettre l'équation obtenue à la question □—4 sous la forme :

$$\frac{d^2 T_1(x)}{dx^2} + K_1 T_1(x) + K_2 = 0 \quad (3)$$

Exprimer les constantes K_1 et K_2 en fonction de l'intensité I et des caractéristiques du fil, du fluide et de l'écoulement. On montrera, en particulier, que $\alpha K_2 = K_1 + 4h/(\lambda_w d_w)$.

Dans la plupart des anémomètres à fil chaud, K_1 est négatif. Déterminer la condition correspondante sur le coefficient conducto-convectif h . On se place dans ce cas dans toute la suite et on pose :

$$\ell_c = \frac{1}{\sqrt{|K_1|}}$$

On considère que le contact thermique assuré par les gaines d'adaptation entre les extrémités du fil et les broches de l'anémomètre (voir FIGURE 1) se fait sans résistance thermique (contact parfait). Les broches et les gaines sont à la température T_f du fluide.

□—6. Rappeler la définition d'une résistance thermique ainsi que son unité. Quelle est la conséquence d'un contact sans résistance thermique ?

Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (3).

En tenant compte des conditions aux limites dans le problème et de sa symétrie, montrer que $T_1(x)$ s'exprime assez simplement à partir de la fonction cosinus hyperbolique. En déduire l'expression du profil de température $T_w(x)$ dans le fil de la sonde en fonction de x , ℓ_c , K_2 , T_f et L_w .

□—7. Déterminer la puissance thermique $\dot{Q}_g$ cédée par le fil à l'ensemble des deux gaines d'adaptation en fonction de ℓ_c , K_2 , L_w , λ_w et d_w .

□—8. Montrer que la moyenne spatiale $\langle T_w \rangle$ de la température du fil s'écrit selon la relation :

$$\langle T_w \rangle = T_f + K_2 \ell_c^2 \left[1 - \Lambda \tanh \left(\frac{L_w}{2\ell_c} \right) \right]$$

dans laquelle on précisera l'expression du paramètre Λ .

La FIGURE 2 représente la distribution de température dans le fil chaud pour différentes valeurs du rapport $k = \frac{L_w}{2\ell_c}$. La fonction tracée est :

$$f(y) = \frac{T_w - T_f}{\langle T_w \rangle - T_f} \quad \text{avec} \quad y = x/L_w$$

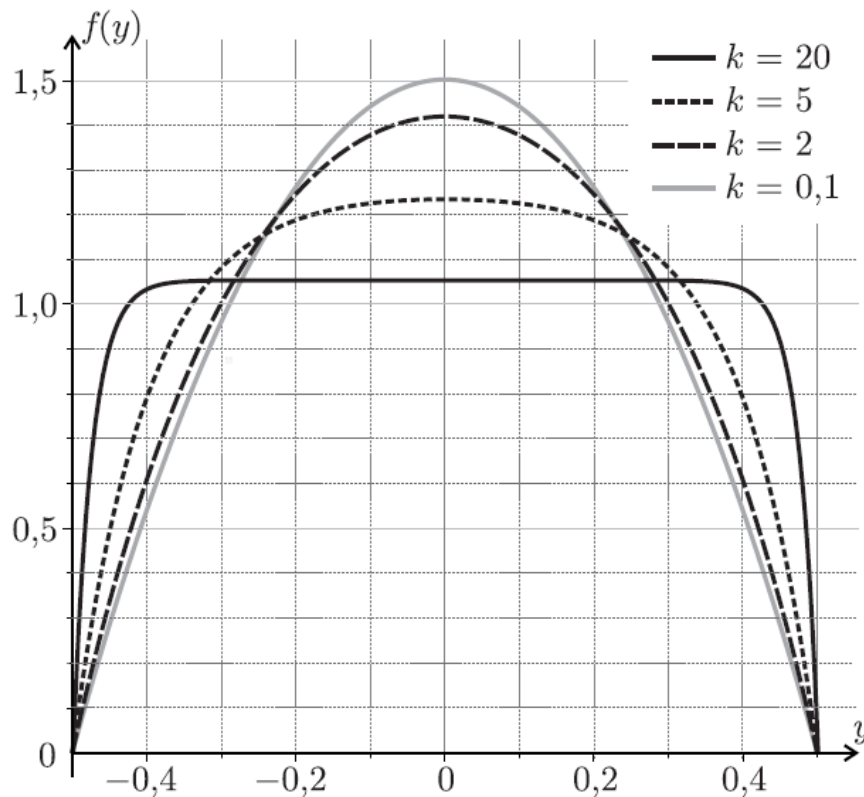


Figure 2: Représentation graphique de la fonction $f(y)$ pour quatre valeurs du paramètre k .

□—9. Pour un fil de tungstène de diamètre $d_w = 5\mu m$, de longueur $L_w = 1,2mm$ et fonctionnant dans un régime de température T_w tel que $\ell_c = 30d_w$, évaluer, en faisant les approximations pertinentes, la valeur numérique du coefficient :

$$\xi = \frac{T_{w,max} - T_f}{\langle T_w \rangle - T_f}$$

où $T_{w,max}$ est la température maximale atteinte dans le fil. En exploitant la FIGURE 2, commenter la valeur trouvée.

I.B.— Puissance thermique cédée au fluide

□—10. Commenter les courbes de la FIGURE 2. Quelle approximation peut-on faire quant à la température T_w dans le cas d'un fil long (on précisera ce que « long » signifie ici) ?

La résistivité ρ_w du fil est toujours supposée dépendre de la température du fluide avec lequel il est en contact selon la relation (2).

□—11. Calculer la résistance $R_{w,\infty}$ d'un fil supposé long en fonction de sa résistance R_f à la température T_f , de α et des températures $\langle T_w \rangle$ et T_f .

Toujours dans le cadre d'un fil long, on fait l'hypothèse que la puissance thermique $\dot{Q}_g$ cédée par le fil aux deux gaines d'adaptation est négligeable devant la puissance $\dot{Q}_j$ dissipée par effet Joule le long du fil ou celle, notée $\dot{Q}_f$, correspondant aux échanges thermiques conducto-convectifs reçus par le fluide à l'interface entre le fil et le fluide.

□—12. Déterminer, en régime permanent, l'expression de $\dot{Q}_j$ en fonction de la différence $\langle T_w \rangle - T_f$.

Pour un fluide de viscosité η et de masse volumique μ_f , qui s'écoule à la vitesse V autour d'un obstacle fixe de taille caractéristique d_w , on définit le nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e = \mu_f V d_w / \eta$. Il compare deux modes de transport au sein du fluide.

□—13. Sachant que la viscosité η s'exprime en *Pa.s* déterminer la dimension de $\mathcal{R}_e$.

On définit par ailleurs le nombre de Nusselt, $\mathcal{N}_u = h d_w / \lambda_f$.

□—14. Déterminer la dimension de $\mathcal{N}_u$ et proposer une interprétation physique de cette quantité. Comment varie $\mathcal{N}_u$ lorsque la vitesse V du fluide s'écoulant autour du fil augmente ?

On admet que le nombre de Nusselt vérifie la loi de King $\mathcal{N}_u = A + B\sqrt{\mathcal{R}_e}$ où A et B sont des constantes connues qui ne dépendent que de la nature du fluide en écoulement.

□—15. En exploitant l'expression de $\langle T_w \rangle$ obtenue à la question □—8. et les résultats de la question □—5. montrer que dans le cas d'un fil long on peut écrire :

$$\ell_c = \frac{d_w}{2} \theta^\nu \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{1}{\mathcal{N}_u} \frac{\lambda_w}{\lambda_f} \frac{R_{w,\infty}}{R_f} \quad (4)$$

On précisera la valeur numérique de l'exposant ν .

□—16. On considère de nouveau un fil de longueur L_w quelconque. Établir l'expression de la puissance thermique $\dot{Q}_f$ associée au transfert conducto-convectif du fil vers le fluide.

On suppose que la relation (4) reste valable en ordre de grandeur pour un fil de longueur quelconque et que, de plus, le coefficient θ qu'elle fait intervenir est de l'ordre de l'unité pour toutes les mesures effectuées.

□—17. En étudiant le rapport $\dot{Q}_f / \dot{Q}_g$, et sachant que dans le contexte d'étude $\mathcal{N}_u \simeq 10SI$, justifier a posteriori que l'on puisse simplifier le problème en ne considérant pas les pertes dans les

gainés d'adaptation sous l'hypothèse d'un fil long.

En utilisant le résultat de la question □-12. et en supposant que l'on puisse appliquer la loi de King, montrer que, pour un fil long, la mesure de la vitesse V du fluide se ramène à une mesure de résistance. On déterminera l'expression de V en fonction *notamment* de $R_{w,\infty}$, R_f et I .

II.— Anémométrie à deux fils

On étudie à présent une autre technique qui utilise deux fils parallèles séparés par une distance ϵ comme représenté sur la FIGURE 3 ci-dessous.

Cette technique est plus précise que la précédente car elle permet de faire deux mesures : la première n'utilise que le premier fil ; la seconde étudie la réponse induite par le premier dans le second.

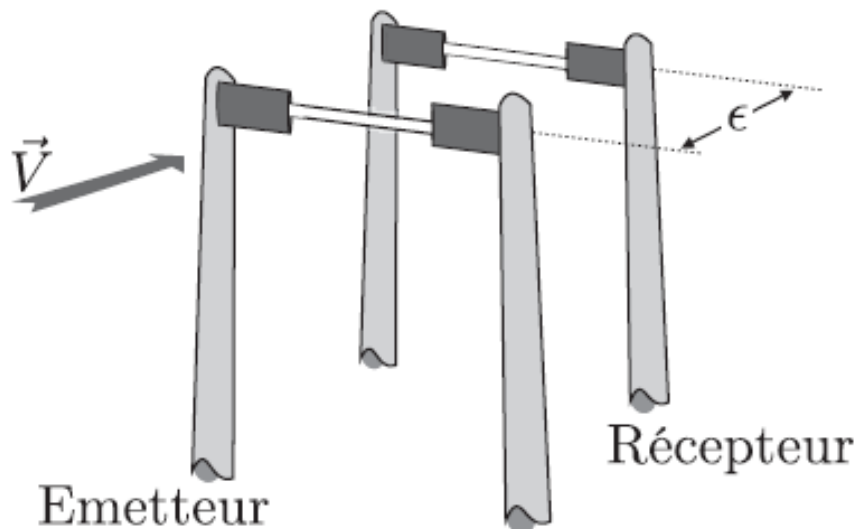


Figure 3: Disposition des deux fils.

- Le premier fil (l'émetteur, repéré par un indice e), froid initialement (c'est-à-dire à la température du fluide environnant T_f), est traversé par une impulsion électrique d'intensité $I = 1A$ et d'une durée τ de quelques μs , appelée « phase de chauffe », à l'issue de laquelle le fil s'est donc échauffé.

On fait ensuite passer dans l'émetteur un faible courant $I_0 = 1mA$, dont on négligera l'influence thermique, et on mesure la tension à ses bornes en fonction du temps. On obtient ainsi l'évolution de la résistance électrique $R_e(t)$ en fonction du temps et donc celle de sa température $T_e(t)$.

- Un second fil (le récepteur, repéré par un indice r) est placé parallèlement au premier, en aval dans l'écoulement du fluide (ici de l'air), à une distance $\epsilon = 0,5mm$ du premier. Sous l'action de l'écoulement, une trainée d'air chaud (zone échauffée du fluide par l'impulsion thermique de l'émetteur) va atteindre le récepteur.

L'acuité et la durée de cette trainée d'air chaud vue par le second fil vont dépendre notamment de la norme V de la vitesse de l'air.

Hormis leur température et donc leur résistance, les caractéristiques de ces deux fils sont supposées identiques à celles du fil utilisé dans la partie I.—.

On se concentre tout d'abord sur le fil émetteur de l'impulsion thermique afin d'étudier la première possibilité de mesure de la vitesse de l'écoulement. On néglige la conduction thermique dans le fil et entre le fil et les broches. On suppose donc, conformément à ce qui a été fait précédemment, que la température du fil est homogène et ne dépend que du temps, tout comme sa résistance toujours obtenue dans le cadre du modèle de résistivité résumé par la relation (2).

Pendant la phase de chauffe, l'impulsion étant très brève, on négligera les pertes d'énergie dues à la

convection de l'air autour du fil lors de cette phase. L'origine des temps $t = 0$ correspond au début de l'impulsion électrique.

□—18. Montrer que, pendant la phase de chauffe, la température $T_e(t)$ vérifie une équation différentielle qui peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d(T_e - T_f)}{dt} - \frac{T_e - T_f}{\tau_1} = \frac{R_f I^2}{C} \quad (5)$$

où l'on exprimera la durée caractéristique τ_1 de montée en température et le paramètre C en fonction des paramètres du problème. Que représente C ?

□—19. Résoudre cette équation en exprimant finalement $T_e(t)$ en fonction de t , T_f , α et τ_1 . En déduire, en fonction de τ , τ_1 et α , l'expression de l'amplitude de l'impulsion thermique $\Delta T_{e,max} = T_{e,max} - T_f$ obtenue dans le fil émetteur après qu'il a été parcouru par l'impulsion de courant.

□—20. Une fois l'impulsion terminée, i. e. pour $t > \tau$, le fil émetteur ne reçoit plus de courant qui le chauffe, il se refroidit par convection au contact thermique de l'air en mouvement. Déterminer la température de l'émetteur $T_e(t)$ durant cette phase dite de relaxation en fonction de t , τ , T_f , $\Delta T_{e,max}$ ainsi que d'une nouvelle durée τ_2 caractéristique de cette phase de relaxation dépendant notamment de $\mathcal{N}_u$.

Sur la FIGURE 4 ci-dessous le graphe de gauche indique l'allure de $T_e(t)$ mesurée lors des phases de chauffe et de relaxation au contact de deux écoulements de vitesse différente.

Sur cette même FIGURE 4, le graphe de droite montre de façon plus quantitative en échelle semilogarithmique, des relevés expérimentaux de la phase de relaxation pour différentes valeurs de la norme de la vitesse de l'écoulement.

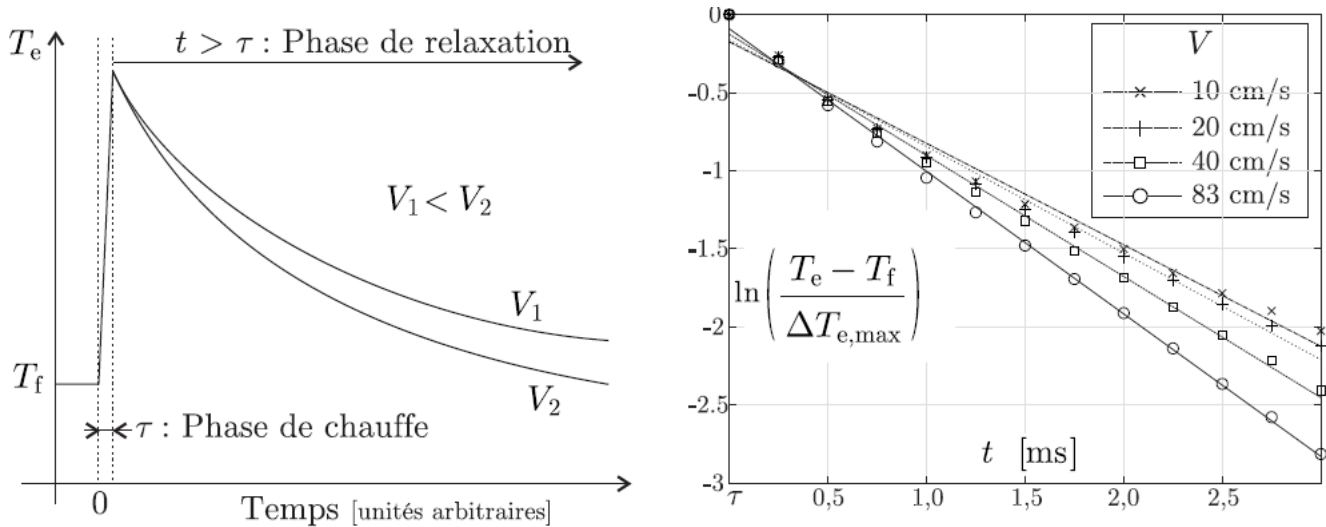


Figure 4: Mesures au niveau de l'émetteur. Sur la figure de droite on a représenté les mesures et leurs différentes régressions linéaires.

□—21. Pendant la phase de chauffe, on constate sur la partie gauche de la FIGURE 4 que les deux courbes sont confondues. Quelle hypothèse émise plus haut ce résultat permet-il de confirmer ?

□—22. Expliquer qualitativement comment l'analyse des courbes de la FIGURE 4 permet une première mesure de la norme de la vitesse de l'écoulement du fluide.

L'air réchauffé par l'émetteur va être transportée par convection jusqu'au second fil, le récepteur. En alimentant ce dernier par un très faible courant $I_0 = 1mA$, dont on peut toujours négliger l'influence thermique, on peut mesurer sa résistance et en déduire sa température.

Certains résultats expérimentaux sont rassemblés dans la FIGURE 4 sur la page suivante⁽¹⁾.

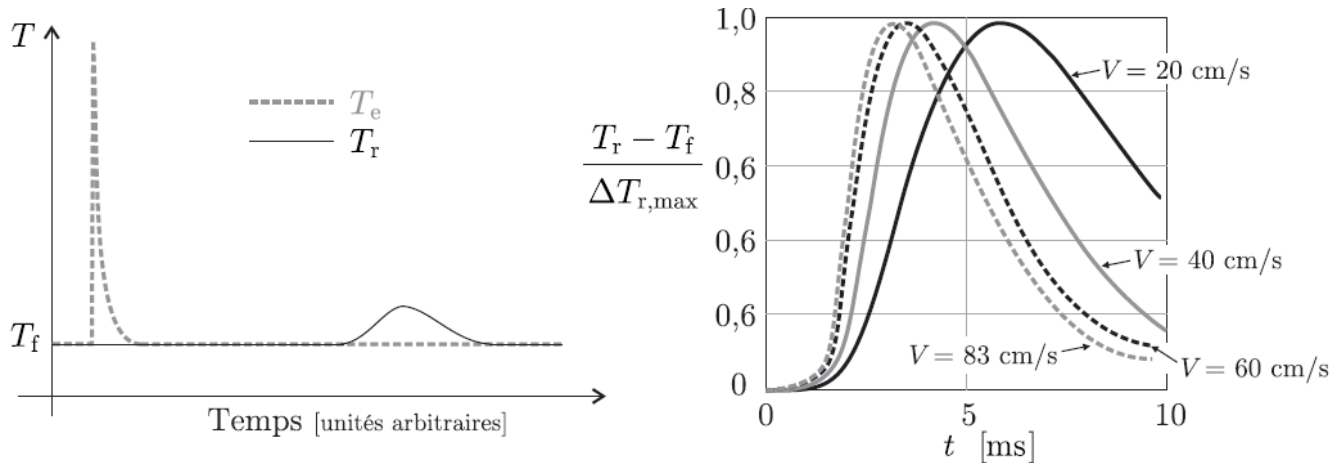


Figure 5: Analyse des températures.

Sur la partie gauche de la FIGURE 5, on a représenté avec les mêmes échelles de temps et d'amplitude l'allure typique des pics de températures relevés dans chacun des deux fils. De façon plus quantitative, on a représenté sur la partie droite de cette même figure, le résultat des mesures de l'évolution de la fonction normalisée $(T_r(t) - T_f) / \Delta T_{r,max}$, max pour différentes valeurs de la norme de la vitesse de l'écoulement.

□—23. Commenter les deux courbes de la partie gauche de la FIGURE 5. Proposer des explications qualitatives pour les différents phénomènes que l'on peut observer.

□—24. Expliquer qualitativement comment l'analyse des courbes de la FIGURE 5 permet une seconde mesure de la norme de la vitesse de l'écoulement du fluide.

⁽¹⁾Ils ont été collectés dans l'article « *Pulsed-wire technique for velocity measurements in natural convection flow – a numerical optimisation tool* », Grignon et al., 1998, International Journal of Heat and Mass Transfer, volume 41, p. 3121-3129.

ÉPREUVE DE PHYSIQUE 1 -MP

L'anémométrie à fil chaud

I.— Étude énergétique de l'anémomètre

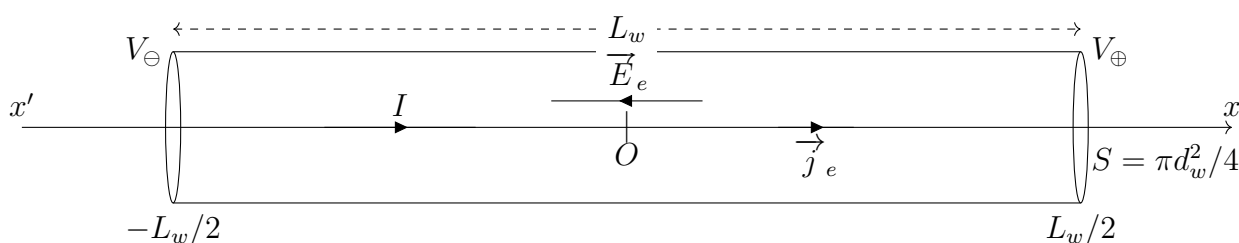
I.A.— Bilan d'énergie dans le fil chaud

□—1.

- La loi d'ohm locale :

$$\vec{j}_e(M, t) = \gamma(M) \vec{E}(M, t); \quad \begin{cases} \vec{j}_e(M, t) : \text{vecteur densité de courant (courant volumique), } A.m^{-2} \\ \gamma(M) : \text{conductivité électrique, } S.m^{-1} \\ \vec{E}_e(M, t) : \text{champ électrique responsable du courant électrique, } V.m^{-1} \end{cases}$$

- Résistance électrique R_w :



$$\bullet \oint_{x'x} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_{\oplus} - V_{\ominus} = E_e L_w = U_e,$$

$$\bullet I = \iint_{(S)} \vec{j}_e \cdot d\vec{S} = j_e S = j \pi d_w^2 / 4,$$

$$\bullet j_e = \gamma_w E_e = \frac{E_e}{\rho_w},$$

La résistance électrique R_w du fil :

$$\begin{aligned} R_w &= \frac{U_e}{I} \\ &= \frac{E_e L_w}{j \pi d_w^2 / 4} \\ &= \frac{4 \rho_w L_w}{\pi d_w^2} \end{aligned}$$

- La puissance $\mathcal{P}_J$ dissipée par effet Joule dans le fil :

$$\mathcal{P}_J = R_w I^2 = \frac{4 \rho_w L_w}{\pi d_w^2} I^2$$

- La puissance volumique $\mathcal{P}_J$ dissipée par effet Joule :

$$\mathcal{P}_v = \frac{d\mathcal{P}_J}{d\tau} = \frac{\mathcal{P}_J}{L_w} \frac{dx}{d\tau} = \frac{\mathcal{P}_J}{S L_w} = \frac{16 \rho_w}{\pi^2 d_w^4} I^2$$

En effet : pour une portion dx du fil de section S et de volume $d\tau = Sdx$,

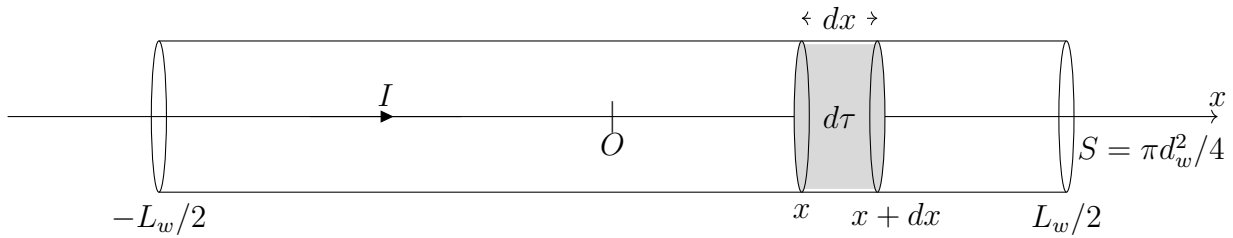
- la résistance est $dR = \frac{\rho_w dx}{S} = R \frac{dx}{L_w}$.
- la dissipation par effet Joule est $d\mathcal{P}_J = dRI^2 = RI^2 \frac{dx}{L_w} = \mathcal{P}_J \frac{dx}{L_w}$

□-2.

- La loi de FOURIER :

$$\vec{j}_{th}(M, t) = -\lambda(M) \overrightarrow{\text{grad}} T(M, t) \quad ; \quad \begin{cases} \vec{j}_{th}(M, t) : \text{vecteur densité de courant thermique, } W.m^{-2} \\ \lambda(M) : \text{conductivité thermique, } W.m^{-1}.K^{-1} \\ T(M, t) : \text{Champ de température absolue, } K \end{cases}$$

- La loi de FOURIER est une loi phénoménologique : elle décrit le phénomène de transfert thermique sans se baser sur la connaissance du mécanisme sous-jacent.
- Chaque section est une isotherme et la conduction thermique est unidimensionnelle.
- Équation de diffusion thermique :



Le premier principe de la thermodynamique appliqué au système (Σ) de volume $d\tau = Sdx$, d'énergie interne $U_\Sigma(t)$, au cours de sa transformation entre les instants t et $t + dt$:

$$dU_\Sigma = U_\Sigma(t + dt) - U_\Sigma(t) = \delta U^e + \delta U^p$$

avec :

- δU^e est l'énergie interne **échangée** par le système à travers la surface délimitant (Σ) ;
- δU^p est l'énergie interne **produite** ou **créée** dans le volume $d\tau$.

$$\frac{dU_\Sigma}{dt} = \frac{\delta U^e}{dt} + \frac{\delta U^p}{dt} \Rightarrow \Phi_\Sigma = \Phi_{ech} + \Phi_p ; \quad \begin{cases} \Phi_\Sigma : \text{la puissance stockée dans } (d\tau) \\ \Phi_\Sigma = \mu_w c_w d\tau \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right) \\ \Phi_{ech} : \text{la puissance échangée à travers } (S) \\ \Phi_{ech} = j_{th}(x, t)S - j_{th}(x + dx, t)S = - \left(\frac{\partial j_{th}(x, t)}{\partial x} \right) S dx \\ \Phi_p : \text{la puissance produite dans } (d\tau) \\ \Phi_p = \mathcal{P}_v d\tau \end{cases}$$

Soit :

$$\mu_w c_w \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right) = - \left(\frac{\partial j_{th}(x, t)}{\partial x} \right) + \mathcal{P}_v \quad \text{et} \quad j_{th}(x, t) = -\lambda_w \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right)$$

d'où :

$$\mu_w c_w \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right) = \lambda_w \left(\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \right) + \mathcal{P}_v$$

Équation bilan d'une grandeur physique extensive :

Une grandeur extensive G^a vérifie les propriétés suivantes :

- elle est localisée : elle peut être décrite par une densité ρ_G telle que la quantité G contenue dans un volume V peut s'écrire $\iiint_V \rho_G dV$;
- elle peut être échangée entre différents systèmes séparés par une surface S , le débit associé à ce transfert s'écrivant sous la forme $\iint_{(S)} \vec{j}_G \cdot d\vec{S}$ où $\vec{j}_G$ est la densité de courant associée à G ;
- elle peut être créée dans le volume d'un système. Cette création étant décrite par le taux de création σ_G par unité de volume et de temps tel que, dans le volume V , $\frac{\delta G_{creation}}{\delta t} = \iiint_V \sigma_G dV$

Le bilan de la grandeur G s'écrit :

$$\text{div } \vec{j}_G + \frac{\partial \rho_G}{\partial t} = \sigma_G$$

^a G : La masse, l'énergie interne, ...

□—3.

- L'unité de h est $W.m^{-2}.K^{-1}$.
- h augmente avec la vitesse V de l'écoulement
- quant V augmente, la température T_w diminue.

□—4. En régime permanent la puissance stockée dans l'élément de volume $d\tau = Sdx$ est nulle, soit le bilan :

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi_{ech} + \Phi_p \quad \text{avec} \quad \Phi_{ech} = \Phi_{ech,cd} + \Phi_{ech,cv} \\ &= - \left(\frac{dj_{th}(x)}{dx} \right) Sdx - \delta \dot{Q}_f \\ &= - \left(\frac{dj_{th}(x)}{dx} \right) Sdx - h(T_w - T_f) 2\pi r_w dx \quad \text{avec} \quad r_w = d_w/2 = \sqrt{S/\pi} \end{aligned}$$

Équation aux dérivées partielles vérifiée par $T_w(x, t)$:

$$\begin{aligned} 0 &= - \left(\frac{dj_{th}(x)}{dx} \right) Sdx - h(T_w - T_f) \pi d_w dx + \mathcal{P}_v Sdx \\ j_{th}(x) = -\lambda_w \frac{dT_w(x)}{dx} &\Rightarrow 0 = \lambda_w \left(\frac{d^2 T_w(x)}{dx^2} \right) - \frac{4h}{d_w} (T_w - T_f) + \frac{16\rho_w}{\pi^2 d_m^4} I^2 \end{aligned}$$

D'où l'équation :

$$\frac{d^2 T_w(x)}{dx^2} - \frac{4h}{\lambda_w d_w} (T_w(x) - T_f) + \frac{16\rho_w}{\pi^2 d_m^4 \lambda_w} I^2 = 0$$

□—5. Avec $T_1(x) = T_w(x) - T_f$ et $\rho_w = \rho_f (1 + \alpha(T_w(x) - T_f))$ on peut écrire l'équation différentielle précédente sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_1(x)}{dx^2} - \frac{4h}{\lambda_w d_w} T_1(x) + \frac{16}{\pi^2 d_m^4 \lambda_w} I^2 \rho_f (1 + \alpha T_1(x)) &= 0 \\ \frac{d^2 T_1(x)}{dx^2} + T_1(x) \underbrace{\left(-\frac{4h}{\lambda_w d_w} + \frac{16\rho_f \alpha}{\pi^2 d_m^4 \lambda_w} I^2 \right)}_{K_1} + \underbrace{\frac{16\rho_f}{\pi^2 d_m^4 \lambda_w} I^2}_{K_2} &= 0 \end{aligned}$$

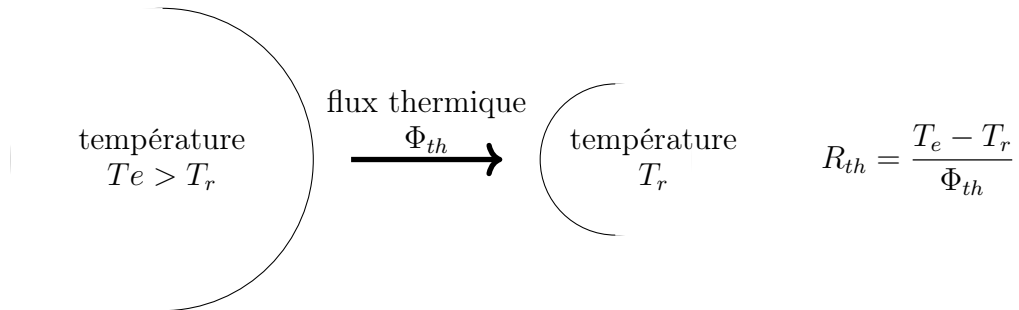
Soit :

$$\frac{d^2 T_1(x)}{dx^2} + K_1 T_1(x) + K_2 = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K_2 = \frac{16\rho_f}{\pi^2 d_m^4 \lambda_w} I^2 \\ K_1 = -\frac{4h}{\lambda_w d_w} + \frac{16\rho_f \alpha}{\pi^2 d_m^4 \lambda_w} I^2 = -\frac{4h}{\lambda_w d_w} + \alpha K_2 \\ \Rightarrow \quad \alpha K_2 = K_1 + \frac{4h}{\lambda_w d_w} \end{cases}$$

$$K_1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha K_2 < \frac{4h}{\lambda_w d_w} \quad \Rightarrow \quad h > \frac{4\alpha\rho_f}{\pi^2 d_w^3} I^2.$$

□—6. On pose $\ell_c = \frac{1}{\sqrt{|K_1|}} \Rightarrow K_1 = -|K_1| = \frac{1}{\ell_c^2}.$

- La résistance thermique R_{th} est la capacité d'un matériau à résister aux variations des échanges thermiques. Elle s'exprime en $K.W^{-1}$.



- Contact sans résistance thermique : transfert intégrale et instantané du flux thermique et continuité de la température.
- Solution générale de l'équation :

$$\frac{d^2 T_1(x)}{dx^2} - \frac{T_1(x)}{\ell_c^2} + K_2 = 0$$

$$T_1(x) = A_1 \cosh\left(\frac{x}{\ell_c}\right) + B_1 \sinh\left(\frac{x}{\ell_c}\right) + \ell_c^2 K_2$$

A_1 et A_2 sont deux constantes qui dépendent des conditions aux limites.

- Conditions aux limites : $T_w(-L_w/2) = T_w(+L_w/2) = T_f$, soient :

$$0 = A_1 \cosh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right) - B_1 \sinh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right) + \ell_c^2 K_2 \quad (\text{C.L1})$$

$$0 = A_1 \cosh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right) + B_1 \sinh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right) + \ell_c^2 K_2 \quad (\text{C.L2})$$

(C.L2)-(C.L1) donne : $2B_1 \sinh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{B_1 = 0}$. Il ne reste, alors dans $T_1(x)$, que le terme en cosinus hyperbolique.

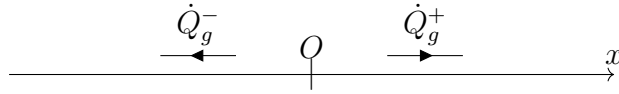
○ Profil de température $T_w(x)$:

$$T_1(x) = A_1 \cosh\left(\frac{x}{\ell_c}\right) + \ell_c^2 K_2 \Rightarrow T_w(x) = T_f + \ell_c^2 K_2 + A_1 \cosh\left(\frac{x}{\ell_c}\right)$$

De la relation (C.L1) ou de la relation (C.L2), on déduit que $A_1 = -\frac{\ell_c^2 K_2}{\cosh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right)}$. Soit :

$$T_w(x) = T_f + \ell_c^2 K_2 - \ell_c^2 K_2 \frac{\cosh\left(\frac{x}{\ell_c}\right)}{\cosh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right)} = T_f + \ell_c^2 K_2 \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{x}{\ell_c}\right)}{\cosh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right)} \right]$$

□—7. Puissance thermique $\dot{Q}_g$ cédée par le fil :



$$\begin{aligned} \dot{Q}_g &= \dot{Q}_g^+ + \dot{Q}_g^- = S j_{th}(x = L_w/2) - S j_{th}(x = -L_w/2) \\ &= -\lambda_w S \left[\left(\frac{dT_w}{dx} \right) (x = L_w/2) - \left(\frac{dT_w}{dx} \right) (x = -L_w/2) \right] \\ \dot{Q}_g &= \frac{1}{2} \pi \ell_c K_2 \lambda_w d_w^2 \tanh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right) \end{aligned}$$

□—8. La moyenne spatiale $\langle T_w \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle T_w \rangle = \langle T_w \rangle_x &= \frac{1}{L_w} \int_{-L_w/2}^{L_w/2} T_w(x) dx = T_f + \ell_c^2 K_2 - \frac{\ell_c^2 K_2}{L_w \cosh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right)} \int_{-L_w/2}^{L_w/2} \cosh\left(\frac{x}{\ell_c}\right) dx \\ &= T_f + \ell_c^2 K_2 \left[1 - \Lambda \tanh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right) \right] \quad \text{avec} \quad \Lambda = \frac{2\ell_c}{L_w} \end{aligned}$$

□—9. La fonction $f(y) = \frac{T_w - T_f}{\langle T_w \rangle - T_f}$ avec $y = \frac{x}{L_w}$ et le coefficient $\xi = \frac{T_{w,max} - T_f}{\langle T_w \rangle - T_f}$. D'après le graphe de la fonction $f(y)$, le maximum se présente en $y = 0$ (et donc en $x = 0$) :

$$T_{w,max} = T_w(x = 0) = T_f + \ell_c^2 K_2 \left[1 - \frac{1}{\cosh(k)} \right] \approx T_f + \ell_c^2 K_2 \quad \text{car} \quad k = \frac{1}{\Lambda} = 4 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\cosh(4)} \ll 1.$$

$$T_{w,max} - T_f = \ell_c^2 K_e \quad \text{et} \quad \langle T_w \rangle - T_f = \ell_c^2 K_2 \left(1 - \frac{1}{k} \tanh(k) \right) \Rightarrow \xi = \frac{1}{1 - \frac{\tanh(k)}{k}} = 1,33.$$

I.B.— Puissance thermique cédée au fluide

□—10.

- Une distribution de température non uniforme est présent en raison de la pertes de chaleur par conduction vers les broches
- la température est maximal au milieu du fil.
- plus k est grand, plus la courbe présente un palier : la température devient uniforme en tout point du fil.
- pour un fil long ($L_w/2 \gg \ell_c$), T_w pourra être considérée homogène et tend vers sa valeur moyenne $\langle T_w \rangle$.

□—11. Résistance $R_{w,\infty}$:

$$R_{w,\infty} = \frac{\rho_{w,\infty} L_w}{S} = \underbrace{\frac{4\rho_f L_w}{\pi d_w^2}}_{R_f} [1 + \alpha (T_{w,\infty} - T_f)] = R_f [1 + \alpha (\langle T_w \rangle - T_f)]$$

□—12. En régime permanent ;

$$\dot{Q}_f = \dot{Q}_g + \dot{Q}_j \simeq \dot{Q}_j \quad \Rightarrow \quad \dot{Q}_j = h\pi d_w L_w (\langle T_w \rangle - T_f).$$

□—13. Le nombre de REYNOLDS $\mathcal{R}_e = \frac{\mu_f V d_w}{\eta}$:

$$[\mathcal{R}_e] = \frac{[\rho][V][d_w]}{[\eta]} = \frac{M.L^{-3}.L.T^{-1}.L}{M.L.T^{-1}.L^{-2}.T} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}_e \text{ est sans dimension.}$$

□—14. Le nombre de NUSSELT $\mathcal{N}_u = \frac{h d_w}{\lambda_f}$:

$$[\mathcal{N}_u] = \frac{[h][d_w]}{[\lambda_f]} = \frac{M.T^{-3}.\Theta^{-1}.L}{M.L.T^{-3}.\Theta^{-1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}_u \text{ est sans dimension.}$$

$\mathcal{N}_u$ est d'autant plus *élevé* que la convection est *prédominante* sur la conduction et la convection augmente avec la vitesse ; donc $\mathcal{N}_u$ augmente aussi avec V .

□—15. La loi de KING : $\mathcal{N}_u = A + B\sqrt{\mathcal{R}_e}$;

$$\langle T_w \rangle = T_f + \ell_c^2 K_2 \left[1 - \Lambda \tanh \left(\frac{L_w}{2\ell_c} \right) \right] = T_f + \ell_c^2 K_2 \left[1 - \frac{\tanh(k)}{k} \right] \quad (6)$$

$$R_{w,\infty} = R_f [1 + \alpha (\langle T_w \rangle - T_f)] \quad (7)$$

$$\mathcal{N}_u = \frac{h d_w}{\lambda_f} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\lambda_f \mathcal{N}_u}{d_w} \quad (8)$$

$$\alpha K_2 = K_1 + \frac{4h}{\lambda_w d_w} = -\frac{1}{\ell_c^2} + \frac{4h}{\lambda_w d_w} \quad (9)$$

- Fil long : $\begin{cases} \frac{L_w}{2} \gg \ell_c & \text{ou} & k \gg 1 \\ \frac{\tanh(k)}{k} \approx 0 \end{cases}$; l'expression (32) s'écrit : $\langle T_w \rangle \approx T_f + \ell_c^2 K_2$.

- L'expression (7) permet d'écrire : $\frac{R_{w,\infty}}{R_f} = 1 + \alpha (\langle T_w \rangle - T_f) = 1 + \alpha \ell_c^2 K_2$.
- On remplace αK_2 à l'aide de la relation (9) : $\frac{R_{w,\infty}}{R_f} = 1 + \ell_c^2 \left(-\frac{1}{\ell_c^2} + \frac{4h}{\lambda_w d_w} \right) = \frac{4h\ell_c^2}{\lambda_w d_w}$.
- En remplaçant h par son expression (8) : $\frac{R_{w,\infty}}{R_f} = \frac{4\lambda_f \mathcal{N}_u \ell_c^2}{\lambda_w d_w^2} \Rightarrow \ell_c = \frac{d_w}{2} \sqrt{\frac{\lambda_w R_{w,\infty}}{R_f \lambda_f \mathcal{N}_u}}$

Soit :

$$\ell_c = \frac{d_w}{2} \theta^\nu \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{1}{\mathcal{N}_u} \frac{\lambda_w}{\lambda_f} \frac{R_{w,\infty}}{R_f} \quad \text{et} \quad \nu = 1/2.$$

□—16. La puissance thermique $\dot{Q}_f$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \dot{Q}_f}{dS} = h(T_w - T_f) &\Rightarrow \dot{Q}_f = \pi d_w h \ell_c^2 K_2 \int_{-L_w/2}^{L_w/2} \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{x}{\ell_c}\right)}{\cosh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right)} \right] dx = \pi d_w h \ell_c^2 K_2 L_w \left(1 - \Lambda \tanh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right) \right) \\ &\Rightarrow \dot{Q}_f = \pi d_w h L_w (\langle T_w \rangle - T_f) \end{aligned}$$

□—17.

- Pertes par conduction,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_g} &= \frac{\pi d_w h \ell_c^2 K_2 L_w}{\frac{1}{2} \pi \ell_c K_2 \lambda_w d_w^2} \left[\frac{1 - \Lambda \tanh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right)}{\tanh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right)} \right] = \frac{2h\ell_c L_w}{\lambda_w d_w} \left[\coth\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right) - \Lambda \right] \\ &= \frac{4h\ell_c^2}{\lambda_w d_w} \left[\frac{L_w}{2\ell_c} \coth\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right) - 1 \right] \\ \frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_g} &= \frac{4\lambda_f \ell_c^2}{\lambda_w d_w^2} \mathcal{N}_u [k \coth(k) - 1] = 10 \frac{\lambda_f}{\lambda_w} [k \coth(k) - 1] \end{aligned}$$

Dans l'hypothèse "**fil long**" : $k \gg 1 \Rightarrow \frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_g} \approx 10 \frac{\lambda_f}{\lambda_w} k \coth(k) \gg 1$ ou $\dot{Q}_f \gg \dot{Q}_g$; les pertes par conduction sont, alors, négligeables.

- Dépendance de V à la résistance :

$$\mathcal{N}_u = A + B \sqrt{\mathcal{R}_e} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_e = \frac{\mu_f V d_w}{\eta} \Rightarrow \mathcal{N}_u = A + B \sqrt{\frac{\mu_f d_w}{\eta}} \sqrt{V}$$

Or $\theta = \frac{1}{\mathcal{N}_u} \frac{\lambda_w}{\lambda_f} \frac{R_{w,\infty}}{R_f} = 1$ (**par hypothèse**) $\Rightarrow \mathcal{N}_u = \frac{\lambda_w}{\lambda_f} \frac{R_{w,\infty}}{R_f} = A + B \sqrt{\frac{\mu_f d_w}{\eta}} \sqrt{V}$. Soit :

$$V = \frac{\eta}{\mu_f d_w B^2} \left[\frac{\lambda_w}{\lambda_f} \frac{R_{w,\infty}}{R_f} - A \right]^2 = g \left(\frac{R_{w,\infty}}{R_f} \right)$$

La mesure de V se ramène, alors, à une mesure de résistance.

- Expression de V en fonction de $R_{w,\infty}$, R_f et I :

On rappelle l'équation bilan établie précédemment, en régime permanent ;

$$\dot{Q}_g - \dot{Q}_f + \dot{Q}_j = 0$$

Par **hypothèse** : $\dot{Q}_g \ll \dot{Q}_f$ et $\dot{Q}_g \ll \dot{Q}_j$ (fil long) ;

$$\Rightarrow \quad \dot{Q}_f = \dot{Q}_j \quad \Rightarrow \quad \pi h d_w L_w (T_w - T_f) = R_{w,\infty} I^2 \text{ avec } \begin{cases} R_{w,\infty} = R_f [1 + \alpha (\langle T_w \rangle - T_f)] \\ \mathcal{N}_u = \frac{h d_w}{\lambda_f} \Rightarrow h d_w = \lambda_f \mathcal{N}_u \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \pi L_w \lambda_f \mathcal{N}_u \frac{R_{w,\infty} - R_f}{\alpha R_f} = R_{w,\infty} I^2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}_u = \frac{\alpha R_f R_{w,\infty}}{(R_{w,\infty} - R_f)} \frac{I^2}{\pi L_w \lambda_f} = A + B \sqrt{\frac{\mu_f d_w}{\eta} \sqrt{V}}$$

D'où :

$$V = \frac{\eta}{\mu_f d_w B^2} \left[\frac{\alpha R_f R_{w,\infty}}{(R_{w,\infty} - R_f)} \frac{I^2}{\pi L_w \lambda_f} - A \right]^2$$

II.— Anémométrie à deux fils

□—18. Pendant phase de chauffe les pertes d'énergie par convection de l'air étant négligeables, la puissance Φ_{st} stockée dans le fil émetteur (d'énergie interne $U(t)$) est égale à la puissance Φ_{st} dissipée par effet JOULE :

$$\Phi_{st} = \Phi_J \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{dt} = R_w I^2 \quad \Rightarrow \quad \mu_w c_w S L_w \left(\frac{dT_e}{dt} \right) = R_f I^2 [1 + \alpha (T_e - T_f)] \quad \text{avec} \quad S = \frac{\pi d_w^2}{4}.$$

Soit :

$$\begin{aligned} \mu_w c_w \frac{\pi d_w^2}{4} L_w \left(\frac{dT_e}{dt} \right) - \alpha R_f I^2 (T_e - T_f) &= R_f I^2 \\ \left(\frac{dT_e}{dt} \right) - \frac{4 \alpha R_f I^2}{\mu_w c_w \pi d_w^2 L_w} (T_e - T_f) &= \frac{4 R_f I^2}{\mu_w c_w \pi d_w^2 L_w} \\ \Rightarrow \quad \left(\frac{dT_e}{dt} \right) - \frac{(T_e - T_f)}{\tau_1} &= \frac{R_f I^2}{C} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} C = \frac{\mu_w c_w \pi d_w^2 L_w}{4} \\ \tau_1 = \frac{\mu_w c_w \pi d_w^2 L_w}{4 \alpha R_f I^2} = \frac{C}{\alpha R_f I^2} \end{cases} \end{aligned}$$

La constante C a pour unité $J.K^{-1}$: elle est, donc, homogène à une capacité thermique. C'est la capacité thermique du fil de longueur L_w .

□—19. Solution :

$$T_e - T_f = -\frac{R_f I^2}{C} \tau_1 + A_1 \exp \left(\frac{t}{\tau_1} \right)$$

Conditions initiales : $T_e(t=0) = T_f$; ce qui donne la constante $A_1 = \frac{R_f I^2}{C} \tau_1 = \frac{1}{\alpha}$. L'évolution $T_e(t)$ s'écrit :

$$T_e(t) = T_f + \frac{1}{\alpha} \left[\exp \left(\frac{t}{\tau_1} \right) - 1 \right]$$

Amplitude de l'impulsion thermique $\Delta T_{e,max}$:

$$\Delta T_{e,max} = T_{e,max} - T_f \quad \text{avec} \quad T_{e,max} = T_e(t = \tau) = T_f + \frac{1}{\alpha} \left[\exp \left(\frac{\tau}{\tau_1} \right) - 1 \right]$$

Soit :

$$\Delta T_{e,max} = \frac{1}{\alpha} \left[\exp \left(\frac{\tau}{\tau_1} \right) - 1 \right]$$

□–20. Pendant la phase de relaxation, l'équation bilan s'écrit :

$$\frac{dU}{dt} = -h\pi d_w L_w (T_e - T_f) \Rightarrow \frac{\mu_w c_w L_w \pi d_w^2}{4} \left(\frac{dT_e}{dt} \right) = -h\pi d_w L_w (T_e - T_f)$$

Soit :

$$\left(\frac{dT_e}{dt} \right) + \frac{T_e - T_f}{\tau_2} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau_2 = \frac{\mu_w c_w d_w}{4h}$$

- **Solution** : $T_e(t) - T_f = A_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right),$

- **Continuité de la température** : $T_e(t = \tau, \text{chauffe}) = T_e(t = \tau, \text{relaxation}) ;$

$$A_2 \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_2}\right) + T_f = T_f + \frac{1}{\alpha} \left[\exp\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) - 1 \right] = T_f + \Delta T_{e,max} \Rightarrow A_2 = \Delta T_{e,max} \exp\left(\frac{\tau}{\tau_2}\right)$$

- D'où :

$$T_e(t) = T_f + \Delta T_{e,max} \exp\left(-\frac{t - \tau}{\tau_2}\right)$$

$$\tau_2 \text{ dépend de } \mathcal{N}_u \text{ via le coefficient } h : \tau_2 = \frac{\mu_w c_w d_w}{4h} = \frac{\mu_w c_w d_w^2}{4\lambda_f \mathcal{N}_u}.$$

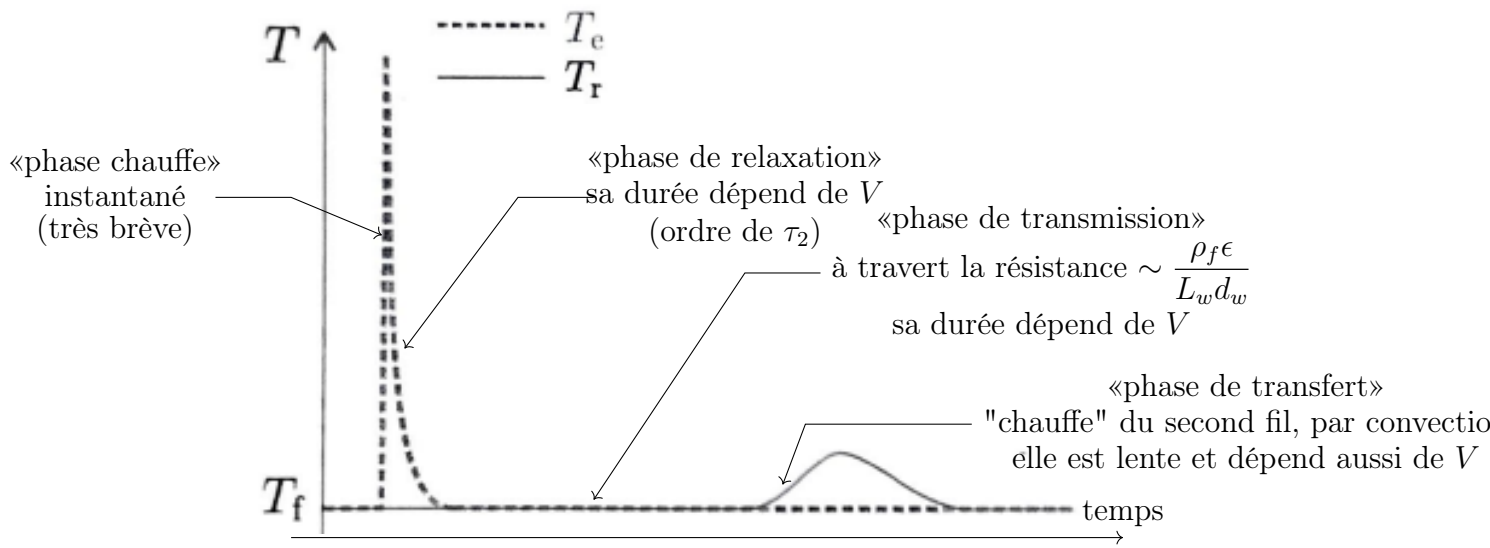
□–21. Pendant la phase de chauffe, l'impulsion est très brève.

□–22. $\ln\left(\frac{T_e - T_f}{\Delta T_{e,max}}\right) = -\frac{t - \tau}{\tau_2}$ est une fonction linéaire de pente négative (en accord avec les courbes des droite de la figure 4). La pente de cette droite est $\left(-\frac{1}{\tau_2}\right)^{(2)}$ dépend du nombre de NUSSELT $\mathcal{N}_u$ par la relation $\tau_2 = \frac{\mu_w c_w d_w^2}{4\lambda_f \mathcal{N}_u}$. Ce nombre $\mathcal{N}_u$ dépend à son tours de la norme V de la vitesse (*expression vue précédemment* - Cf. question □–17, page 15/105). Soit :

$$\frac{1}{\tau_2} = \frac{4\lambda_f}{\mu_w c_w d_w^2} \mathcal{N}_u = \frac{4\lambda_f}{\mu_w c_w d_w^2} \left[A + B \sqrt{\frac{\mu_f d_w}{\eta}} \sqrt{V} \right]$$

□–23. Commentaires :

⁽²⁾ou l'abscisse à l'origine $\left(\frac{\tau}{\tau_2}\right)$ puisque τ sera donnée par la courbe de gauche.



□—24. On constate sur la courbe de droite que $T_{r,max}$ est indépendante de la vitesse, alors que l'écart temporel Δt_{er} entre les deux pics de la courbe de gauche en dépend via τ_2 . Il suffit, alors, de mesurer Δt_{er} pour accéder à la vitesse V .

ÉPREUVE DE PHYSIQUE 2 -MP

À propos des araignées

Les araignées ou Aranéides sont des prédateurs invertébrés arthropodes. À ce jour, plus de 47 000 espèces subdivisées en 117 familles sont répertoriées et 1700 d'entre elles vivent en France. Les araignées produisent des fils de soie constitués d'un entrelacement de nombreuses fibrilles élémentaires. Le diamètre de ces fils varient typiquement de 1 jusqu'à $70\ \mu\text{m}$. À diamètre équivalent, ces fils sont plus résistants que l'acier et possèdent de nombreuses autres propriétés qui les rendent intéressants pour l'industrie, pour la confection par exemple de nouveaux textiles, de gilets pare-balles ou encore de cordes d'instruments de musique. Dans la nature, l'usage que les araignées en font est multiple et dépend des espèces considérées : fil de sécurité pendant un saut pour fuir ou pour se déplacer (fil d'Ariane), tissage de toile pour piéger des proies, moyen de s'élever dans les airs et de voyager au gré des courants aériens pour les araignées montgolfières (fil de la Vierge), confection de catapultes pour la chasse, création de dômes pour le stockage d'air sous l'eau douce pour les espèces subaquatiques ...

Nous proposons d'aborder quelques problèmes de physique relatifs aux araignées et plus particulièrement aux trois espèces représentées dans la figure ci-dessous (Fig. 1). Les applications numériques seront données avec un chiffre significatif. Les vecteurs sont indiqués par des flèches ($\vec{v}$) sauf s'ils sont unitaires et sont alors surmontés d'un chapeau ($\|\hat{e}_z\| = 1$). Les nombres complexes sont soulignés à l'exception de j tel que $j^2 = -1$. Un formulaire est fourni en fin d'énoncé.

Les 3 parties de ce problème sont indépendante.

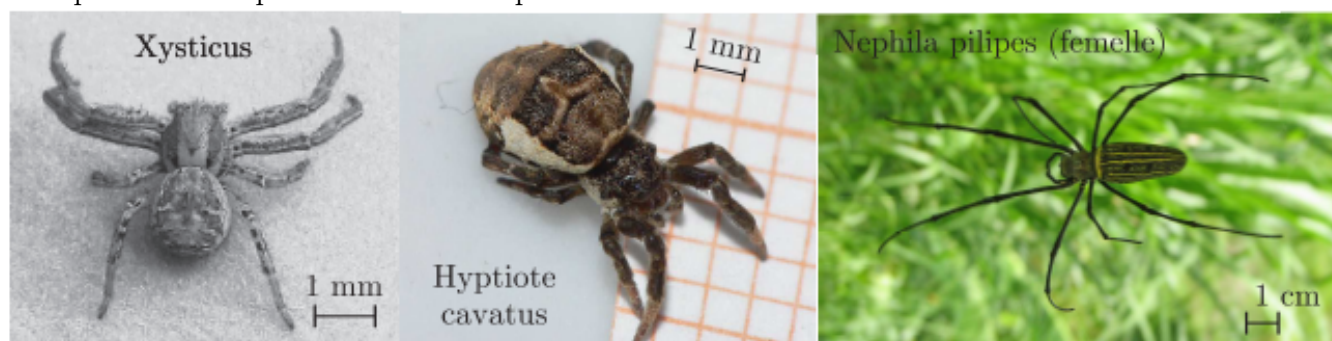


Figure 1: *Xysticus* sp. est une araignée-crabe volante. *Hyptiote cavatus* est une araignée catapulte, tisseuse de toiles triangulaires. Les araignées *Nephila pilipes* fabriquent des fils dont les propriétés mécaniques rivalisent avec les meilleures fibres artificielles : ils peuvent être assemblés pour former des cordes de violon produisant un son au timbre exceptionnel. Source des images : Wikipédia.

I.— Des araignées volantes

Certaines araignées volantes dont la taille est comprise entre 2 et 7 mm parviennent, en tirant profit des forces électrostatiques, à décoller et à s'envoler. Elles arrivent ainsi à parcourir, au gré

des vents, des distances considérables (plusieurs centaines de kilomètres) comme l'a observé pour la première fois, Charles Darwin, lors de son grand voyage à bord du *Beagle* de 1831 à 1836.

Dans cette partie du problème, nous nous intéressons à la physique permettant d'expliquer un tel phénomène.

□–1. En utilisant une schématisation sphérique rudimentaire pour modéliser ces araignées, estimer un ordre de grandeur m_g pour leur masse.

Par temps clair, le champ électrique, en tout point de la surface de la Terre est radial uniforme, dirigé vers le centre de la Terre et sa valeur moyenne vaut $E_0 = 120 \text{ V.m}^{-1}$. En première approximation on assimile localement l'atmosphère terrestre à un condensateur plan dont les deux armatures sont le sol terrestre et la couche de l'ionosphère située à l'altitude $z_0 = 60 \text{ km}$ de celui-ci.

□–2. Évaluer la valeur de la densité surfacique moyenne de charge au niveau du sol, notée σ . Des mesures ont permis de montrer qu'il existe une différence de 360 kV entre l'ionosphère et le sol. Que pouvez vous conclure quant à la validité du modèle électrique atmosphérique proposé ?

Les araignées volantes positionnent leurs corps de manière à prendre le vent, en éjectant vers le ciel des fils de soie, qui grâce aux courants d'air et au champ électrique leur permettent de s'élever. Darwin nota que ces araignées décollent en présence au niveau du sol de légers courants d'air ascendants ayant des vitesses U de l'ordre de $0,1 \text{ m.s}^{-1}$ et que le nombre de fils fabriqués par celles-ci peut atteindre quelques dizaines.

On peut montrer que les forces hydrodynamiques sont insuffisantes pour permettre à elles seules de faire s'élever les araignées.

Darwin remarqua que les différents fils tissés par une même araignée s'écartent en éventail du fait d'une répulsion électrostatique. Pour corroborer cette hypothèse, on modélise chaque fil de soie comme un fil rigide isolant, de longueur L que l'on supposera inextensible dans un premier temps, possédant en son extrémité libre, une charge q . Ces charges placées dans le champ électrique terrestre interagissent entre elles. On suppose qu'il y a $2n$ fils et que les charges correspondantes se répartissent régulièrement sur le cercle formant la base d'un cône d'angle α en son sommet S (lequel correspond à l'extrémité commune des soies) avec la verticale (Fig. □–2).

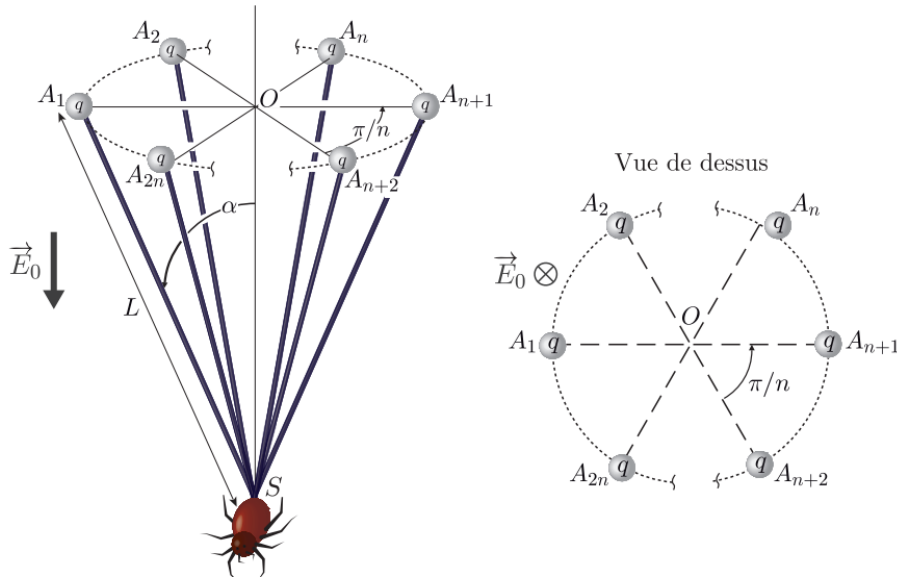


Figure 2: Représentation schématique d'une araignée prête à décoller.

□—3. Montrer que le potentiel électrique créé sur une charge par les $2n - 1$ autres charges s'exprime comme :

$$V = \frac{q}{p\pi\epsilon_o L \sin \alpha} G(n) \quad \text{avec} \quad G(n) - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi k}{2n}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)}$$

On précisera la valeur de l'entier p . On pourra éventuellement considérer les points diamétralement opposés A_k et A_{k+n} avec $1 \leq k \leq n$.

En déduire l'énergie d'interaction électrostatique du système total constitué des $2n$ charges en l'absence de champ électrique extérieur.

S'il n'est soumis qu'à ce potentiel, quelle est alors la forme de l'éventail à l'équilibre ?

On étudie le mouvement de cet éventail autour de sa position d'équilibre en supposant qu'à l'instant t tous les fils forment le même angle $\alpha(t)$ avec la verticale. On simplifie le système en considérant, d'une part, que la masse m de chaque fil est ponctuelle, située en leur milieu et, d'autre part, on néglige l'énergie potentielle de pesanteur et celle de déformation élastique devant l'électrostatique. On suppose finalement que S est fixe.

□—4. Déterminer l'équation différentielle régissant ce mouvement. Discuter la stabilité de l'équilibre et établir l'expression de la période T , du mouvement au voisinage de la position d'équilibre en fonction de ϵ , m , L , q et $G(n)$.

□—5. Déterminer l'expression de l'énergie électrostatique du système lorsque celui-ci est maintenant immergé dans le champ électrique terrestre $\vec{E}_o$ existant au niveau du sol ainsi que l'équation permettant de déterminer la valeur de l'angle α à l'équilibre. Expliquer qualitativement comment varie l'ouverture d'équilibre de l'éventail en fonction respectivement de q , n , L et E_o . On observe un angle $\alpha = 30^\circ$ pour un éventail constitué de $2n = 6$ soies longues de 1 mètre. Que vaut alors la charge q ? On donne $G(3) \simeq 38/(3\sqrt{3})$.

□—6. Calculer le module de la force électrique s'exerçant sur l'araignée au niveau du sol pour une charge dont le module est de l'ordre du nanocoulomb. Par temps clair et uniquement par la force électrique, combien de fils sont-ils nécessaires pour soulever les plus petites araignées ? Commenter ce résultat.

En réalité, lorsqu'elles décollent, les araignées sont situées sur des zones où le champ électrique est bien plus important que dans les conditions normales du fait d'un phénomène connu sous le nom d'effet de pointe. On retrouve ces conditions au sommet des arbres ou du mât du Beagle comme dans l'expérience de Darwin.

Pour appréhender un tel effet, on considère un conducteur plan infini dans lequel un endroit possède la forme d'un coin obtus ou aigu (Fig. 3) dont le sommet O forme l'origine d'un repère de coordonnées polaires. La région de l'espace pour laquelle $0 < \theta < \varphi$ est l'air assimilé au vide ne contenant aucune charge libre. Les conditions aux limites sont $V(r, 0) = V(r, \varphi) = V_o$. On note $V(M)$, le potentiel électrique en un point M de l'espace.

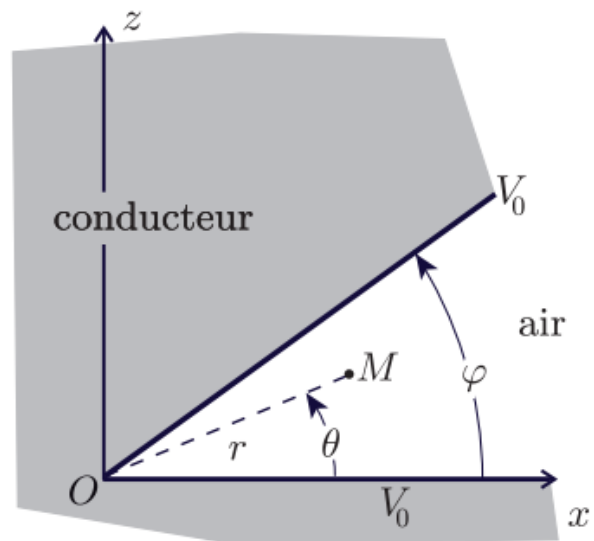


Figure 3: Modèle de coin.

□—7. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $V(r, \theta)$ dans cette région. On cherche une solution aux variables polaires séparées : $V(r, \theta) = f(r) \times g(\theta)$. Écrire les équations vérifiées par f et g et en déduire que $V(r, \theta) = \tilde{V} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{\omega_n} \sin(\omega_n \theta)$. Dans cette relation, $\tilde{V}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des constantes que l'on ne cherchera pas à déterminer. On précisera par contre l'expression de ω_n en fonction de φ et de l'entier positif n .

□—8. En ne considérant que le terme $n = 1$ qui s'avère prépondérant, déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(M)$. En déduire une condition sur φ pour laquelle $\vec{E}(M)$ peut devenir très important si $M \rightarrow 0$.

II.— Propriétés mécaniques des fils d'araignée

L'élongation relative d'un fil de soie de longueur initiale ℓ_o de section S_o soumis à une force de traction d'intensité F est donnée, dans le régime des faibles élongations, par la loi de Hooke : $\frac{\delta \ell}{\ell} = \frac{1}{E} \frac{F}{S_o}$ où E est le module d'Young du matériau constituant le fil.

□—9. Quelle est la dimension de E ?

Montrer que, dans ce régime, le comportement mécanique du fil peut être assimilé à celui d'un ressort de constante de raideur k que l'on exprimera en fonction des données du problème.

Pour mesurer le module de Young d'un fil d'araignée, on procède à une expérience simple. Le fil de longueur ℓ_o est attaché en deux points fixes A et B distants de ℓ_o et situés sur une même horizontale. Une masse m est suspendue au point C milieu du fil. Sous l'effet du poids de cette masse, le fil adopte à l'équilibre une forme en V , dans laquelle les deux segments formant le fil ont la même longueur ℓ .

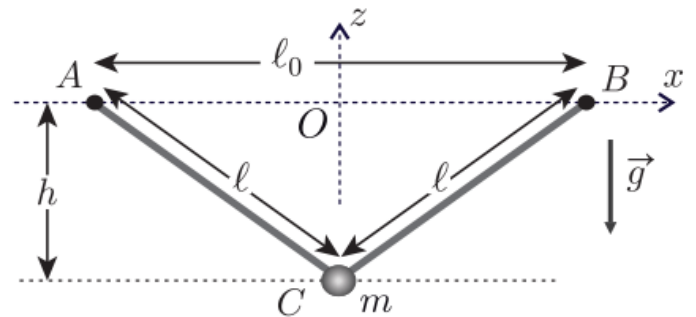


Figure 4: Extension d'un fil.

On mesure alors la hauteur h dont le milieu du fil s'est déplacé par rapport à l'horizontale. Cette configuration d'équilibre est représentée sur la figure 4.

□—10. Établir, lorsque la masse m est suffisamment faible, la loi de puissance qui relie h à m et aux autres variables du problème.

La figure 5 ci-contre reproduit les résultats de cette expérience réalisée avec un fil de longueur $\ell_o = 5$ cm de rayon $a = 5$ m et différentes masses m suspendues.

□–11. Vérifier que la loi obtenue à la question □–10. est compatible avec l'expérience.

Déterminer la constante de raideur k du ressort équivalent au fil ; en déduire une estimation de la valeur numérique du module de Young du fil. On pourra utiliser la figure 9 du formulaire (page 26/105).

L'araignée *Hyptiote cavatus*, qui possède une masse d'environ 7 mg, utilise ses muscles pour enrouler l'un des fils afin de tendre la toile, comme on utilise son bras pour tendre la corde d'un arc.

Elle garde alors cette position jusqu'à ce qu'une proie entre en contact avec la toile. Quand elle relâche la tension, la toile subit alors une très forte accélération puis s'emmêle autour de l'insecte proie, ce qui marque le début du processus de capture.

La vitesse de l'araignée qui reste accrochée à la toile atteint alors une valeur maximale d'environ $v_{max} = 3$ m.s⁻¹ en ayant subi une accélération maximale prodigieuse $a_{max} = 800$ m.s⁻².

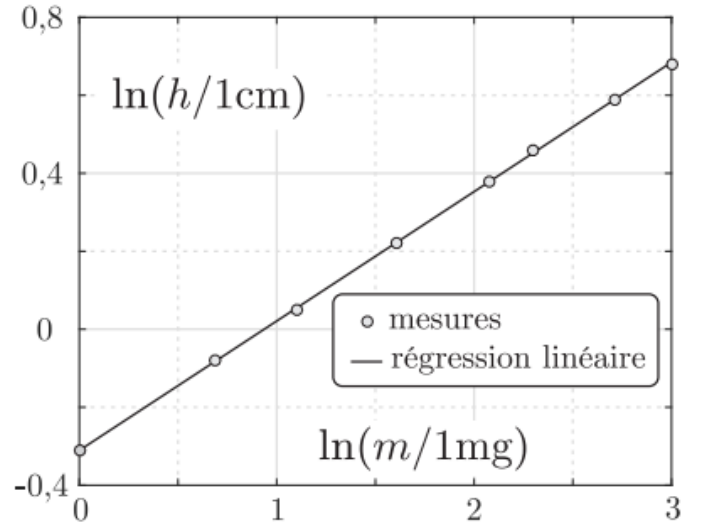


Figure 5: Mesures de $h(m)$.

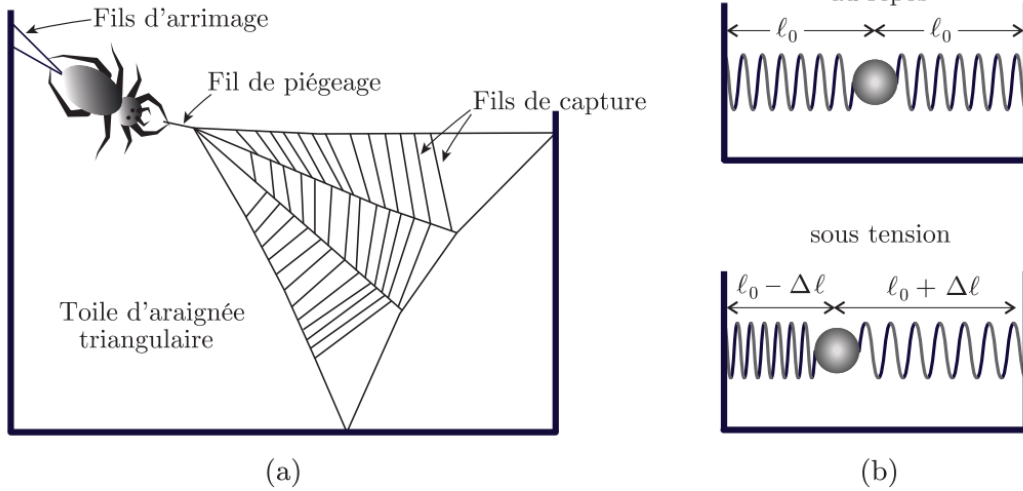


Figure 6: (a) Organisation spatiale schématique de la toile triangulaire servant de piège – (b) Modèle mécanique équivalent au repos et sous tension.

□–12. En modélisant la toile par un simple fil de soie dont on négligera la masse devant celle de l'araignée, estimer, en fonction de v_{max} et a_{max} , l'allongement maximum $\Delta\ell$ du fil avant que l'araignée ne relâche la tension (Fig. 6), ainsi que sa raideur k en fonction de m , v_{max} et a_{max} .

Évaluer, en fonction de m , v_{max} et a_{max} , la puissance mécanique instantanée maximale $\mathcal{P}_{max}$ développée pendant le processus de capture. Sachant que la puissance massique musculaire maximale que peuvent fournir les arthropodes est d'environ $\mathcal{P} = 326$ W.kg⁻¹ par kilo de muscle, estimer la masse de muscle nécessaire qu'il faudrait à notre araignée pour réaliser ce processus de capture sans aide extérieure. Conclure.

Dans les films, le super-héros Spiderman, dont on estime la masse à $m = 75$ kg, poursuit les voitures en se balançant sur des fils d'immeuble en immeuble.

Il attache son fil supposé inextensible, de masse négligeable et de longueur $\ell = 25$ m sur un point de l'immeuble situé en face, à l'horizontale par rapport à sa position. Dans ces conditions on a donc $\theta(0) = \pi/2$.

Il se laisse alors entraîner sans vitesse initiale. (Fig. 7).

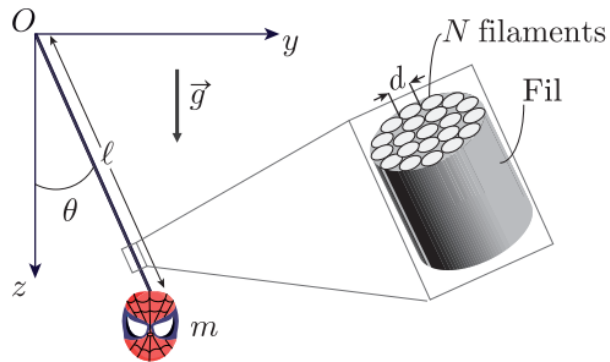


Figure 7: Le vol de SPIDERMAN.

□—13. Écrire les équations du mouvement de SPIDERMAN. En déduire, en fonction de m et g , l'expression de la tension maximale que doit supporter ce fil si l'on suppose qu'il est inextensible.

On suppose que le fil que tisse SPIDERMAN est constitué en réalité de N filaments de soie identiques assemblés en parallèle.

□—14. Déterminer la constante de raideur du ressort équivalent à N ressorts identiques de constante de raideur k disposés en parallèle.

Sachant que le module de Young d'un filament de soie et son rayon valent respectivement $E = 10$ MPa et $a = 5$ μ m, combien de filaments le fil doit-il comporter au minimum pour que les filaments ne subissent pas une déformation supérieure à 1% et donc pouvoir supporter Spiderman lors de son vol ?

Est-ce cohérent avec le diamètre des fils, de l'ordre du centimètre, produits par SPIDERMAN dans les films ?

III.— Produire de la musique avec des fils d'araignée

Du fait de leurs propriétés mécaniques si particulières (valeur importante du module de Young, large domaine d'élasticité et faible masse linéique), des physiciens ont récemment eu l'idée d'assembler des milliers de fils de l'araignée *Nephila pilipes*, particulièrement résistants, pour fabriquer des cordes de violon.

Lorsque la corde fabriquée est utilisée pour produire du son, il convient de s'assurer que sa tension soit bien sûr inférieure à sa tension de rupture T_r , mais également que la corde fonctionne dans son régime élastique. Les premiers résultats obtenus se sont révélés très encourageants et prometteurs notamment en ce qui concerne la qualité du timbre puisque le spectre du son produit présente de nombreux pics d'amplitude importante à hautes fréquences.

On étudie les mouvements d'un fil d'araignée de longueur ℓ de masse linéique μ , autour de sa position d'équilibre. Au repos, le fil est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal (Ox). On note $z(x, t)$ le déplacement du point du fil à l'abscisse x à l'instant t par rapport à sa position d'équilibre $z = 0$. On ne considère que les mouvements latéraux de faible amplitude s'effectuant dans le plan Oxz (Fig. 8). Le fil étant accroché en ses deux extrémités en deux points fixes. La tension du fil au point d'abscisse x à l'instant t est notée : $\vec{T}(x, t) = T_x(x, t)\hat{e}_x + T_z(x, t)\hat{e}_z$.

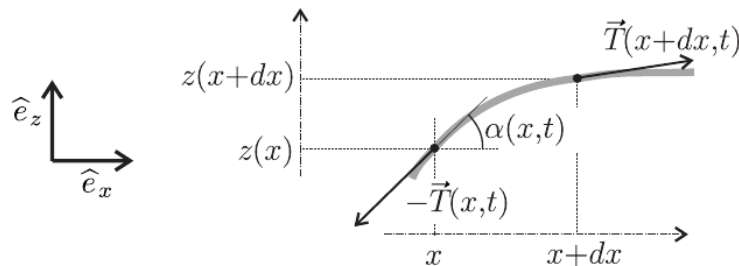


Figure 8: Fil horizontal subissant des déformations de faible amplitude.

On effectue les deux hypothèses suivantes :

- La déflexion est de faible amplitude de même que l'angle $\alpha(x, t)$ que fait le fil avec l'horizontale à la position x et à l'instant t (voir Fig. 8), ce qui entraîne : $\left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \ll 1$.
- On néglige les effets de la pesanteur.

□—15. On considère la portion de fil comprise entre les plans d'abscisses x et $x + dx$. Exprimer la longueur de portion de fil ds , $\cos[\alpha(x, t)]$ et $\sin[\alpha(x, t)]$ en fonction de dx et $\frac{\partial z}{\partial x}$.

En appliquant le théorème de la résultante cinétique à cette portion de fil, montrer que $T_x(x, t)$ ne dépend pas de x .

Que peut-on conclure pour la norme T de la tension dans le fil ?

□—16. Montrer que le déplacement du fil $z(x, t)$ vérifie alors l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad (10)$$

On exprimera c en fonction de T et μ . Que représente cette grandeur physique ?

□—17. Montrer que des fonctions de la forme $z(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ sont des solutions de cette équation. Interpréter le sens physique des fonctions f et g .

On cherche les solutions correspondant à un régime purement sinusoïdal. On utilise la représentation complexe de ces solutions sous la forme :

$$z(x, t) = \underline{A}e^{j(\omega t - kx)} + \underline{B}e^{j(\omega t + kx)}$$

où ω est la pulsation du signal, k l'amplitude du vecteur d'onde, $\underline{A}$ et $\underline{B}$ des amplitudes complexes.

□—18. Traduire les conditions aux limites imposées au fil en des contraintes sur $z(x, t)$. En déduire la relation entre $\underline{A}$ et $\underline{B}$ ainsi que les valeurs de ω permises. Comment appelle-t-on ce type d'onde et pourquoi ?

□—19. Sachant que la fréquence de vibration de la note jouée (correspondant à la fréquence de la note fondamentale) vaut 300 Hz, que la longueur du fil est $\ell = \frac{1}{3}$ m et que sa masse linéique est $\mu = 0,5 \text{ mg.m}^{-1}$, quelle doit être la tension T appliquée à la corde ? Sachant que la tension T_e au-delà de laquelle la corde n'est plus dans son régime élastique est de l'ordre de 10 newtons, que pouvez vous conclure ?

Dans le cadre d'un modèle plus élaboré on prend en compte la raideur du fil à travers son module de Young E . L'équation de propagation des ondes de déformation de faible amplitude dans un fil de

rayon a devient alors :

$$\mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{E\pi a^4}{4} \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0 \quad (11)$$

□—20. En supposant que la déformation $z(x, t)$ de la corde est de la même forme que précédemment, établir la relation de dispersion donnant k en fonction de ω et des paramètres du problème. Montrer que les fréquences propres de la corde s'écrivent alors sous la forme :

$$f_n = \frac{nc}{2\ell} \sqrt{1 + Bn^2} \quad (12)$$

où B est une grandeur physique que l'on exprimera en fonction de E , T , ℓ et a .

Sachant que pour la corde fabriquée à partir des fils d'araignée $E = 6,0$ GPa et $a = 350$ μm et que pour une corde classique $E = 2,5$ GPa et $a = 400$ μm , que pouvez-vous conclure sur la nature du son produit à T et ℓ fixées ?

Formulaire

Détail de la représentation graphique de la fonction logarithme népérien

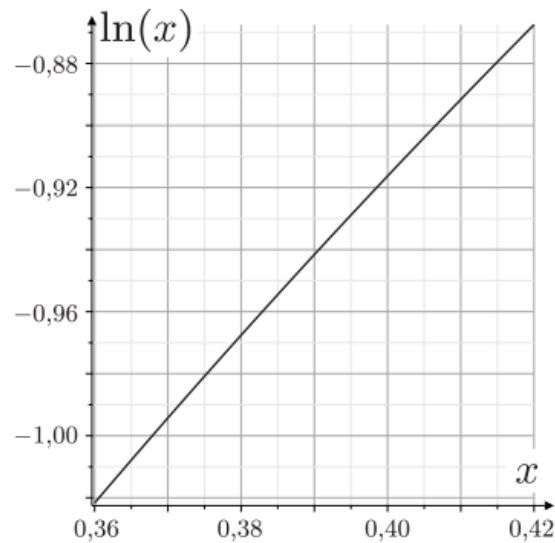


Figure 9: Graphe de la fonction $\ln x$ pour $x \in [0,36; 0,42]$.

Opérateur gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z$$

Rayon Terre	$R_t = 6400$ km
Permittivité électrique du vide	$\varepsilon_o = 8,9 \times 10^{-12} \simeq \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F.m}^{-1}$
Accélération de pesanteur terrestre	$g = 10 \text{ m.s}^{-2}$
Masse volumique de l'eau	$\rho_e = 1,0 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

ÉPREUVE DE PHYSIQUE 2 -MP

À propos des araignées

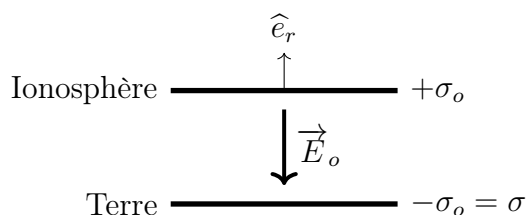
I.— Des araignées volantes

□—1. On assimile une araignée à une grosse goutte d'eau de diamètre d :

$$m_g = \frac{4}{3}\pi\rho_e \left(\frac{d}{2}\right)^3$$

Le diamètre d est entre 2 mm et 7 mm, soit une estimation de masse m_g entre 4 mg et 1,7 g.

□—2. Le champ E_o crée à l'intérieure du condensateur plan (*atmosphère terrestre*) :



$$\begin{aligned} \vec{E}_o &= -\frac{\sigma_o}{\varepsilon_o} \hat{e}_r = -E_o \hat{e}_r \\ \Rightarrow \sigma_o &= \varepsilon_o E_o = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \times 120 \simeq 10^{-9} \text{ C.m}^{-2} \\ \Rightarrow \sigma &\simeq -10^{-9} \text{ C.m}^{-2} \end{aligned}$$

- Modèle : $V_{\text{modèle}} = E_o z_o = 7,2 \times 10^6 \text{ V}$;
- Mesure : $V_{\text{mesure}} = 3,6 \times 10^5 \text{ V}$.
- $\frac{V_{\text{modèle}}}{V_{\text{mesure}}} \sim 20$: le modèle est insatisfaisant.

□—3. On a $2n$ fils, soit $2n$ charges allant de 1 à $2n$. Le potentiel V crée sur une charge par les $2n - 1$ autres charges (considérons A_1 la charge cible) :

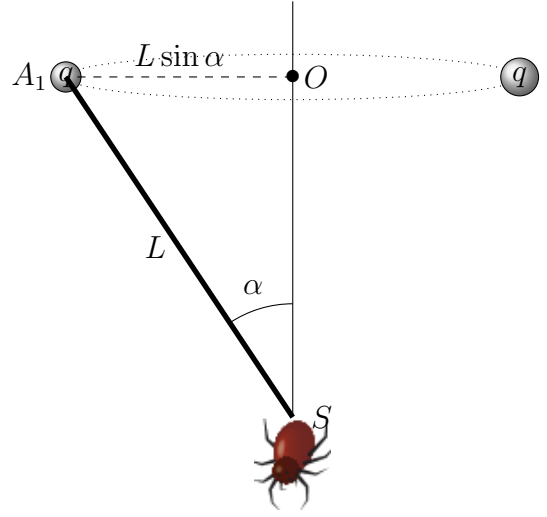
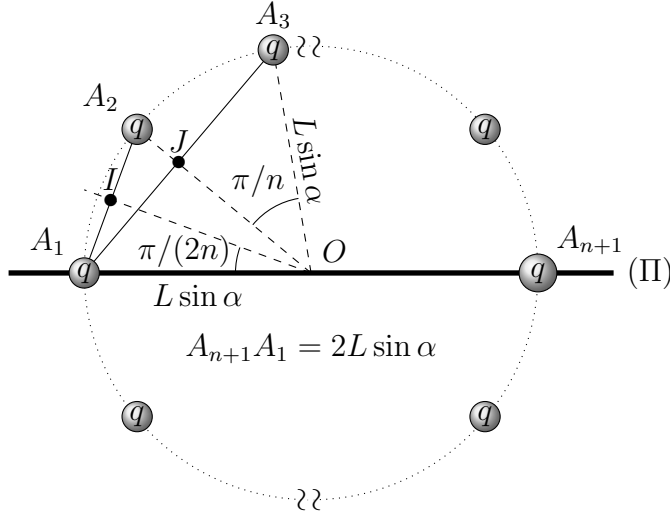
$$V = \sum_{i \neq 1}^{2n-1} V_{i,1} \quad \text{avec} \quad V_{i,1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o A_i A_1}$$

- D'après la FIGURE 2 du texte, on constate que le plan (II) (*représenté par sa trace*) est un plan de symétrie :

$$\sum_{i=2}^n V_{i,1} = \sum_{i=n+2}^{2n} V_{i,1}$$

- Le potentiel V s'écrit :

$$V = V_{n+1,1} + 2 \sum_{i=2}^n V_{i,1} = V_{n+1,1} + 2 \sum_{i=2}^n \frac{q}{4\pi\varepsilon_o A_i A_1} \quad \text{avec} \quad V_{n+1,1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o A_{n+1} A_1} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_o L \sin \alpha}$$



$$\left| \begin{array}{l} A_2A_1 = 2A_2I = 2OA_1 \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 2L \sin \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \\ A_3A_1 = 2A_3J = 2OA_1 \sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right) = 2L \sin \alpha \sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right) \end{array} \right. \Rightarrow A_iA_1 = 2L \sin \alpha \sin\left(\frac{(i-1)\pi}{2n}\right)$$

Soit :

$$\begin{aligned} V &= \frac{q}{8\pi\epsilon_o L \sin \alpha} + \frac{q}{8\pi\epsilon_o L \sin \alpha} \sum_{i=2}^n \frac{2}{\sin\left(\frac{(i-1)\pi}{2n}\right)} \\ &= \frac{q}{8\pi\epsilon_o L \sin \alpha} \left[1 + \sum_{i=2}^n \frac{2}{\sin\left(\frac{(i-1)\pi}{2n}\right)} \right] = \frac{q}{8\pi\epsilon_o L \sin \alpha} \underbrace{\left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} \right]}_{G(n)} ; \quad (k = i-1) \\ &= \frac{q}{p\pi\epsilon_o L \sin \alpha} G(n) \quad ; \quad p = 8. \end{aligned}$$

Énergie d'interaction $\mathcal{E}_{int}$:

$$\mathcal{E}_{int} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} q_i V = \frac{1}{2} 2nqV = nqV = \frac{nq^2}{8\pi\epsilon_o L \sin \alpha} G(n)$$

Équilibre du système :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_{int}}{d\alpha} \right)_{\alpha_{eq}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos \alpha_{eq} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_{eq} = \pi/2.$$

A l'équilibre, les fils (*modélisés*) sont dans un même plan et leurs extrémités qui portent chacune une charge q décrivent un cercle de centre S .

□—4. D'après le texte, toutes les énergie potentielles éventuelles autre que $\mathcal{E}_{int}$ sont négligeables. Le système est, alors, *conservatif* et son énergie totale $\mathcal{E}_{tot}$ est *conservée* :

$$\frac{d\mathcal{E}_{tot}}{dt} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{int} = \frac{1}{2} 2nmv^2 + \frac{nq^2}{8\pi\epsilon_o L \sin \alpha} G(n) \quad \text{et} \quad v = \frac{L}{2} \dot{\alpha}$$

L'équation différentielle qui régit le mouvement du précédente éventail s'écrit, alors :

$$\frac{nmL^2}{4} \ddot{\alpha} - \frac{nq^2 \cos \alpha}{8\pi\epsilon_o L \sin^2 \alpha} G(n) = 0 \quad \text{ou} \quad mL^2 \ddot{\alpha} - \frac{q^2 \cos \alpha}{4\pi\epsilon_o L \sin^2 \alpha} G(n) = 0.$$

A voisinage de la position d'équilibre $\alpha_{eq} = \frac{\pi}{2}$,
$$\begin{cases} \cos \alpha \simeq \cos \alpha_{eq} - (\alpha - \alpha_{eq}) \sin \alpha_{eq} = -(\alpha - \alpha_{eq}) \\ \sin \alpha \simeq \sin \alpha_{eq} + (\alpha - \alpha_{eq}) \cos \alpha_{eq} = 1. \end{cases}$$

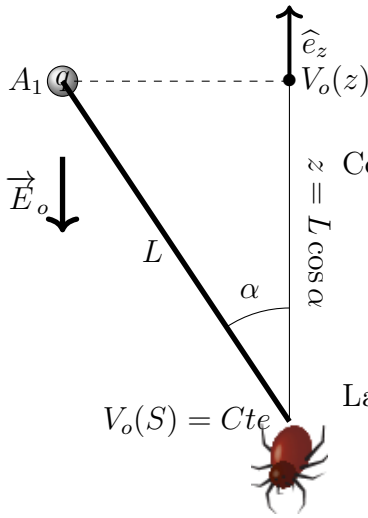
On pose $\theta = \alpha - \alpha_{eq}$, l'équation s'écrit :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{q^2 G(n)}{4mL^3 \pi \varepsilon_o} \theta(t) = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{\theta}(t) + \omega^2 \theta(t) = 0$$

C'est l'équation qui régit un mouvement oscillatoire (de α autour de α_{eq}) de période $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi L}{q} \sqrt{\frac{\pi \varepsilon_o L m}{G(n)}}$. La position d'équilibre $\alpha_{eq} = \frac{\pi}{2}$ est, alors, une position d'équilibre stable.

□—5. L'énergie électrostatique $\mathcal{E}_{elec}$ du système en présence d'un champ extérieur $\vec{E}_o$:

$$\mathcal{E}_{elec} = \mathcal{E}_{int, E_o=0} + \mathcal{E}_{int, E_o \neq 0} = nqV + \sum_{i=1}^{2n} q_i V_o \quad \text{avec} \quad \vec{E}_o = -\overrightarrow{\text{grad}} V_o = -\frac{dV_o}{dz} \hat{e}_z = -E_o \hat{e}_z \quad (E_o > 0).$$



$$V_o(z) = E_o z + V_o(S) = E_o L \cos \alpha + V_o(S)$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{elec} = \frac{nq^2 G(n)}{8\pi \varepsilon_o L \sin \alpha} + 2nq E_o L \cos \alpha + V_o(S)$$

Condition d'équilibre :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathcal{E}_{elec}}{d\alpha} \right)_{\alpha_{eq}} = 0 &\Rightarrow \frac{qG(n) \cos \alpha_{eq}}{8\pi \varepsilon_o L \sin^2 \alpha_{eq}} + 2E_o L \sin \alpha_{eq} = 0 \\ &\Rightarrow qG(n) \cos \alpha_{eq} = -16\pi \varepsilon_o L^2 E_o \sin^3 \alpha_{eq}. \end{aligned}$$

La charge électrique q ($n = 3$) :

$$q = -\frac{16\pi \varepsilon_o L^2 E_o \sin^3 \alpha_{eq}}{G(3) \sin \alpha_{eq}} = -\frac{12\sqrt{3} \cdot 120 \cdot 10^{-9} \cdot 1/8}{38\sqrt{3}/2} = -10^{-9} \text{ C}.$$

Le sens de variation de $\alpha_{eq}(n, q, L, E_o)$:

$$qG(n) \cos \alpha_{eq} = -16\pi \varepsilon_o L^2 E_o \sin^3 \alpha_{eq} \Rightarrow \frac{\sin^3 \alpha_{eq}}{\cos \alpha_{eq}} = -\frac{qG(n)}{16\pi \varepsilon_o L^2 E_o}$$

- α_{eq} croît avec q et $G(n)$,
- α_{eq} décroît quand L croît ou quand E_o croît,

□—6. La force résultante qui s'exerce sur les fils qui maintiennent l'araignée est (*en négligeant le poids de ces quelques dizaines de fils*) :

$$\vec{F}_{ar} = \underbrace{\vec{F}_{fils/E_o}}_{\text{force électrique due au champ } \vec{E}_o} + \underbrace{\vec{P}_{ar}}_{\text{action de la pesanteur}} = 2nq \vec{E}_o + m_g \vec{g}$$

La norme de la force d'origine électrique (*qui s'exerce sur les fils*) : $F_{fils/E_o} = 2n|q|E_o$. La force d'origine électrostatique permettrait à l'araignée de décoller est telle que $F_{fils/E_o} > m_g g$. Soient :

- Si on prend $m_g = 4 \text{ mg} = 4 \times 10^{-6} \text{ kg}$

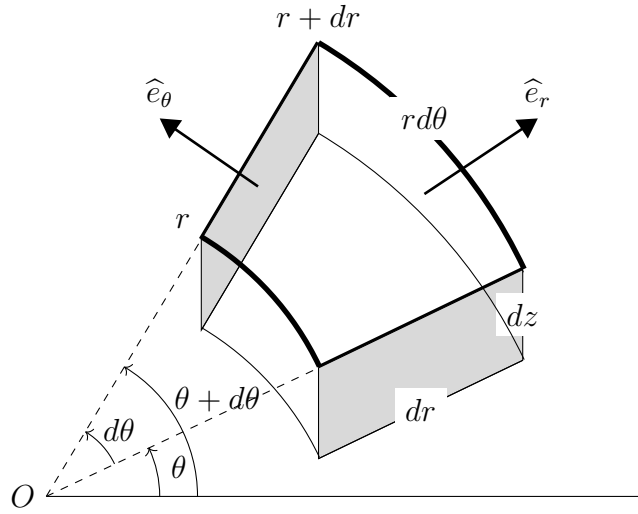
$$n|q|E_o > m_g g \Rightarrow n \gg \frac{333}{2} \approx 165.$$

- Si on prend $m_g = 1,7 \text{ g} = 1,7 \times 10^{-3} \text{ kg}$; c'est déjà trop pour la petite masse, il en sera autant pour les grandes masses (*dans l'échelle des araignées*). Chose qui "n'appuie pas" l'adoption facile du modèle.

□—7. Le champs $\vec{E}(M)$ crée en M , exprimé par ces composantes (E_r, E_θ, E_z) dans la base cylindrique $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z)$, s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{E}(M) &= E_r(M)\hat{e}_r + E_\theta(M)\hat{e}_\theta + E_z(M)\hat{e}_z \\ &= -\vec{\text{grad}}V(r, \theta) = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{e}_\theta - \cancel{\frac{\partial V}{\partial z}}\hat{e}_z \Rightarrow \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\ E_z = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Théorème de GAUSS : Considérons une surface fermée (Σ) délimitant un élément de volume $d\tau$ centré autour de M ; le flux $\delta\Phi_\Sigma$ de $\vec{E}(M)$ à travers (Σ) est égale à la charge Q_i dans $d\tau$ divisée par ε_o . Dans notre situation $Q_i = 0$, d'où : $\delta\Phi_\Sigma = 0$.



- L'élément de volume en coordonnées cylindrique $d\tau = r dr d\theta dz$.

$$\delta\Phi_\Sigma = \delta\Phi_r + \delta\Phi_\theta \Rightarrow \begin{cases} \delta\Phi_r = E_r(r + dr, \theta)(r + dr)d\theta dz - E_r(r, \theta)r d\theta dz = \frac{1}{r} \frac{\partial(r E_r)}{\partial r} d\tau \\ \delta\Phi_\theta = E_\theta(r, \theta + d\theta)dr dz - E_\theta(r, \theta)r dr dz = \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} d\tau \end{cases}$$

Soit :

$$d\Phi_\Sigma = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} \right] d\tau = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right] d\tau = 0$$

- D'où l'équation différentielle vérifiée par $V(r, \theta)$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V(r, \theta)}{\partial \theta^2} = 0 \quad (13)$$

- On cherche la solution de la forme : $V(r, \theta) = f(r) \times g(\theta)$;

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} \right) = \frac{g}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{df(r)}{dr} \right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V(r, \theta)}{\partial \theta^2} = \frac{f}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

Les équations vérifiant par $f(r)$ et $g(\theta)$ sont telles que :

$$\frac{g}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{df(r)}{dr} \right) + \frac{f}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{f} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df(r)}{dr} \right) = - \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\theta^2} \underbrace{= K^2 \text{ avec } K \text{ constante réelle.}}_{\text{c'est le cas physiquement acceptable.}}$$

En effet, Les variables angulaire et radiales sont indépendantes, si une fonction de θ est égale à une fonction de r , cette fonction est nécessairement constante. On pose K^2 (K réelle) cette constante qui correspond à la présente situation étudiée⁽³⁾.

- Forme de la solution :

$$V(r, \theta) = \tilde{V} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{\omega_n} \sin(\omega_n \theta) \quad (14)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega_n^2 r^{\omega_n-2} \sin(\omega_n \theta) \quad \text{et} \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V(r, \theta)}{\partial \theta^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega_n^2 r^{\omega_n-2} \sin(\omega_n \theta)$$

La fonction potentielle de l'équation (14) est bien une solution de l'équation différentielle (13).

- Conditions aux limites :

$$V(r, 0) = V(r, \varphi) = V_o \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} V_o = \tilde{V} \\ V_o = \tilde{V} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{\omega_n} \sin(\omega_n \varphi) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin(\omega_n \varphi) = 0 \\ \omega_n \varphi = n\pi \quad \text{ou} \quad \omega_n = \frac{n\pi}{\varphi} \end{array} \right.$$

□—8. Pour $n = 1$:

$$V(r, \theta) = \tilde{V} + a_1 r^{\omega_1} \sin(\omega_1 \theta) = \tilde{V} + a_1 r^{\pi/\varphi} \sin\left(\frac{\pi\theta}{\varphi}\right)$$

$$\vec{E}(M) = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\pi a_1}{\varphi} r^{(\pi/\varphi)-1} \sin\left(\frac{\pi\theta}{\varphi}\right) \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{\pi a_1}{\varphi} r^{(\pi/\varphi)-1} \cos\left(\frac{\pi\theta}{\varphi}\right) \\ E_z = 0 \end{array} \right.$$

$$\vec{E}(M) = -\frac{\pi a_1}{\varphi} r^{(\pi/\varphi)-1} \left[\sin\left(\frac{\pi\theta}{\varphi}\right) \hat{e}_r + \cos\left(\frac{\pi\theta}{\varphi}\right) \hat{e}_\theta \right]$$

$\vec{E}(M)$ peut devenir très important si $M \rightarrow O$ à condition que $\pi/\varphi < 1$ ou $\varphi > \pi$.

II.— Propriétés mécaniques des fils d'araignée

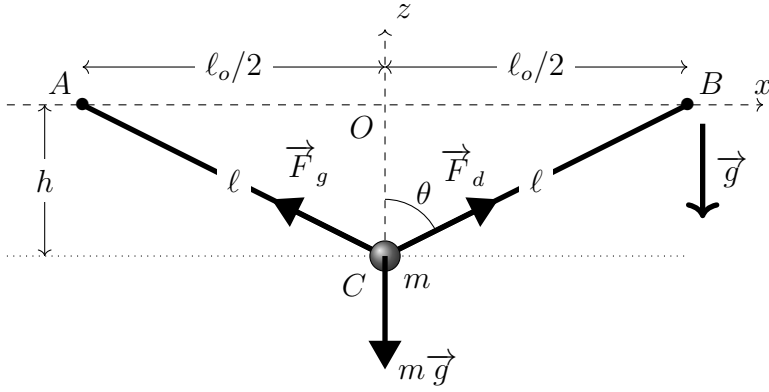
□—9. Loi de HOOK :

$$[E] = \frac{[F]}{[S_o]} = \frac{M.L.T^{-2}}{L^2} = M.L^{-1}.T^{-2} = [P] \quad ; \quad (\text{homogène à une pression.})$$

$$\frac{\delta \ell}{\ell_o} = \frac{1}{E} \frac{F}{S_o} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{ES_o}{\ell_o} \delta \ell = k \delta \ell \quad \text{avec} \quad k = \frac{ES_o}{\ell_o} \quad (\text{constante de raideur.})$$

⁽³⁾Mouvements latéraux de faibles amplitudes. Autrement, la solution va être soit nulle (*pas de mouvement*) soit divergente (*mouvement révolutif*).

□-10.



Par symétrie de la figure, on peut écrire

$$\|\vec{F}_g\| = \|\vec{F}_d\| = F$$

avec $F = k \left(\ell - \frac{\ell_o}{2} \right) = k \left(\sqrt{h^2 + \frac{\ell_o^2}{4}} - \frac{\ell_o}{2} \right)$

L'équilibre de la masse m se traduit par :

$$m\vec{g} + \vec{F}_g + \vec{F}_d = \vec{0}$$

Par projection de cette équation vectorielle suivant (Cz) , on a :

$$mg = 2F \cos \theta = 2k \left(\sqrt{h^2 + \frac{\ell_o^2}{4}} - \frac{\ell_o}{2} \right) \frac{h}{\ell} = 2kh \left(1 - \frac{\ell_o/2}{\sqrt{h^2 + \frac{\ell_o^2}{4}}} \right)$$

La masse m est suffisamment faible : $h \ll \ell_o/2$. On pose $\epsilon = \frac{h}{\ell_o/2} \ll 1$;

$$mg = 2kh \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} \right) \simeq 2hk\epsilon^2/2 \Rightarrow mg \simeq \frac{4h^3k}{\ell_o^2} \quad \text{avec} \quad k = \frac{ES_o}{\ell_o/2}$$

□-11. D'après la question □-10. , $h^3 = \frac{mg\ell_o^2}{4k} \Rightarrow \ln(h) = \frac{1}{3} \ln(m) + \ln \left(\frac{g\ell_o^2}{4k} \right)^{1/3}$: équation d'une droite de pente 1/3 dans le plan $(\ln(h), \ln(m))$.

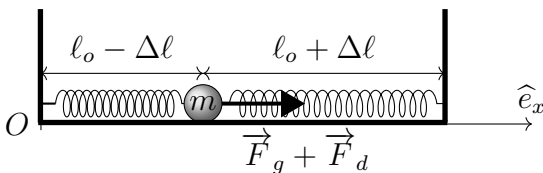
- La pente p_4 de la droite donné par la figure 4 est $p_4 \approx \frac{0,7 - (-0,3)}{3 - 0} = 1/3$; la loi obtenue à la question □-10. est, donc, *compatible* avec l'expérience.
- La constante k est déterminée à partir de l'abscisse à l'origine :

$$\ln \left(\frac{g\ell_o^2}{4k} \right)^{1/3} = -0,3 \Rightarrow \ln \left(\frac{g\ell_o^2}{4k} \right) = -0,9 \Rightarrow \frac{g\ell_o^2}{4k} \simeq 0,4 \Rightarrow k \approx 5,6 \times 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}.$$

- Module d'YOUNG E :

$$k = \frac{ES_o}{\ell_o/2} \Rightarrow E = \frac{k\ell_o}{2S_o} \approx 2 \times 10^6 \text{ N.m}^{-2}$$

□-12.



$$\vec{F}_g = -k(\ell_o + \Delta\ell - \ell_o) \hat{e}_x \text{ et } \vec{F}_d = -k(-\ell_o - \Delta\ell + \ell_o) \hat{e}_x$$

$$\vec{F}_d = +k\Delta\ell \hat{e}_x ; \text{ force exercée par la partie droite,}$$

$$\vec{F}_g = +k\Delta\ell \hat{e}_x ; \text{ force exercée par la partie gauche,}$$

Relation fondamentale de la dynamique appliquée à m d'accélération $\vec{a}$:

$$\vec{F}_g + \vec{F}_d = m\vec{a} \Rightarrow 2k\Delta\ell \hat{e}_x = ma \hat{e}_x \Rightarrow 2k\Delta\ell = ma = m \frac{dv}{dt}. \quad (15)$$

Multiplions, par $v = \frac{dx}{dt}$, les deux termes de légalité de l'équation (15) :

$$m \frac{dv}{dt} \times v = 2k\Delta\ell \times v \Rightarrow \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (v^2) = k \frac{d}{dt} (\Delta\ell^2) \Rightarrow v = \Delta\ell \sqrt{\frac{2k}{m}}. \quad (16)$$

○ L'allongement maximum $\Delta\ell_{max}$ du fil : à partir des équations (15) et (16) ;

$$2k\Delta\ell_{max} = ma_{max} \quad \text{et} \quad v_{max} = \Delta\ell_{max} \sqrt{\frac{2k}{m}} \Rightarrow \Delta\ell_{max} = \frac{v_{max}^2}{a_{max}}.$$

○ La raideur k :

$$2k = \frac{ma_{max}}{\Delta\ell_{max}} \Rightarrow k = \frac{ma_{max}^2}{2v_{max}^2}.$$

○ La puissance maximale $\mathcal{P}_{max}$:

$$\text{La puissance mécanique : } \mathcal{P}_m = \mathcal{P}_d + \mathcal{P}_g = 2k\Delta\ell \times v \Rightarrow \mathcal{P}_{max} = 2k\Delta_{max}v_{max} = ma_{max}v_{max}$$

○ La masse M_{muscle} de muscle nécessaire pour réaliser le processus de capture est telle que :

$$\mathcal{P}_{max} = M_{muscle} \mathcal{P} \Rightarrow M_{muscle} = \frac{ma_{max}v_{max}}{\mathcal{P}} \approx 50 \text{ mg}.$$

Conclusion : M_{muscle} est égale à peu près 7 fois la masse m de ce type d'araignée. Elle est, donc, impossible de réaliser ce processus sans aide extérieure.

□—13. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à SPIDERMAN d'accélération $\vec{a}_{spm}$ par rapport à l'immeuble en face :

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}_{spm} \quad \text{avec } \vec{T} \text{ la tension du fil.} \quad (17)$$

Considérons la base polaire $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta)$; l'expression de l'accélération $\vec{a}_{spm}$: $\vec{a}_{spm} = \ell \left(-\dot{\theta}^2 \hat{e}_r + \ddot{\theta} \hat{e}_\theta \right)$

- projection de la relation vectorielle (17) suivant $\hat{e}_r$:

$$-T + mg \cos \theta = -m\ell \dot{\theta}^2 \quad (18)$$

- projection de la relation vectorielle (17) suivant $\hat{e}_\theta$:

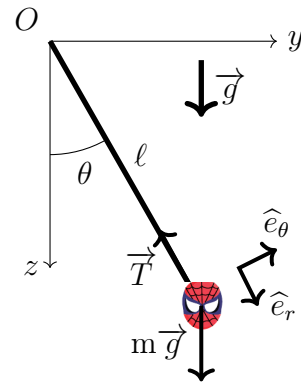
$$-mg \sin \theta = m\ell \ddot{\theta} \quad (19)$$

- L'équation (19) permet d'écrire (avec les conditions initiales) :

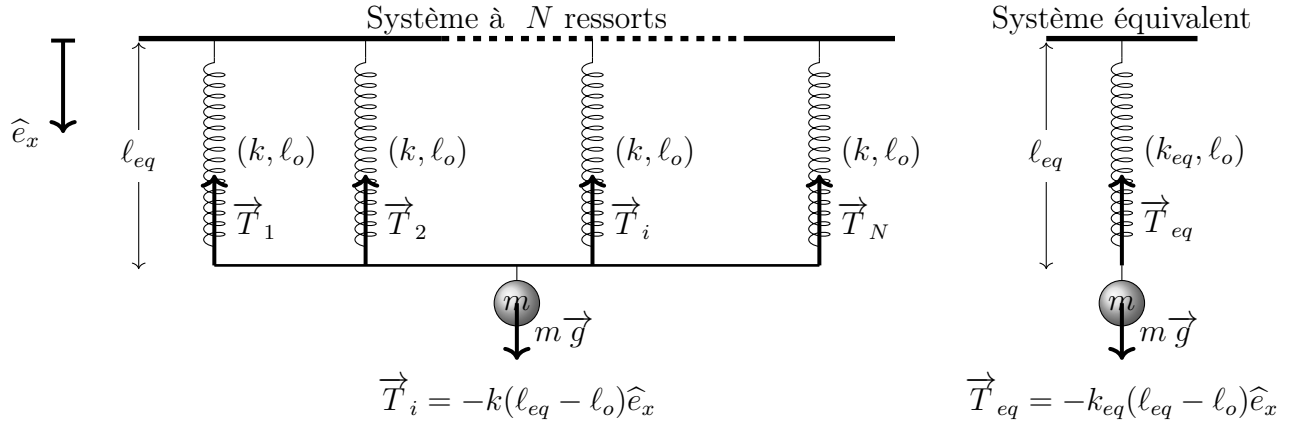
$$-g\dot{\theta} \sin \theta = \ell \ddot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\ell} \cos \theta.$$

La relation (18) devient :

$$T(\theta) = 3mg \cos \theta \Rightarrow T_{max} = 3mg.$$



□—14. On considère N ressorts identiques, de longueurs à vide ℓ_o et de constantes de raideur k , disposés en parallèle :



○ L'équilibre du système à N ressorts :

$$\sum_1^N \vec{T}_i + m\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow Nk(\ell_{eq} - \ell_o) = mg$$

○ L'équilibre du système équivalent :

$$\vec{T}_{eq} + m\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow k_{eq}(\ell_{eq} - \ell_o) = mg \Rightarrow k_{eq} = Nk.$$

○ Prenons une déformation (*relative*) limite à 1% :

$$\left(\frac{\delta\ell}{\ell}\right)_{\text{limite}} = 10^{-2} \quad \text{avec} \quad Nk\delta\ell = mg \Rightarrow N_{\text{limite}} = 10^2 \frac{mg}{\ell k}$$

$$k = \frac{ES_o}{\ell} = \frac{E\pi a^2}{\ell} \Rightarrow N_{\text{limite}} = 10^2 \frac{mg}{E\pi a^2} = \frac{10^3 \times 75}{\pi \times 10^7 \times 25 \times 10^{-12}} \sim 10^8 \text{ filaments.}$$

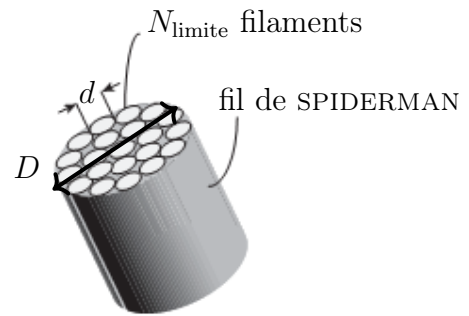
○ Cohérence : Soient D le diamètre du fil de SPIDERMAN et $d = 2a$ celui de chaque filament ;

Sur une section du fil :

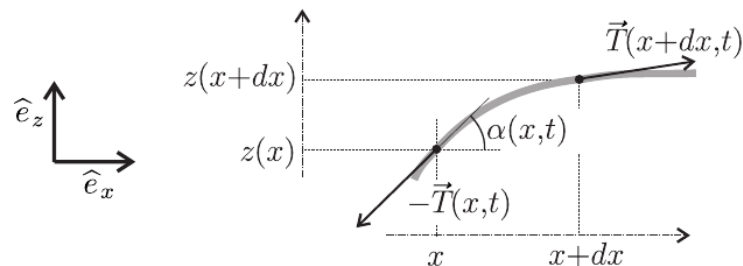
$$D^2 = N_{\text{limite}} d^2 \sim 10^8 \times 10^{-10} = 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow D \sim 1 \text{ cm.}$$

Le résultat est bien cohérent avec les fils produits par SPIDERMAN dans les films.



III.— Produire de la musique avec des fils d'araignée



□—15.

- Élément de la corde : $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dz)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} \approx dx$,
- $\sin[\alpha(x, t)] = \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dx} \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2} \approx \frac{\partial z}{\partial x}$ et $\cos[\alpha(x, t)] = \frac{dx}{ds} = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2} \approx 1$.
- Le théorème de la résultante cinétique appliquée à la portion ds , de masse $dm = \mu ds$ (le poids étant négligeable) :

$$\mu \vec{a} = \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t)$$

$$\begin{aligned} \text{Projection suivant } \hat{e}_x ; \quad 0 &= T_x(x + dx, t) - T_x(x, t) = \frac{\partial T_x(x, t)}{\partial x} dx \\ \Rightarrow T_x(x, t) &\text{ est indépendante de } x. \end{aligned}$$

- La tension $\vec{T}(x, t) = T_x(t)\hat{e}_x + T_z(x, t)\hat{e}_z \Rightarrow T(x, t) = T_x(t) \sqrt{1 + \frac{T_z^2(x, t)}{T_x^2(t)}}$;

$$\frac{T_z}{T_x} = \tan[\alpha(x, t)] \approx \alpha(x, t) = \frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow T(x, t) = T_x(t) \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2} \approx T_x(t).$$

La norme T , elle aussi, est indépendante de x .

□—16. Le théorème de la résultante cinétique appliquée à la portion ds , de masse $dm = \mu ds$ (le poids étant négligeable) :

$$\mu \vec{a} = \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t)$$

$$\text{Projection suivant } \hat{e}_z ; \quad \mu dx \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) = T_z(x + dx, t) - T_z(x, t) = \frac{\partial T_z(x, t)}{\partial x} dx.$$

$$\text{or } T_z = T_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = T \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ et } T \text{ ne dépend pas de } x \Rightarrow \mu dx \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) = T dx \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$$

Soit :

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) - c^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (20)$$

c est la célérité des perturbations *latérales* sur la corde.

□—17. On pose : $z(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \dot{f}(x - ct) ; & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) &= \ddot{f}(x - ct) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) &= -c\dot{f}(x - ct) ; & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right) &= c^2 \ddot{f}(x - ct) \end{aligned} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right) - c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = 0.$$

de même :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) &= \dot{g}(x + ct) & \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right) &= \ddot{g}(x + ct) \\ \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) &= c\dot{g}(x + ct) & \left(\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right) &= c^2 \ddot{g}(x + ct) \end{aligned} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right) - c^2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right) = 0.$$

f et g sont solution de l'équation (20) et la superposition est aussi solution.

- Sens physique de $f(x, t)$: $f(x + c\Delta t, t + \Delta t) = f(x - ct) = f(x, t)$;

$f(x, t) = f(x - ct)$: onde progressive dans le sens des x croissants.

- Sens physique de $g(x, t)$: $g(x - c\Delta t, t + \Delta t) = g(x + ct) = g(x, t)$;

$g(x, t) = g(x + ct)$: onde progressive dans le sens des x décroissants.

La solution générale de l'équation (20) est la somme d'une onde plane progressive dans le sens des x croissants et d'une onde plane progressive dans le sens des x décroissants, les deux à la même vitesse

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

□—18. Solution harmonique : $z(x, t) = \underline{A}e^{j(\omega t - kx)} + \underline{B}e^{j(\omega t + kx)}$.

$$\begin{aligned} \text{Conditions aux limites : } z(x=0, t) = z(x=\ell, t) = 0 \\ (\text{extrémités fixes}). \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \underline{A} = -\underline{B} \\ -2j\underline{A} \sin(k\ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow k_n \ell = n\pi ; n \in \mathbb{N}^*$$

$$\omega_n = ck_n = \frac{n\pi c}{\ell} : \text{ quantification de } \omega \text{ (modes propres)}$$

Solution :

$$z(x, t) = -2j\underline{A}e^{j\omega} \sin(kx) \quad \text{ou} \quad z(x, t) = 2|\underline{A}| \sin(\omega t) \sin(kx) = H(x) \times G(t)$$

Il s'agit d'une onde *stationnaire*. L'appellation provient de l'immobilité des *nœuds* ($z(x_N, t) = 0$) et absence de propagation des *ventres* ($z(x_v, t)$ est extrémum).

$$\square\text{—19.} \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{\ell} = 2\pi f_n \Rightarrow f_1 = \frac{c}{2\ell} = \frac{1}{2\ell} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow T = 4\mu \ell^2 f_1^2 = 2 \times 10^{-2} \text{ N.}$$

$$T_e = 10 \text{ N} \Rightarrow T < T_e : \text{ la corde est dans son régime élastique.}$$

□—20. On admet la solution sous la forme précédente $z(x, t) = 2|\underline{A}| \sin(\omega t) \sin(kx)$;

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\omega^2 z(x, t) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -k^2 z(x, t) \\ \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = k^4 z(x, t) \end{array} \right. \Rightarrow \omega^2 = k^2 c^2 - \frac{E\pi a^4 k^4}{4\mu} ; \quad (\text{La relation de dispersion})$$

N.B. Apparition de **dispersion** par rapport à la corde sans raideur (sans module d'YOUNG).

- Fréquences propres $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$: Avec les mêmes conditions aux limites que dans le cas sans module d'YOUNG (*sans raideur*) ;

$$k_n = \frac{n\pi}{\ell} \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{n^2 \pi^2 c^2}{\ell^2} \left[1 + \frac{n^2 \pi^2 E\pi a^4}{\ell^2 4\mu c^2} \right] \Rightarrow \omega_n = 2\pi f_n = \frac{n\pi c}{\ell} \left[1 + \frac{n^2 E\pi^3 a^4}{\ell^2 4T} \right]^{1/2}$$

D'où :

$$f_n = \frac{nc}{2\ell} [1 + n^2 B]^{1/2} \quad \text{avec} \quad B = \frac{E\pi^3 a^4}{4T\ell^2}$$

On constate que les fréquences propres de la corde à base de fils d'araignées ne sont plus multiples d'une fréquence fondamentale ($f_n \neq n f_1$): le son ne peut pas être harmonique⁽⁴⁾.

⁽⁴⁾Comme le cas des cordes de piano.

- Comparaison du fondamental (*pour les deux types de cordes*) à T et ℓ fixés :

$$\frac{f_{1,ar}}{f_{1,cl}} = \sqrt{\frac{1+B_{ar}}{1+B_{cl}}} \quad \text{avec} \quad \frac{B_{ar}}{B_{cl}} = \frac{E_{ar}a_{ar}^4}{E_{cl}a_{cl}^4} > 1 \quad \Rightarrow \quad f_{1,ar} > f_{1,cl} \quad ;$$

le son sera, alors,
plus aigu pour une corde
à base des fils d'araignés!



ÉPREUVE DE CHIMIE - MP

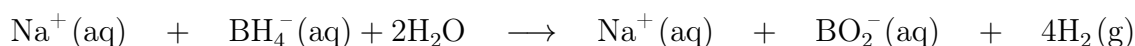
Chimie et énergie

I.— La filière hydrogène

Production de dihydrogène par hydrolyse catalytique du tétrahydruoborate de sodium

« L'hydrogène est un des vecteurs énergétiques de demain même si les complications liées à sa production et à son stockage limitent son développement. L'hydrolyse, catalysée du tétrahydruoborate de sodium (NaBH_4), est une alternative intéressante pour le stockage et la production embarqués d'hydrogène car, en présence d'eau et d'un catalyseur, cet hydruure chimique produit de façon contrôlée de l'hydrogène pur et du métaborate de sodium.⁽⁵⁾ »

En présence d'un catalyseur adapté, le tétrahydruoborate de sodium est décomposé par l'eau pour produire du dihydrogène selon l'équation suivante :



□—1. Donner la configuration électronique du bore dans son état fondamental. Identifier les électrons de valence et donner des quadruplets de nombres quantiques pouvant caractériser ces électrons.

□—2. Donner la représentation de LEWIS de l'ion tétrahydruoborate BH_4^- . En déduire sa géométrie. Justifier.

□—3. Déterminer le volume $V(\text{H}_2)$ de dihydrogène que l'on peut générer à partir de $V = 1,0$ L de solution aqueuse de concentration $C = 1,0 \text{ molL}^{-1}$ en ions sodium $\text{Na}^+(\text{aq})$ et en ions tétrahydruoborate $\text{BH}_4^-(\text{aq})$ (on se placera dans les conditions standard de température et de pression : $T = 25^\circ\text{C}$ et $P = 1 \text{ bar}$).

□—4. La réaction d'hydrolyse peut être catalysée par des catalyseurs à base de platine. Le volume de dihydrogène obtenu serait-il plus élevé si on réalise la réaction en présence de platine ? Justifier.

Stockage du dihydrogène

S'il n'est pas préparé « à la demande » comme avec l'hydrolyse du tétrahydruoborate de sodium, un des problèmes de l'utilisation du dihydrogène comme vecteur énergétique est son stockage. Des

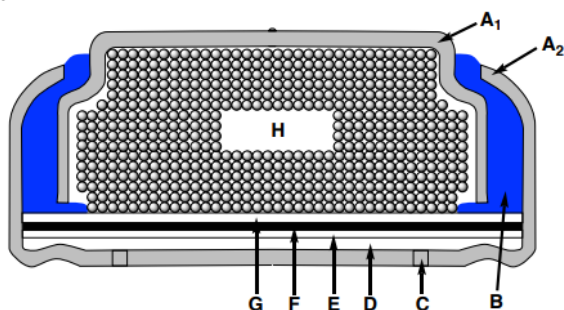
⁽⁵⁾U. B. Demirci, *Actualité Chimique* **2008**, 316, 22-27.

alliages à base de fer et de titane permettent le stockage du dihydrogène. Dans ces composés, l'hydrogène est stocké sous forme atomique (H) et non pas moléculaire (H₂). L'alliage utilisé ici a une structure cubique dans laquelle les atomes de fer occupent les sommets de la maille cubique et un atome de titane son centre. Les sites octaédriques de la structure sont de deux types : type A (situés au milieu de chaque arête) et type B (situés au centre de chaque face).

- 5. Représenter la maille cubique de l'alliage de fer/titane.
- 6. Calculer le paramètre de maille a associé à cette maille sachant que les atomes de fer et de titane sont en contact mais pas les atomes de fer entre eux.
- 7. Les sites octaédriques de type B sont-ils des octaèdres réguliers ? Justifier. Ces derniers seront-ils déformés après introduction d'un atome d'hydrogène ? Justifier.
- 8. Des atomes d'hydrogène occupent la totalité des sites octaédrique de type B. Indiquer le nombre d'atomes de fer, de titane et d'hydrogène par maille. Justifier. En déduire la formule de cet « alliage hydrogéné ».
- 9. Calculer le volume molaire V'_m du dihydrogène H₂ stocké dans ce composé en supposant qu'il en occupe tout le volume (on prendra pour valeur de a celle trouvée à la question □—6.). Comparer au volume molaire V_m d'un gaz parfait à $T = 25\text{ °C}$ et $P = 1\text{ bar}$. Conclure.

II.— Piles zinc-air

Les piles zinc-air sont des accumulateurs tirant leur énergie de l'oxydation du zinc avec le dioxygène de l'air ambiant (FIGURE 1). Ces piles possèdent de hautes densités énergétiques et sont peu chères. Leur format varie des piles boutons pour les audioprothèses à des formats intermédiaires, pouvant être utilisés dans des appareils tels les caméras, jusqu'aux grands formats utilisables dans les véhicules électriques.



A_1 et A_2 : revêtements métalliques, B : joint isolant, C : orifice d'entrée d'air, D : membrane semi-perméable, E : dioxygène (air), F : membrane hydrophobe, G : séparateur, H : poudre de zinc et électrolyte (solution gélifiée de potasse).

Caractéristiques :

Force électromotrice : $e \approx 1,6\text{ V}$.

Réaction de fonctionnement :

Masse de zinc dans la pile : 0,65 g.

Masse de la pile : 1,0 g.

Intensité de fonctionnement : 0,80 mA.

Tension de fonctionnement : 1,5 V.

Figure 1: Schéma et caractéristiques d'une pile bouton zinc-air.

- 10. Identifier l'anode et la cathode de cette pile et déterminer la polarité de la pile. Justifier.
- 11. Calculer la force électromotrice standard e° de cette pile à partir des valeurs des potentiels standards E° des couples redox.

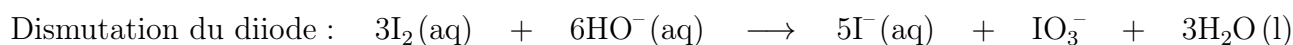
- 12. Calculer l'enthalpie libre standard $\Delta_r G^\circ$ de la réaction de fonctionnement de la pile à 298 K en utilisant les grandeurs thermodynamiques fournies (**Annexes**, page 42/105). En déduire la valeur de la constante K° de cette même réaction. Conclure.
- 13. Calculer la valeur de la force électromotrice standard à l'aide de la valeur de $\Delta_r G^\circ$.
- 14. Calculer la durée théorique pendant laquelle cette pile peut fonctionner sans être déchargée.
- 15. Calculer l'énergie que peut fournir cette pile.

III.— Énergie du sportif

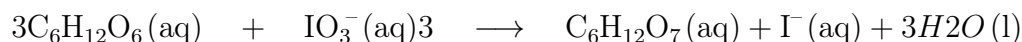
Le glucose, un sucre de formule brute $C_6H_{12}O_6$, est stocké chez les plantes sous forme d'amidon et chez les animaux sous forme de glycogène, qui peuvent être hydrolysés à tout moment pour redonner des molécules de glucose prêtes à être dégradées en fournissant de l'énergie dès que la cellule en a besoin. Nous allons nous intéresser au titrage du glucose dans un jus d'orange selon le protocole proposé dans le Document 1.

Document 1. Dosage du glucose présent dans du jus d'orange.

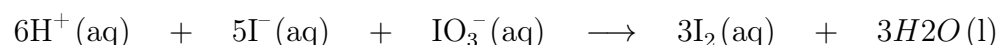
- Presser une demi-orange et filtrer sur Büchner sous pression réduite pour récupérer le jus.
- Diluer 5 fois le jus d'orange. Cette solution est nommée (S1).
- En se plaçant en milieu basique, oxyder le glucose présent dans $V_G = 20,0$ mL de la solution (S1) à l'aide de 20,0 mL de solution aqueuse de diiode de concentration $C = 5,00 \times 10^{-2} \text{ mol L}^{-1}$. Dans cette étape il se produit deux réactions :



Réaction du glucose avec les ions iodates :



- Revenir en milieu acide pour reformer du diiode par une réaction de médiamutation :



- Titrer le diiode présent par une solution de thiosulfate de sodium à $0,100 \text{ mol L}^{-1}$. On obtient un volume équivalent $V_q = 8,8$ mL.

- 16. Déterminer le nombre d'oxydation de l'iode dans les trois espèces qui ont pour formules I_2 , I^- et IO_3^- .
- 17. Attribuer à chaque domaine **A**, **B**, **C** du diagramme potentiel-pH ($E - pH$) de l'iode (Figure 2, $C_{\text{tracé}} = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol L}^{-1}$ en élément iode) aux 3 espèces données dans la question précédente. Justifier.

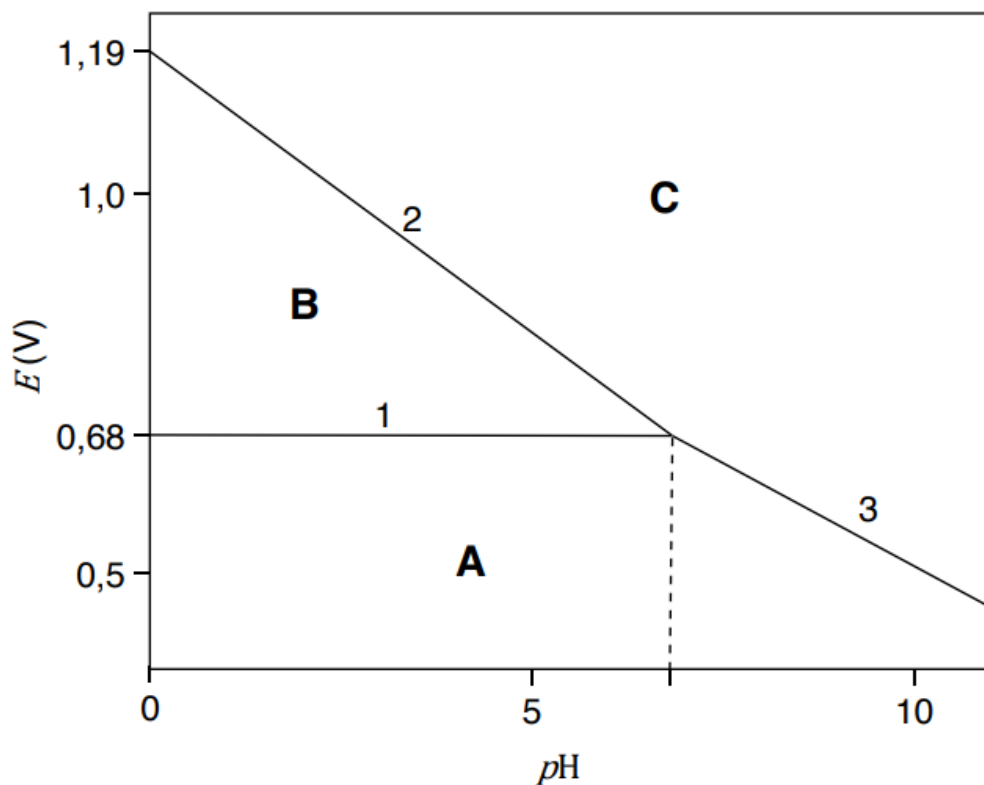


Figure 2: Diagramme potentiel-pH de quelques espèces de l'iode.

- 18. Déterminer le coefficient directeur de la droite 2 à l'aide de la formule de NERNST.
- 19. Écrire la réaction de titrage du diiode I_2 par les ions thiosulfate $S_2O_3^{2-}$. Comment repère-t-on l'équivalence du titrage ?
- 20. Calculer la concentration massique en glucose dans un jus d'orange.

Annexes

Annexe 1. Constantes usuelles et approximations de calcul.

Constante de Faraday : $\mathcal{F} \approx 10^5 \text{ Cmol}^{-1}$.

Constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_a \approx 6.10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Constante des gaz parfaits : $R \approx 8 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

Approximations : $\sqrt{3} \approx 1,8$ et $\sqrt{2} \approx 1,4$.

Annexe 2. Données numériques.

Volume molaire d'un gaz parfait à $T = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ et $P = 1 \text{ bar}$: $V_m = 24 \text{ Lmol}^{-1}$.

Numéro atomique : $Z(B) = 5$; $Z(Fe) = 26$ et $Z(Ti) = 22$.

Rayons métalliques : $R(Fe) = 125 \text{ pm}$ et $R(Ti) = 145 \text{ pm}$.

Rayon atomique de l'hydrogène : $R(H) = 35 \text{ pm}$.

Masses molaires : $M(Zn) = 65 \text{ gmol}^{-1}$; $M(glucose) = 180 \text{ gmol}^{-1}$

Annexe 3. Données thermodynamiques à 298 K (valeurs arrondies).

	Zn(s)	O ₂ (s)	ZnO(s)	H ₂ O(l)
$\Delta_f H^\circ \text{ (kJ.mol}^{-1}\text{)}$	0	0	-350	-300
$S^\circ \text{ (J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}\text{)}$	40	200	40	70

Potentiers redox standards à $pH = 0$: $E^\circ(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$; $E^\circ(\text{ZnO}/\text{Zn}) = -0,43 \text{ V}$;
 $E^\circ(\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}) = 0,08 \text{ V}$.



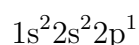
ÉPREUVE DE CHIMIE - MP

Chimie et énergie

I.— La filière hydrogène

Production de dihydrogène par hydrolyse catalytique du tétrahydruoborate de sodium

□—1. La configuration électronique du bore dans son état fondamental .



- Les électrons de valence sont au nombre de 3 ; Les deux électrons contenus dans l'orbitale $2s$ et l'électron dans l'orbitale $2p$.
- Les électrons $2s^2$ sont caractérisés par les deux quadruplets (n, ℓ, m_ℓ, m_s) :

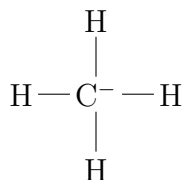
$$n = 2 \quad ; \quad \ell = 0 \quad m_\ell = 0 \quad ; \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$

- L'électron contenu dans l'orbitale $2p$ peut être caractérisé par l'un des six quadruplets (n, ℓ, m_ℓ, m_s) :

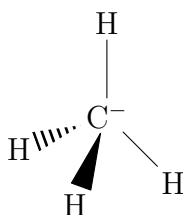
$$n = 2 \quad ; \quad \ell = 1 \quad \begin{cases} m_\ell = +1 \\ m_\ell = 0 \\ m_\ell = -1 \end{cases} \quad ; \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$

■ content...

□—2. L'anion B^- est isoélectronique que le carbone, la formule de Lewis de BH_4^- ressemble alors à la molécule de méthane CH_4 :



Dans la théorie VSEPR, la géométrie de la molécule est tétraédrique.



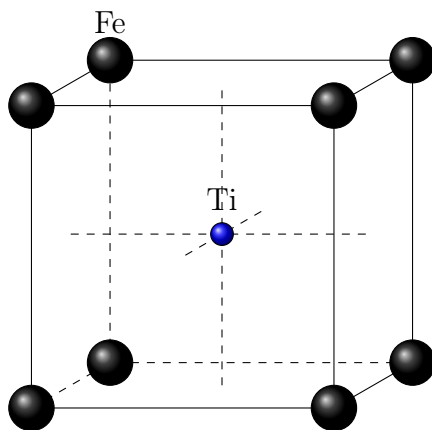
□—3. Un litre contient 1mole de Na^+ , donc 1 litre produit $n = 4$ moles de H_2 selon la réaction donnée.

Le volume de H_2 est donc : $V(\text{H}_2) = nV_m$, soit $V(\text{H}_2) = 96 \text{ L}$.

□—4. Un catalyseur augmente uniquement la vitesse de réaction. $V(\text{H}_2)$ ne change pas.

Stockage du dihydrogène

□—5. La maille cubique de l'alliage de fer/titane.



□—6. Le paramètre de maille a associé à cette maille sachant que les atomes de fer et de titane sont en contact selon la grande diagonale de la maille cubique :

$$2(r_{\text{Fe}} + r_{\text{Ti}}) = a\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad a = 2\frac{\sqrt{3}}{3}(r_{\text{Fe}} + r_{\text{Ti}}) = 300 \text{ pm}.$$

□—7. Le site de type B n'est pas régulier car il est formé par 4 atomes du fer et 2 atomes de titane. En effet :

- La distance entre le centre du site et Ti est $\frac{a}{2} = 150 \text{ pm}$,
- La distance entre le centre du site et Fe est $\frac{a\sqrt{2}}{2} > 150 \text{ pm}$,
- Or le rayon de H est inférieur à 150 pm , donc H ne déforme pas ce site.

□—8. Le nombre de site de type B est $6 \times 1/2 = 3$. Donc 3 atome H par maille.

- Les atome de fer forment un cubique simple donc le nombre de fer est $8 \times 1/8 = 1$. Donc 1 atome de Fe par maille.
- Le titane : 1atome au centre.
- D'où la formule de l'alliage hydrogéné : FeTiH_3

□—9. atome de H c'est à dire $3/2$ molécules de H_2 occupent le volume de la maille (a^3). Donc :

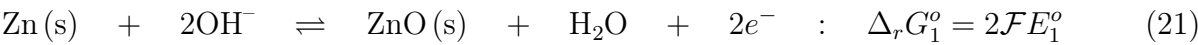
$$V'_m = \frac{2}{3}\mathcal{N}_a a^3 = 0,0108 \text{ L.mol}^{-1} \quad ; \quad \frac{V'_m}{V_m} \approx 2400$$

Conclusion : Pour ce stockage l'hydrogène occupe 2400 fois moins de volume.

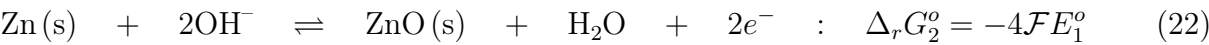
II.— Piles zinc-air

□–10. Les deux revêtements métalliques vont jouer le rôle des électrodes :

- Métal nickelé A_1 , c'est l'anode au contacte, il y aura :



- Métal nickelé A_2 c'est la cathode au contacte, il y aura :



- Réaction bilan = 2× réaction (21) + réaction (22) :



□–11. La force électromotrice standard e^o :

$$e^o = E^o(\text{ZnO/Zn}) - E^o(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,66 \text{ V.}$$

□–12.

$$\begin{aligned} \Delta_r H^o &= 2\Delta_f(\text{ZnO(s)}) = -700\text{kJ.mol}^{-1} \\ \Delta_r S^o &= 2S^o(\text{ZnO(s)}) - 2S^o(\text{Zn(s)}) - S^o(\text{O}_2(\text{g})) = -200\text{J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1} \\ \Delta_r G^o &= \Delta_r H^o - T\Delta_r S^o = -640\text{kJ.mol}^{-1} \\ K^o &= \exp\left(-\frac{\Delta_r G^o}{RT}\right) = 4,6 \times 10^{116} \end{aligned}$$

La réaction bilan (23) est très favorisée thermodynamiquement.

□–13. La force électromotrice standard à l'aide de la valeur de $\Delta_r G^o$:

$$\Delta_r G^o = -4\mathcal{F}E_1^o + 4\mathcal{F}E_1^o = -4\mathcal{F}e^o \Rightarrow e^o = -\frac{\Delta_r G^o}{4\mathcal{F}} = 1,60 \text{ V.}$$

□–14. La durée théorique Δt pendant laquelle cette pile peut fonctionner sans être déchargée :

$$\Delta t = \frac{q}{I} = \frac{n(e^-)\mathcal{F}}{I} = \frac{2m_{\text{Zn}}\mathcal{F}}{\mathcal{M}_{\text{Zn}}I} \Rightarrow \Delta t = 2,5 \times 10^6 \text{ s} \sim 30 \text{ jours.}$$

□–15. L'énergie $\mathcal{E}$ que peut fournir cette pile :

$$\mathcal{E} = E \times I \times \Delta t = qE = \frac{2m_{\text{Zn}}\mathcal{F}}{\mathcal{M}_{\text{Zn}}}E \Rightarrow \mathcal{E} = 3 \times 10^3 \text{ J.}$$

III.— Énergie du sportif

□–16. Le nombre d'oxydation de l'iode dans les trois espèces qui ont pour formules I_2 , I^- et IO_3^- :

Espèce chimique	I_2	I^-	IO_3^-
Nombre d'oxydation de l'élément iode I	0	-I	+V

□—17. Pour attribuer les espèces **C**, **B**, **A** à chaque domaine du diagramme, on doit les classer par ordre du *n.o* décroissant (*de l'oxydant fort au réducteur fort*).

Nombre d'oxydation de l'élément iode <i>I</i>	Espèces chimiques	Domaines
+V	IO ₃ ⁻	C
0	I ⁻	B
-I	I ₂	A

Les espèces dont l'élément chimique "d'étude" *X* (*élément iode dans ce cas*) présente le même nombre d'oxydation vont présenté une frontière *pH* (ce n'est pas le cas dans la présente situation). Elles formerons, alors, des couples acide/base.

□—18. Le coefficient directeur de la droite 2 définie par le couple *A/B*, soit IO₃⁻/I⁻ :



Le potentiel de NENST est donné par :

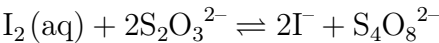
$$\begin{aligned} E(\text{IO}_3^-/\text{I}^-) &= E^\circ(\text{IO}_3^-/\text{I}^-) + \frac{0,06}{10} \log \frac{[\text{IO}_3^-]^2 \text{H}^{+12}}{\text{I}_2(\text{aq})} \\ &= E_2^\circ - 0,072 \text{ pH} + \frac{0,06}{10} \log \frac{[\text{IO}_3^-]^2}{\text{I}_2(\text{aq})} \end{aligned}$$

Le coefficient directeur est, alors, égale à -0,072 V/unité depH.

Si on cherche à déterminer l'équation de la frontière, on doit utiliser la concentration du tracé telle qu'à la frontière : [IO₃⁻] = [I₂(aq)] avec ;

$$C_{\text{tracé}} = [\text{IO}_3^-] + 2[\text{I}_2(\text{aq})] \quad \Rightarrow \quad [\text{IO}_3^-] = [\text{I}_2(\text{aq})] = \frac{C_{\text{tracé}}}{3} = \frac{1}{3} \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}.$$

□—19. La réaction de titrage du diiode I₂ par les ions thiosulfate S₂O₃²⁻ :



L'équivalence du point d'équivalence du titrage est repéré par l'empois d'amidon : la solution est bleuâtre par la présence de diiode et devient incolore lorsqu'il se transforme en I⁻.

□—20. La concentration massique en glucose dans un jus d'orange. Le dosage utilisé est un dosage indirecte dont le principe est le suivant :

Etape .1 : Transformation du diiode en ion iodate (base) par dismutation (I₂ est instable en milieu basique),

Etape .2 : Une partie de I₂ réagit complètement avec le glucose,

I₂ doit être en excès, ce qui donnera un excès d'iodates par rapport au glucose.

Etape .3 : Transformation de la partie qui reste de IO₃⁻ en diiode (stable en milieu acide),

Etape .4 : Dosage du diiode par le thiosulfate.

Bilan :

$$\begin{aligned}n_{tot}(\text{I}_2) &= n_{glucose} + \frac{1}{2}n_{\text{S}_2\text{O}_3^{2-}} \\n_{glucose} &= n_{tot}(\text{I}_2) - \frac{1}{2}n_{\text{S}_2\text{O}_3^{2-}} \\n_{glucose} &= 5.10^{-2}.20.10^{-3} - 0,50,18,8.10^{-3} \\n_{glucose} &= 0,56.10^{-3} \text{ mol.}\end{aligned}$$

La concentration molaire du glucose est :

$$C_{glucose} = \frac{5.0,56.10^{-3}}{20.10^{-3}} = 0,14 \text{ mol.L}^{-1}.$$

La concentration massique du glucose est :

$$c = C_{glucose} \times C_{glucose} = 25,2 \text{ g.L}^{-1}.$$

ÉPREUVE DE PHYSIQUE 2 - PSI

Étude physique d'un capteur de position

Le contrôle d'un système ou d'un processus physique présent dans un grand nombre de dispositifs technologiques nécessite de connaître à chaque instant, le plus précisément possible, un certain nombre de grandeurs physiques intervenant dans ce contrôle.

Ces grandeurs sont donc mesurées par des capteurs qui convertissent la grandeur physique mesurée en une grandeur électrique utilisée afin de réguler le processus.

La réalisation de capteurs doit prendre en compte divers éléments tels que la précision, la miniaturisation, le poids, le traitement numérique des données, etc.

Ce problème étudie dans un premier temps le principe physique selon lequel le capteur inductif linéaire « LVDT » (Linear Variable Differential Transformer) convertit un déplacement de position en une grandeur électrique (parties I.— et II.—). Dans un deuxième temps, il étudie le conditionnement de cette grandeur électrique en une tension proportionnelle au déplacement (partie III.—). Dans un dernier temps, il développe une application utilisant ce capteur (partie IV.—).

Pour les applications numériques, on ne conservera au plus que 2 chiffres significatifs.

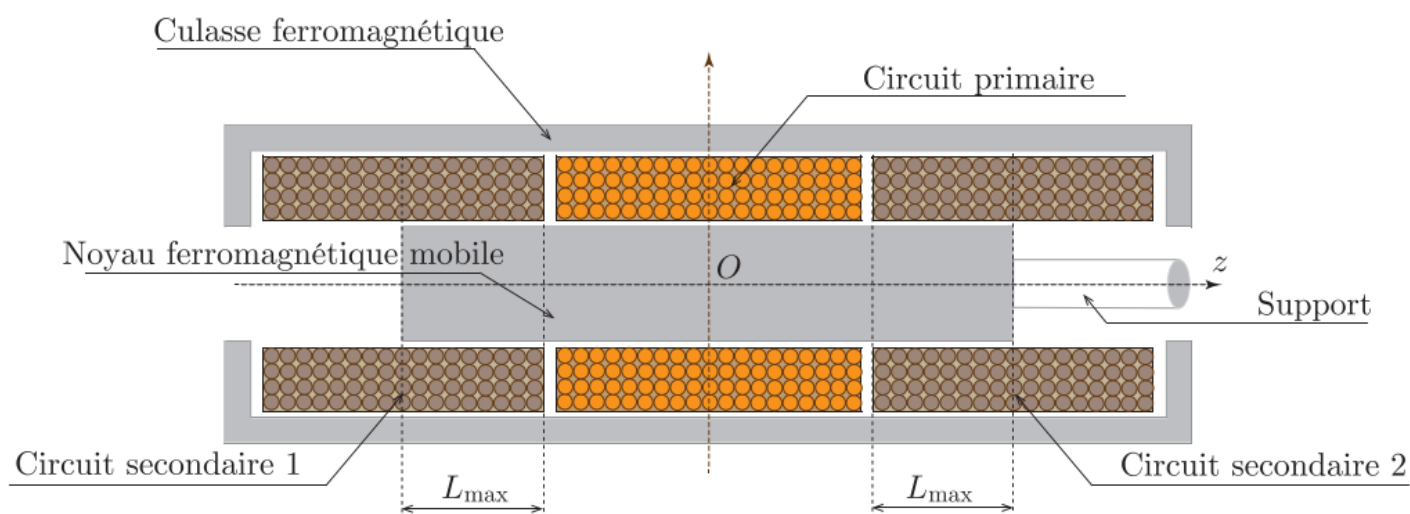


Figure 1: Schéma descriptif du LVDT.

Le LVDT est un transformateur différentiel comportant trois circuits, un circuit primaire et deux circuits secondaires. Les bornes homologues de ces circuits, mentionnées sur la figure 2 à l'aide d'un point, sont telles que les courants algébriques entrants par ces bornes génèrent un flux magnétique algébrique orienté selon $\vec{u}_z$.

Les deux circuits secondaires sont identiques, constitués de fils de cuivre bobinés autour du noyau et portent n spires par unité de longueur.

Le circuit magnétique du transformateur est formé d'une culasse cylindrique externe ferromagnétique

et d'un noyau cylindrique ferromagnétique de section S , de rayon a , relié à un support non magnétique qui permet de le translater selon l'axe Oz . Le déplacement de ce noyau cylindre par rapport à la position de référence représentée en figure 1 est limité à $\pm L_{\max}$.

L'ensemble présente une symétrie de révolution autour de l'axe Oz et on repérera l'espace par le système de coordonnées cylindriques $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

Le but de ce dispositif est de fournir une grandeur électrique permettant de caractériser le déplacement du cylindre.

Dans toute la suite, on supposera que le matériau magnétique constituant le noyau cylindrique et la culasse est parfait, de perméabilité magnétique μ_r infinie et de conductivité électrique nulle. Les matériaux non magnétiques (air, support, cuivre) ont une perméabilité magnétique relative égale à 1.

La figure 2 représente le système pour un déplacement algébrique z du centre C du cylindre tel $\vec{OC} = z \vec{u}_z$. Sur l'exemple de la figure 2, $z > 0$ et, de façon générale, z vérifie $|z| < L_{\max}$.

Le circuit primaire est alimenté par la tension $u_p(t)$ et parcouru par le courant d'intensité $i_p(t)$.

Les deux circuits secondaires sont connectés en série et la tension utile vaut $u_s = u_2 - u_1$ (voir figure 2).

La tension d'excitation u_p est sinusoïdale de fréquence f variant de 20 Hz à 20 kHz. La position du noyau magnétique affecte la répartition du champ magnétique et modifie les inductances mutuelles entre les circuits secondaires et le circuit primaire. On notera :

- L_p , l'inductance propre du circuit primaire,
- M_1 , l'inductance mutuelle entre le circuit secondaire 1 et le circuit primaire,
- M_2 , l'inductance mutuelle entre le circuit secondaire 2 et le circuit primaire.

Le courant dans les deux circuits secondaires est supposé nul.

On désignera par état de référence, la configuration du dispositif où le circuit primaire est alimenté par la tension $u_p = U_p \sin(\omega t)$ et où la position du noyau ferromagnétique est telle que $z = 0$.

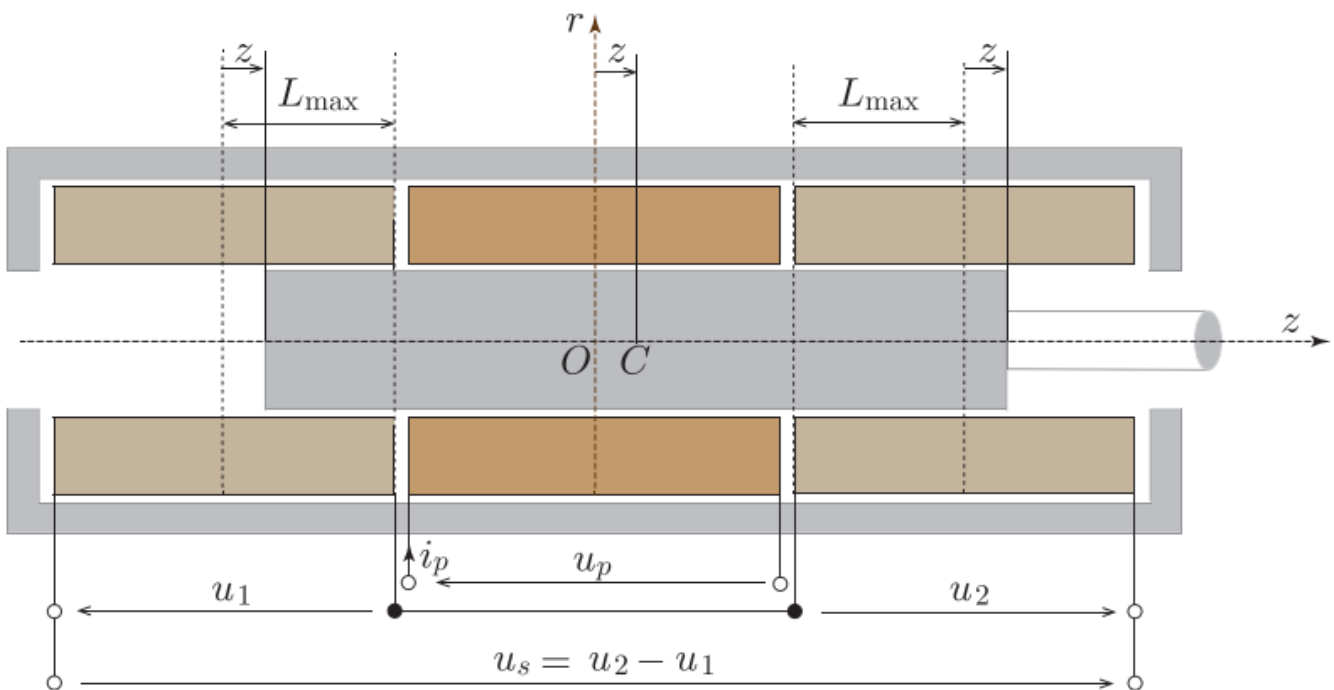


Figure 2: Définition des paramètres.

I.— Étude de l'état de référence

Dans tout le problème, on supposera la fréquence f suffisamment faible pour que l'étude s'inscrive dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-permanents (ARQP).

□—1. Énoncer dans le cadre de ce régime l'équation MAXWELL-AMPÈRE reliant le vecteur excitation magnétique $\vec{H}$ et $\vec{j}$, on précisera la nature de $\vec{j}$. En déduire la forme générale de l'énoncé du théorème d'Ampère.

□—2. Énoncer l'équation de MAXWELL-THOMSON (également appelée MAXWELL-Flux) et en déduire la propriété correspondante du flux du champ magnétique.

□—3. Quelle est la direction du champ magnétique en tout point du plan passant par O et orthogonal à $\vec{u}_z$?

□—4. En un point M de coordonnées (r, θ, z) quelconques, que peut-on dire des coordonnées (B_r, B_θ, B_z) du champ magnétique compte tenu des symétries du problème ?

La résolution numérique des équations locales permet de représenter, en figure 3, quelques lignes du champ magnétique dans un plan de coupe contenant l'axe Oz , pour un courant $i_p > 0$.

□—5. Le résultat de la simulation numérique est-il compatible avec ceux des questions 3 et 4 ? On justifiera précisément la réponse.

La figure 4 fournit, en échelles arbitraires (E.A. sur la figure) et indépendantes, les variations des composantes $B_z = \vec{B} \cdot \vec{u}_z$ et de $B_r = \vec{B} \cdot \vec{u}_r$ en fonction de z à la distance r de l'axe tel que $0 < r < a$.

□—6. Justifier les propriétés de parité de ces deux composantes du champ.

□—7. Représenter sommairement l'allure d'une ligne de champ. Après avoir orienté cette ligne, justifier le signe des composantes du champ magnétique observé en figure 4.

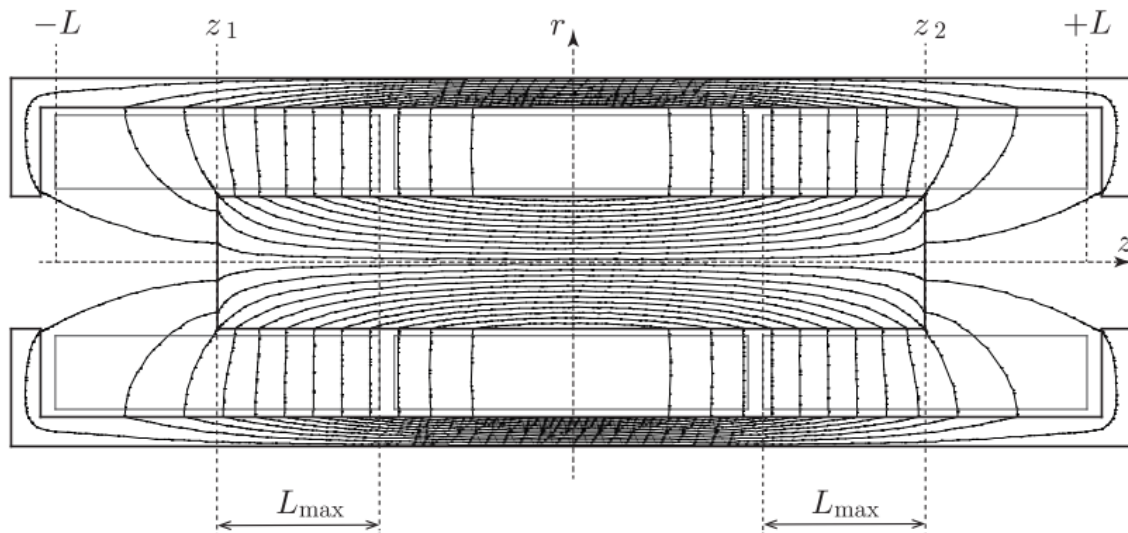


Figure 3: Lignes de champ pour un noyau centré obtenues par simulation numérique.

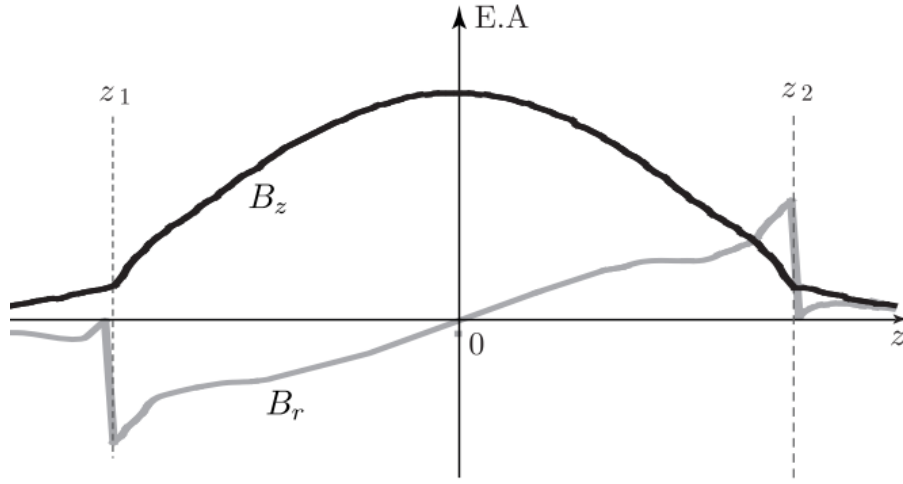


Figure 4: Composante B_r (en gris) et B_z (en noir) en r tel que $0 < r < a$.

On remarque que $|B_r|$ devient très faible sur une très courte distance juste après z_2 et juste avant z_1 .

□—8. Justifier cette observation par un calcul littéral. Peut-on, sur la figure 3, observer ce phénomène à d'autres endroits ?

Afin de déterminer l'expression des inductances mutuelles, on souhaite modéliser simplement le champ magnétique. Pour cela, grâce à la simulation numérique, sur la figure 5, on a représenté en trait plein la courbe des variations de $B_z/B_{z,\max}$ évaluée en $r = 0$ en fonction de z .

□—9. Quels éléments observés en figures 3 et 5 permettent de justifier que l'on puisse considérer le champ magnétique comme uniforme au voisinage du centre du noyau.

□—10. Quels éléments observés en figure 3 permettent d'expliquer la diminution de la composante $\vec{B} \cdot \vec{u}_z$ du champ observée en figure 5 lorsqu'on se rapproche des bords du noyau ?

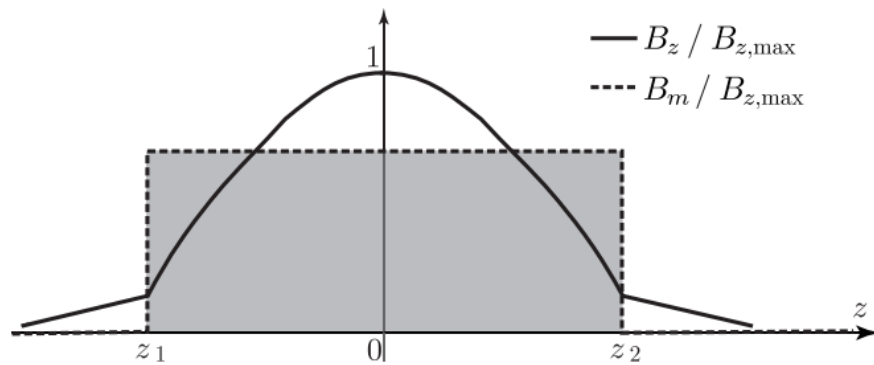


Figure 5: Composante B_z sur l'axe Oz .

Dans un premier modèle, on assimile le champ magnétique axial au profil représenté en traits pointillés en figure 5. En effet, on supposera que :

- $[H_1]$: si $z_1 < z < z_2$ et $r < a$, alors la composante $\vec{B} \cdot \vec{u}_z$ du champ magnétique est uniformément égale à B_m , sa valeur moyenne sur l'axe Oz dans le noyau. On posera $B_m = Ki_p$, où K est une constante caractéristique du système ;
- $[H_2]$: si $z < z_1$ ou $z > z_2$ alors pour tout $r < a$ on a $\vec{B} \cdot \vec{u}_z = 0$;
- $[H_3]$: en tout point compris entre le noyau et la culasse, tels que $-L < z < L$ $\vec{B} \cdot \vec{u}_z = 0$.

□—11. Dans le cadre de ces hypothèses simplificatrices, montrer que les deux inductances mutuelles M_1 et M_2 sont identiquement égales à une même valeur notée M_0 . Exprimer M_0 en fonction de S , K , n et $L_{\max}$.

□—12. Application numérique : On donne la résistance du circuit primaire $R_p = 100 \, \Omega$ et l'inductance du circuit primaire $L_p = 6 \, \text{mH}$. Pour $U_p = 10 \, \text{V}$, on mesure aux bornes de chacun des deux circuits secondaires non connectés entre eux une tension d'amplitude $1,5 \, \text{V}$ pour une fréquence de $5 \, \text{kHz}$. Calculer la valeur de M_0 . On prendra $10\pi \sim 30$ et $\sqrt{42 \cdot 10^3} \sim 205$.

II.— Déplacement du noyau

On étudie désormais le LVDT dans l'état représenté en figure 2 où le centre C du cylindre est déplacé de z par rapport à l'état de référence, soit $\vec{OC} = z \vec{u}_z$.

Le circuit primaire est toujours alimenté par la tension $u_p = U_p \sin(\omega t)$ et parcouru par le courant d'intensité i_p . Le courant circulant dans les circuits secondaires connectés en série est nul.

La figure 6 représente le tracé des lignes de champ magnétique dans un plan de coupe contenant l'axe Oz , obtenu par résolution numérique des équations locales dans les mêmes conditions que celui de la figure 3, pour un courant $i_p > 0$. Le seul changement réside dans la position du noyau.

La cartographie des lignes de champ dans le noyau étant très semblable à celle de la figure 3, on conserve les hypothèses $[H_1]$, $[H_2]$ et $[H_3]$ correspondantes.

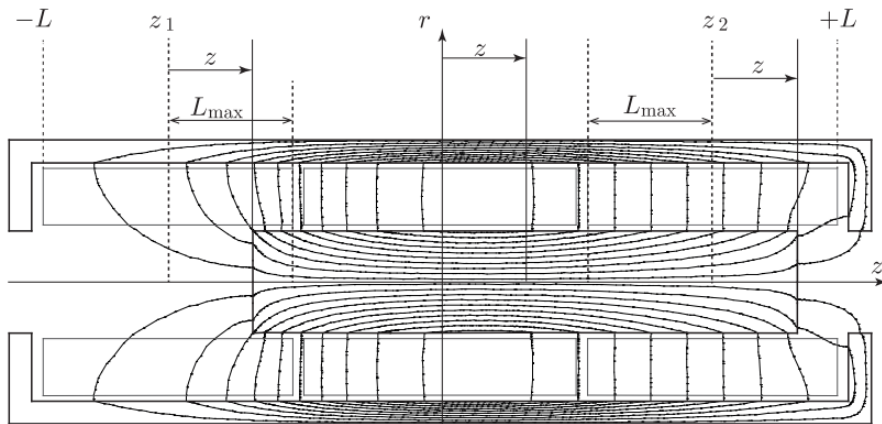


Figure 6: Lignes de champ pour un noyau décentré.

□—13. Dans le cadre de ce modèle, montrer que si $|z| < L_{\max}$ alors L_p est indépendante de z .

□—14. Déterminer l'inductance mutuelle $M_1(z)$ en fonction de M_0 , z et $L_{\max}$.

□—15. De même, déterminer l'inductance mutuelle $M_2(z)$ en fonction de M_0 , z et $L_{\max}$.

□—16. Dédurre des résultats précédents que la tension différentielle à vide du circuit secondaire s'écrit sous la forme $u_s = u_2 - u_1 = \lambda M_0 \frac{z}{L_{\max}} \frac{di_p}{dt}$, dans laquelle on précisera la valeur de la constante λ .

□—17. Pour un courant i_p sinusoïdal fixé, quel est le paramètre de la tension u_s , noté A , permettant de mesurer z ? Tracer l'allure des variations de A en fonction de z ? Comment peut-on discerner le cas $z > 0$ et $z < 0$? Connaissez-vous un procédé permettant de générer une tension proportionnelle à ce paramètre?

III.— Conditionnement du signal

Un capteur LVDT est associé à un conditionneur de signal qui délivre une tension continue proportionnelle à la position du noyau. Cette partie étudie le fonctionnement du conditionneur *AD598* dont le schéma fonctionnel fourni par la notice est représenté en figure 7.

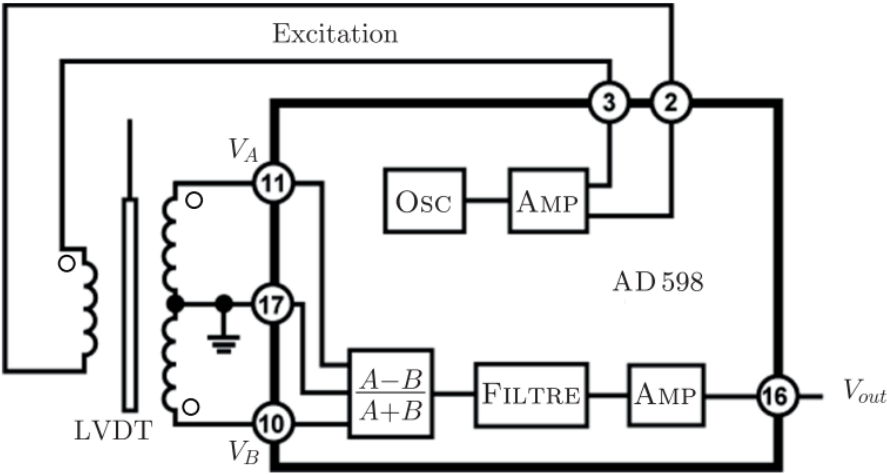


Figure 7: Diagramme bloc fonctionnel du conditionneur *AD598*.

L'*AD598* comporte un oscillateur local, noté OSC en figure 7, générant une tension sinusoïdale dont la fréquence peut varier de 20 Hz à 20 kHz, suivi d'un amplificateur de tension qui délivre la tension u_p appliquée aux bornes du circuit primaire du LVDT.

L'oscillateur local produit dans un premier temps une tension périodique fonction triangulaire du temps qui est ensuite transformée en une tension sinusoïdale du temps grâce à un montage convertisseur à diodes.

À partir des deux tensions référencées par rapport au point de masse prises aux bornes des deux circuits secondaires du LVDT, $V_A = u_2$ et $V_B = u_1$, le circuit intégré *AD598* construit une tension périodique en créneaux symétriques, de rapport cyclique α égal au rapport $\frac{A - B}{A + B}$, où A et B sont respectivement les tensions proportionnelles aux amplitudes des tensions V_A et V_B .

L'intérêt du conditionnement proposé par le composant *AD598*, par rapport aux procédés de détection envisageables, est de produire une tension de sortie proportionnelle au déplacement du noyau. La constante de cette proportionnalité est indépendante de la tension d'alimentation du circuit primaire de LVDT.

L'étude se focalise sur l'alimentation du circuit primaire.

Le bloc OSC de la figure 7 est constitué d'un générateur de tension en triangle suivi d'un convertisseur triangle-sinus à diodes. Le circuit générateur de tension en triangle est représenté en figure 8.

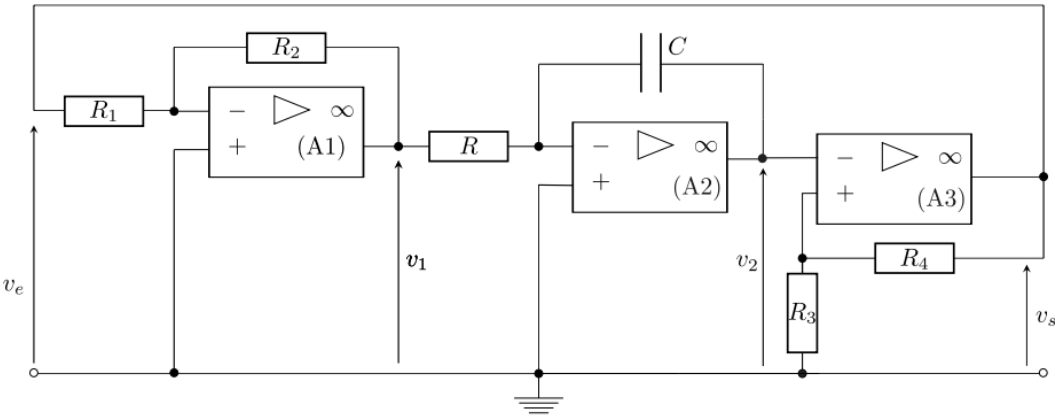


Figure 8: Schéma descriptif du LVDT.

Les trois Amplificateurs Linéaires Intégrés (ALI) sont idéaux et nommés (A1), (A2) et (A3) (voir figure 8). On notera $+V_{sat}$ et $-V_{sat}$ les tensions de saturation haute et basse des ALI.

□—18. Après avoir rappelé la définition d'un ALI idéal, indiquer quels sont ceux qui fonctionnent en régime linéaire. On justifiera simplement la réponse.

Les tensions $v_e(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $v_s(t)$ sont des fonctions non sinusoïdales du temps.

□—19. Établir la relation entre $v_e(t)$ et $v_1(t)$ puis celle entre $v_1(t)$ et $v_2(t)$.

□—20. Déterminer la valeur de v_s selon les valeurs et le sens de variation de v_2 , puis représenter graphiquement ces variations en reportant v_s en ordonnée et v_2 en abscisse. On fera apparaître les valeurs remarquables sur chaque axe du graphique.

□—21. En tenant compte des trois résultats précédents, déterminer les variations de v_2 et v_s en fonction du temps. Représenter ces variations sur un même graphique.

Laquelle des tensions $v_e(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $v_s(t)$ est une fonction triangulaire périodique du temps ? On nomme $v_t(t)$ cette tension. Calculer sa période T en fonction de R , C , R_1 , R_2 , R_3 et R_4 .

□—22. En fixant $R = 1\text{k}\Omega$ et en prenant $R_1 = R_2$ puis, uniquement pour cette application numérique $R_3 = R_4$, déterminer la valeur de C permettant d'obtenir une tension $v_t(t)$ de fréquence 2 kHz.

Comment faire pour permettre à un utilisateur de l'AD598 de modifier à volonté cette fréquence ? Exprimer l'amplitude E de la tension $v_t(t)$ en fonction des données du circuit de la figure 8. Sur quels paramètres de ce circuit faut-il agir afin de modifier cette amplitude ?

Déterminer la condition sur ces paramètres pour que $E/V_{sat} = 0,22$. Calculer dans ce cas la valeur de E en prenant $V_{sat} = 15\text{ V}$.

L'origine des temps étant arbitrairement fixée, la figure 9 contient, d'une part, les variations de la tension triangulaire réduite v_t/E en fonction du temps réduit $\theta = t/T$ et, d'autre part, celles de la tension sinusoïdale réduite v_0/E en fonction de θ que l'on souhaite obtenir après la conversion triangle-sinus.

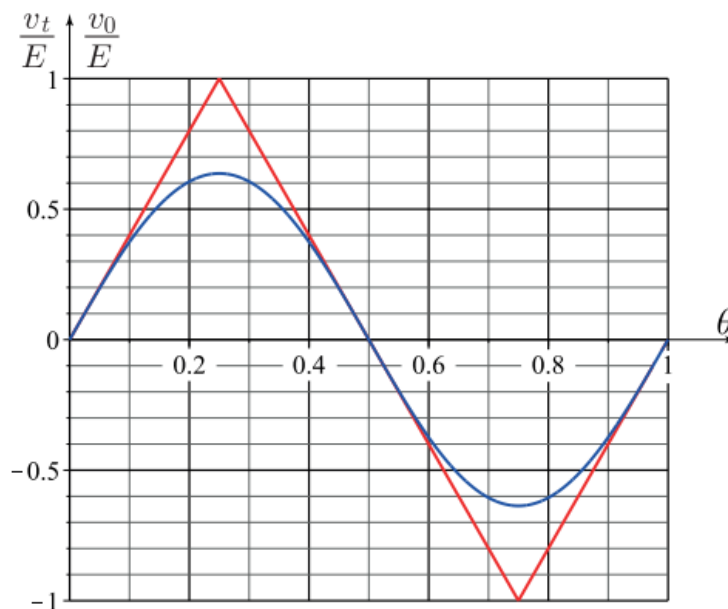


Figure 9: Conversion triangle - sinus.

Afin de réaliser cette conversion, on utilise un montage conformeur à diodes représenté en figure

10. Les diodes sont toutes identiques. En notant i_d leur courant direct et u_d la tension en convention récepteur (figure 10), le fonctionnement de chaque diode est tel que si $i_d > 0$ alors $u_d = U_s > 0$ et si $i_d = 0$ alors $u_d \leq U_s$.

Pour toute la suite, on prendra une tension de seuil égale à $U_s = 0,7 \text{ V}$. Le montage conformeur, alimenté par la tension v_t , est dimensionné pour délivrer une tension v_s se rapprochant au mieux de la tension v_0 représentée en figure 9. Le dimensionnement consiste, entre autres, à choisir correctement les résistances r_1 et r_2 , lorsque $r_0 = 1,0 \text{ k}\Omega$. Ce choix sera effectué pour une valeur du courant de sortie $i_s = 0$.

□—23. Pour $0 \leq \theta = \frac{t}{T} \leq \frac{1}{4}$, donner l'expression de v_t en fonction de θ et de E .

On considère l'association des deux diodes dans la cellule en traits pointillés (1).

□—24. Montrer que les deux diodes ne peuvent conduire le courant simultanément.

Montrer qu'il existe une valeur $U_1 > 0$ telle que si $0 \leq v_s \leq U_1$ alors le courant dans la résistance r_1 est nul et, si $v_s > U_1$, ce courant n'est pas nul. Exprimer U_1 en fonction de U_s .

On considère l'association des quatre diodes dans la cellule en traits pointillés (2).

□—25. Montrer qu'il existe une valeur $U_2 > 0$ telle que si $0 \leq v_s \leq U_2$ alors le courant dans la résistance r_2 est nul et si $v_s > U_2$ ce courant n'est pas nul. Exprimer U_2 en fonction de U_s .

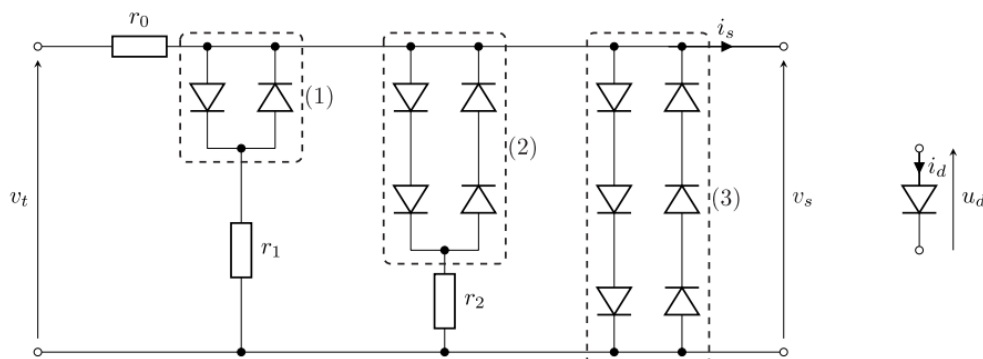


Figure 10: Montage conformeur.

On considère finalement le bloc de la cellule en traits pointillés (3).

□—26. Montrer que la valeur positive maximale de v_s , notée V_{max} , vaut $3U_s$.

On note désormais $s(\theta) = V_{max} \sin(2\pi\theta)$ la tension sinusoïdale idéale que l'on souhaite obtenir en sortie du montage de la figure 10, de même période que v_t .

□—27. Déterminer la relation à imposer entre U_s et E afin que les deux pentes en $\theta = 0$ des courbes $v_t(\theta)$ et $s(\theta)$ en fonction de θ soient identiques. On vérifiera que cette condition revient à identifier le rapport E/U_s à une fraction de π et on supposera cette relation vérifiée par la suite.

□—28. Pour $v_s < U_1$, quelle est l'expression de v_s en fonction de v_t puis celle en fonction de θ ?

En déduire la valeur θ_1 de θ telle que $v_s(\theta_1) = U_1$. On simplifiera cette valeur en utilisant la condition déduite à la question précédente.

□—29. On suppose pour cette question $U_1 < v_s < U_2$.

Exprimer v_s en fonction de v_t , U_s , r_1 et r_0 puis en fonction de U_s , r_1 , r_0 , E et θ

. Quelle doit être la valeur du rapport $\rho_1 = \frac{r_0}{r_1}$ afin que les pentes des courbes $v_s(\theta)$ et $s(\theta)$ soient identiques lorsque $\theta \rightarrow \theta_1$ par valeurs supérieures ? On exprimera α uniquement en fonction du cosinus de $1/3$.

Cette condition étant vérifiée, exprimer v_s en fonction de U_s , ρ_1 , E et θ puis déduire l'expression de θ_2 défini par $v_s(\theta_2) = U_2$ que l'on mettra sous la forme $\theta_2 = \alpha\theta_1$ dans laquelle on exprimera la constante α uniquement en fonction du cosinus de $1/3$.

□—30. On suppose pour cette question $U_2 < v_s < 3U_1$. Déterminer l'expression de v_s en fonction de U_s , r_0 , r_1 , r_2 , E et θ .

La valeur du rapport $\rho_2 = \frac{r_0}{r_2}$ est fixée afin que les pentes des courbes $v_s(\theta)$ et $s(\theta)$ soient identiques lorsque $\theta \rightarrow \theta_2$ par valeurs supérieures. On peut alors déterminer la valeur θ_2 telle que $v_s(\theta) = 3U_1$.

□—31. Montrer que $v_s(\theta) = 3U_1$ si $\theta_3 < \theta < \frac{1}{4}$.

En réalisant le dimensionnement précédent, on obtient la tension $v_s(\theta)$ représentée en figure ?? sur laquelle figurent également les tensions $v_t(\theta)$ et $s(\theta)$.

□—32. Proposer un aménagement du montage de la figure 10 permettant de réduire les écarts entre $v_s(\theta)$ et $s(\theta)$.

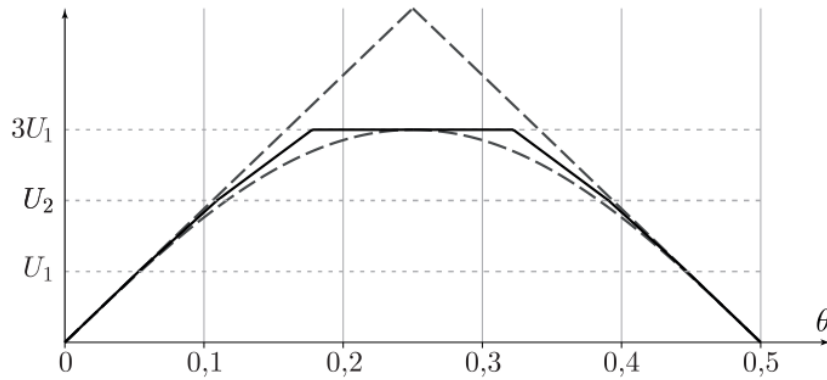


Figure 11: Tensions $v_s(\theta)$, $v_t(\theta)$ et $s(\theta)$.

IV.— Exemple d'utilisation de ce capteur : un accéléromètre asservi

Le schéma de la figure 12 décrit le principe de fonctionnement d'un accéléromètre. La masse sismique m , de centre d'inertie G peut se translater sans frottement le long de l'axe $O_1O'_1$ relié au boîtier de l'accéléromètre. Cette masse est par ailleurs fixée d'une part à l'extrémité libre d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_o et d'autre part à un amortisseur exerçant une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse de la masse avec le coefficient constant λ . Les autres extrémités du ressort et de l'amortisseur sont fixées au boîtier.

On étudie le mouvement de la masse sismique et du boîtier dans le référentiel terrestre supposé galiléen d'origine fixe O . On se limite à l'étude d'un déplacement rectiligne selon la direction donnée par le vecteur unitaire $\vec{u}_z$ orthogonale à celle de l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$.

On note O_1 le point du boîtier tel que $\vec{OO}_1 = Z_1\vec{u}_z$. En posant $\vec{O}_1\vec{G} = Z\vec{u}_z$, le point G est repéré par le vecteur $\vec{OG} = \vec{OO}_1 + \vec{O}_1\vec{G} = (Z + Z_1)\vec{u}_z$.

IV.A.— Première étude : le boîtier est immobile

Dans cette première étude O_1 est fixe, Z_1 est donc constant.

La masse sismique est reliée à la partie mobile du LVDT conditionné selon le protocole décrit dans les parties précédentes. On suppose que la translation du noyau mobile du LVDT s'effectue sans frottement.

□—33. Justifier le fait que la force électromagnétique reçue par le noyau mobile lors de son déplacement est nulle.

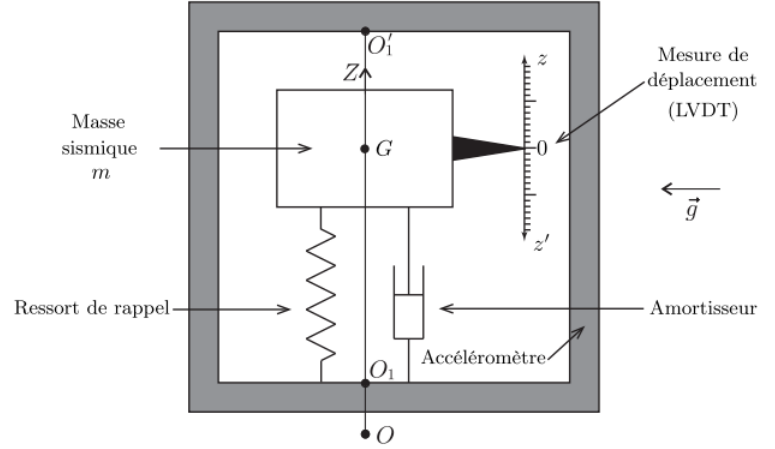


Figure 12: Accéléromètre asservi à masse sismique.

Dans toute la suite, on suppose que la masse sismique de centre d'inertie G inclut le noyau mobile du LVDT.

□—34. Lorsque le point G est en mouvement, établir l'équation différentielle vérifiée par $Z(t)$.

□—35. Déterminer la valeur Z_0 de Z à l'équilibre. Comme dans la première partie, on note z la position du centre C du noyau mobile (voir figure 2). La position du capteur LVDT est ajustée de telle manière que $z = 0$ lorsque le boîtier est immobile et la masse m à l'équilibre. Quelle est la relation entre z et Z ?

□—36. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la masse m est lâchée sans vitesse initiale d'une position $Z_i \neq Z_0$. Quelle est la valeur minimale λ_{min} qu'il faut imposer à λ afin que la masse retrouve sa position d'équilibre sans oscillation ? On supposera dans la suite que $\lambda > \lambda_{min}$.

IV.B.— Étude simplifiée du boîtier mobile

Désormais le boîtier de l'accéléromètre se déplace selon l'axe $(O, \vec{u}_z)$. On pose $v_1 = \frac{dZ_1}{dt}$ et $\gamma_1 = \frac{d^2 Z_1}{dt^2}$.

□—37. Dans le référentiel terrestre, exprimer la vitesse de G en fonction de v_1 et de $\frac{dZ}{dt}$, puis son accélération en fonction de γ_1 et de $\frac{d^2 Z}{dt^2}$. En déduire la nouvelle équation différentielle vérifiée par $Z(t)$ ainsi que les nouvelles positions d'équilibre Z'_0 de G et z'_0 du capteur. Quelle information apporterait la lecture de z'_0 au bout d'un temps infini sur l'échelle graduée de la figure 12 ?

Afin d'obtenir une mesure électrique du déplacement z de C , on utilise la tension $V_{out} = K_{s0}z$ fournie par le capteur pour commander un dispositif moteur, non étudié ici, qui applique une force $\vec{F} = \beta V_{out} \vec{u}_z$ sur la masse sismique.

□—38. Établir les équations différentielles vérifiées par $Z(t)$ et $z(t)$. Déterminer l'expression de la valeur z_{eq} de z à l'équilibre et la valeur de V_{out} correspondante. Quelle information apporterait la mesure de V_{out} au bout d'un temps infini ?

Le mouvement de C se décompose en un régime transitoire suivi d'un régime permanent. Quelle est la condition que doit remplir λ pour que la durée du régime transitoire soit la plus petite possible ? Estimer le temps de réponse de l'accéléromètre construit dans ces conditions.



ÉPREUVE DE PHYSIQUE 2 - PSI

Étude physique d'un capteur de position

I.— Étude de l'état de référence

□—1. Dans le cadre l'ARQS, l'équation de MAXWELL-AMPÈRE s'écrit : $\boxed{\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j}}$ où $\vec{j}$ est le vecteur densité volumique de courants libres.

La forme générale du théorème d'AMPÈRE se déduit donc facilement : $\oint_{(\Gamma_A)} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i^{\text{enlacé}}$, Γ_A est le contour fermé d'Ampère.

□—2. L'équation de MAXWELL-THOMSON est : $\boxed{\text{div } \vec{B} = 0}$, le flux du champ magnétique est conservatif.

□—3. Le plan $\Pi_s(O; \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ passant par O et orthogonal à $\vec{u}_z$ est un plan de symétrie pour la distribution, soit $M \in \Pi_s$ ainsi le champ magnétique en ce point est perpendiculaire à ce plan $\Rightarrow \vec{B}$ est porté par $\vec{u}_z$, c'est-à-dire $\boxed{\vec{B} = B\vec{u}_z}$.

□—4. Considérons le plan $\Pi_a(M; \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ passant par le point $M(r, \theta, z)$, il s'agit d'un plan d'antisymétrie pour la distribution, $\vec{B}$ appartient à ce plan $\boxed{\vec{B} \in \Pi_a}$ la composante orthoradiale du champ magnétique est donc nulle $\boxed{B_\theta = 0}$.

□—5. Le résultat de la simulation numérique est compatible avec ceux des questions □—3. et □—4. en effet :

- ★ La simulation numérique nous montre que pour tout point du plan $(O; \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ le champ est porté par $\vec{u}_z$
- ★ La composante orthoradiale du champ magnétique est nulle.

□—6. Le plan $\Pi_a(O; \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ passant par le point O (voir figure (1)) est un plan d'antisymétrie pour la distribution.

Soit $M(r, z)$ un point et $M'(r, -z)$ son symétrie par rapport à ce plan donc $\boxed{\vec{B}(M') = -\text{sym}_{\Pi_a}(\vec{B}(M))}$

ce qui donne $\boxed{B_r(r, -z) = -B_r(r, z)}$ et $\boxed{B_z(r, -z) = B_z(r, z)}$: la composante orthoradiale est impaire alors que la composante axiale est paire.

□—7. L'allure d'une ligne de champ (la règle de la main droite) est représentée figure (2) : Ainsi $B_z > 0$, $B_r > 0$ si $0 < z < L$ et $B_r < 0$ si $-L < z < 0$.

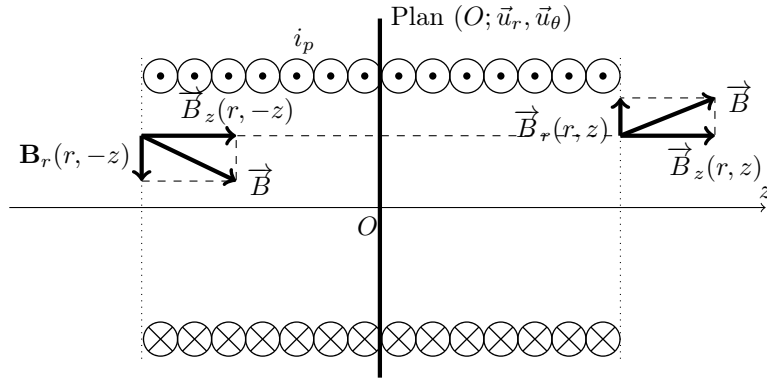


Figure 1:

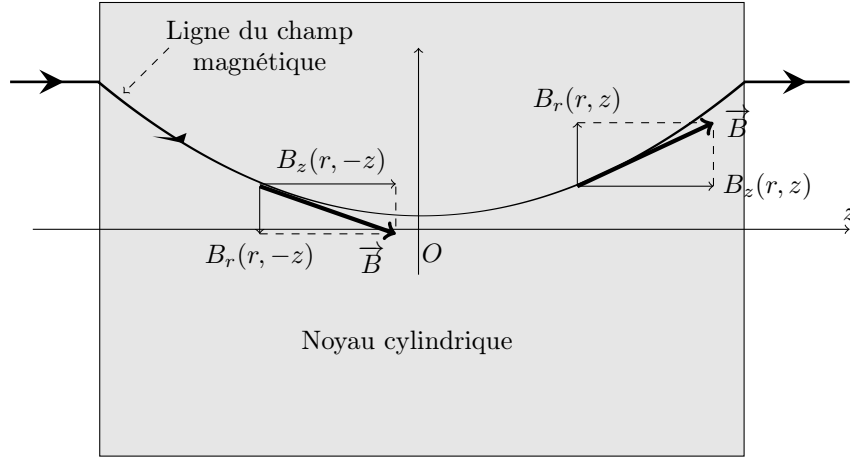


Figure 2:

□—8. Soit un contour fermé comme indiqué sur la figure (3):
endroits : sur la culasse ferromagnétique.

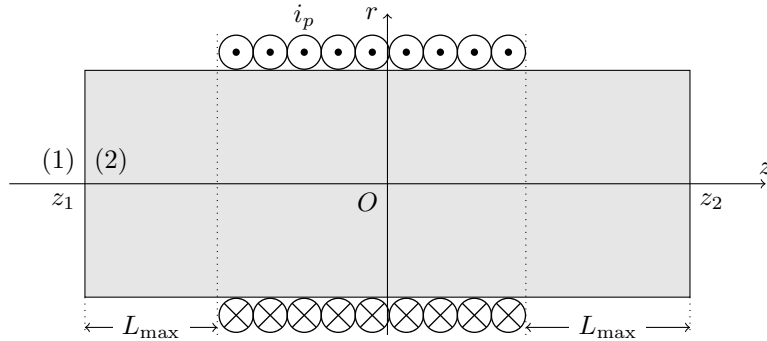


Figure 3:

□—9. Aux voisinage du centre du noyau (zone (S) sur la figure 4):

- ★ d'après le résultat de la simulation numérique (figure 3 de l'énoncé) les lignes de champ sont parallèles entre elles,
- ★ Pour le résultat numérique (figure 5 de l'énoncé) la composante B_z présente un palier horizontale.

Ainsi, on pourra considérer le champ comme uniforme aux du centre du noyau.

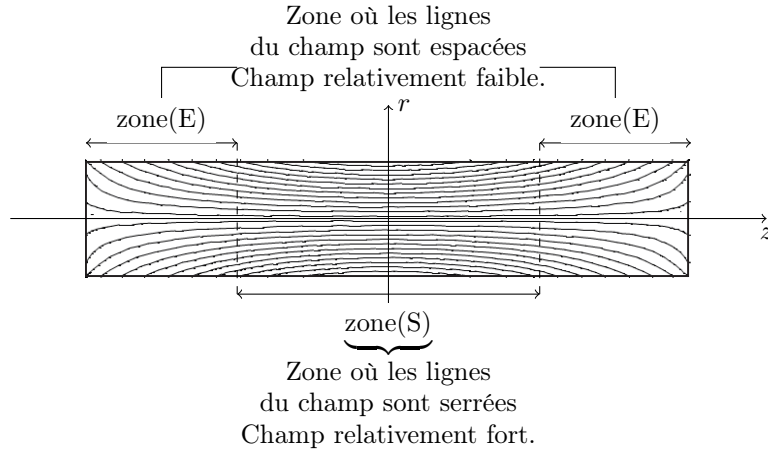


Figure 4:

□—10. L'éloignement des lignes de champ entre elles lorsqu'on se rapproche des bords du noyau explique la diminution de la composante axiale B_z du champ magnétique.

□—11. Le flux mutuel du champ magnétique créé par le circuit primaire à travers le circuit secondaire 1 se calcule de la manière suivante : $\phi_{p \rightarrow 1} = N_1 \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$

On a $\vec{B} = K i_p \vec{u}_z$, $d\vec{S} = r dr d\theta \vec{u}_z$ et $N_1 = n L_{\max}$ (le nombre de spires du secondaire effectivement traversé par le champ $\vec{B}$ non nul)

$$\text{Donc : } \phi_{p \rightarrow 1} = n L_{\max} K i_p \underbrace{\int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta}_{=S}$$

D'où : $\phi_{p \rightarrow 1} = n L_{\max} S K i_p$ soit sous la forme $\phi_{p \rightarrow 1} = M_1 i_p$, on en déduit l'inductance mutuelle M_1 entre le circuit primaire et le circuit secondaire 1 : $M_1 = n L_{\max} S K$

Un calcul similaire peut être mené pour calculer l'inductance mutuelle M_2 entre le circuit primaire et le circuit secondaire 2, on trouve, du fait que les deux secondaires sont identiques et traversés par le même champ magnétique, que $M_2 = n L_{\max} S K$.

Soit finalement : $M_1 = M_2 = n L_{\max} S K \equiv M_0$

□—12. *Application numérique* : Le schéma électrique équivalent du transformateur (les deux circuits secondaires sont à vide $i_1 = 0$ et $i_2 = 0$) est représenté sur la figure (5) :

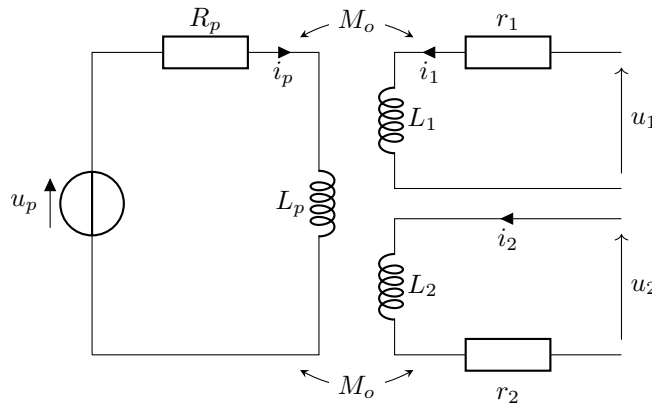


Figure 5: Schéma électrique équivalent du transformateur

$$\begin{aligned}
u_p &= u_{R_p} - e_p = R_p i_p + L_p \frac{di_p}{dt} + M_0 \frac{di_1}{dt} + M_0 \frac{di_2}{dt} \\
&= R_p i_p + L_p \frac{di_p}{dt} \\
u_1 &= -e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_0 \frac{di_p}{dt} = M_0 \frac{di_p}{dt} \\
u_2 &= -e_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_0 \frac{di_p}{dt} = M_0 \frac{di_p}{dt}
\end{aligned}$$

Donc en régime sinusoïdale :

$$\begin{aligned}
\underline{u}_p &= (R_p + jL_p\omega) \underline{i}_p \\
\underline{u}_1 &= \underline{u}_2 = jM_0\omega \underline{i}_p
\end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned}
|\underline{u}_p| &= |\underline{i}_p| \sqrt{(R_p^2 + (L_p\omega)^2)} \\
&= \frac{|\underline{u}_2|}{M_0\omega} \sqrt{(R_p^2 + (L_p\omega)^2)}
\end{aligned}$$

Donc :

$$M_0 = \frac{U_1}{U_p 2\pi f} \sqrt{(R_p^2 + (2\pi f L_p)^2)}$$

AN : $M_0 = 1\text{mH}$

II.— Déplacement du noyau

□—13. Pour $-L < z < L$ le champ magnétique est uniforme (c'est-à-dire indépendant de z) donc le flux propre de circuit primaire est indépendant de z , alors L_p est aussi indépendante de z .

□—14. Après le déplacement du noyau de z par rapport à l'état de référence, le flux mutuel du champ magnétique créé par le circuit primaire à travers le circuit secondaire 1 : $\phi_{p \rightarrow 1} = N'_1 \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$

On a $\vec{B} = K i_p \vec{u}_z$, $d\vec{S} = r dr d\theta \vec{u}_z$ et $N'_1 = n (L_{\max} + z)$ (le nombre de spires du secondaire effectivement traversé par le champ $\vec{B}$ non nul)

$$\text{Donc } \phi_{p \rightarrow 1} = n (L_{\max} + z) K i_p \underbrace{\int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta}_{=S}$$

D'où : $\phi_{p \rightarrow 1} = n (L_{\max} + z) S K i_p$ soit sous la forme $\phi_{p \rightarrow 1} = M_1(z) i_p$, on en déduit l'inductance

mutuelle $M_1(z)$ entre le circuit primaire et le circuit secondaire 1 : $M_1(z) = \left(1 + \frac{z}{L_{\max}}\right) M_0$.

□—15. Dans le cas du circuit secondaire 2 le nombre de spire effectivement traversées par un champ magnétique non nul est $N'_2 = n (L_{\max} - z)$, on en déduit donc : $M_2(z) = \left(1 - \frac{z}{L_{\max}}\right) M_0$.

□—16. On a $u_s = u_2 - u_1 = -\frac{d\phi_{p \rightarrow 2}}{dt} - \left(-\frac{d\phi_{p \rightarrow 1}}{dt}\right)$, donc : $u_s = -M_2(z) \frac{di_p}{dt} + M_1(z) \frac{di_p}{dt}$

D'où : $u_s = 2M_0 \frac{z}{L_{\max}} \frac{di_p}{dt}$, on en déduit la valeur de $\lambda = 2$

□—17. Le courant au primaire est sinusoïdal fixé $i_p = I_p \sin(\omega t)$, $\frac{di_p}{dt} = \omega I_p \cos(\omega t)$

On en déduit $u_s = \underbrace{2M_0\omega I_p}_{=\pm A} \frac{z}{L_{\max}} \cos(\omega t)$ avec $A = 2M_0\omega I_p \frac{|z|}{L_{\max}}$ est l'amplitude du signal u_s .

L'allure de A en fonction de z est donnée figure (1).

Pour distinguer (discerner) le cas $z > 0$ et $z < 0$, on peut par exemple mesurer à l'aide d'un

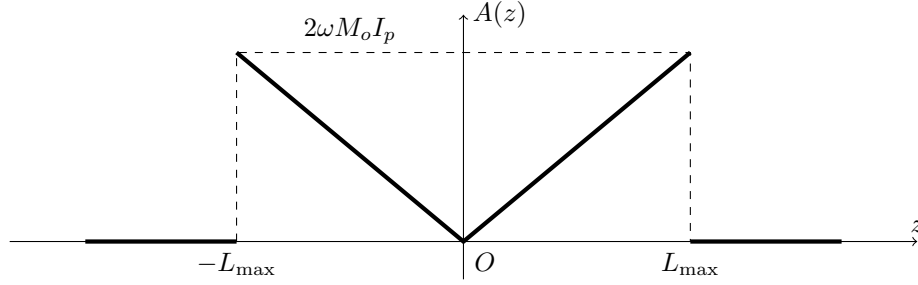


Figure 6:

oscilloscope le déphasage entre le courant i_p et la tension u_s .

Le procédé permettant de générer une tension proportionnel au paramètre $A(z)$ est l'utilisation d'un détecteur de crête.

III.— Conditionnement du signal

□—18. Un ALI idéal est caractérisé par (figure 7) :

- des courants d'entrée nuls $i^+ = i^- = 0$,
- une différence de potentiel $\varepsilon = v^+ - v^- = 0$ nulle entre ses deux entrées en régime linéaire.

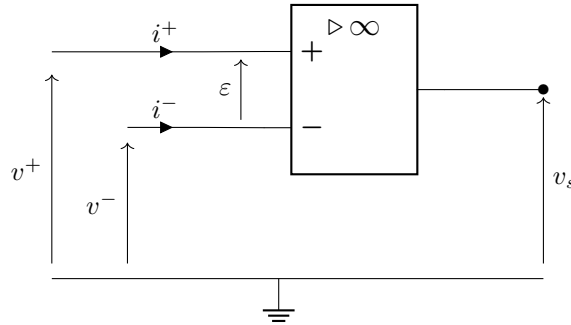


Figure 7: Schéma d'un ALI idéal

Les amplificateurs (A_1) et (A_2) sont bouclés négativement donc ils fonctionnent, à priori, en régime linéaire.

□—19. Le montage de la figure 8 est un amplificateur inverseur de tension. L'entrée non inverseuse est reliée à la masse. Ainsi, l'AO est idéal et fonctionne en régime linéaire ce qui implique que $v_+ = v_- = 0$. Les deux résistances sont parcourues par le même courant i_e , ainsi

$$i_e = \frac{v_e - v_-}{R_1} = \frac{v_e}{R_1} \quad \text{et} \quad i_e = \frac{v_- - v_1}{R_1} = -\frac{v_1}{R_2}$$

d'où

$$\boxed{v_1 = -\frac{R_2}{R_1}v_e} \quad (24)$$

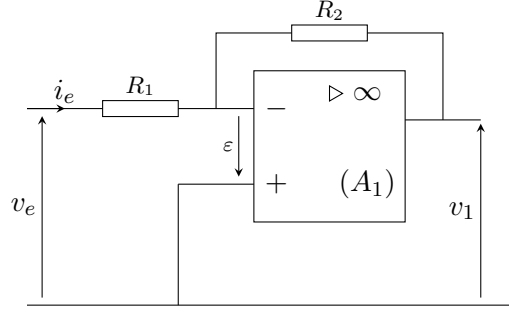


Figure 8: Montage amplificateur inverseur

Le signal de sortie v_1 est donnée par la multiplication du signal d'entrée par un facteur d'amplification avec un déphasage de π d'où le nom du montage.

Un montage intégrateur réalise en sortie l'intégration du signal à l'entrée, il est semblable au montage amplificateur inverseur, dans lequel on a substitué la résistance assurant la rétroaction négative par un condensateur de capacité C (figure 9). On peut appliquer le théorème de Millman en RSF à

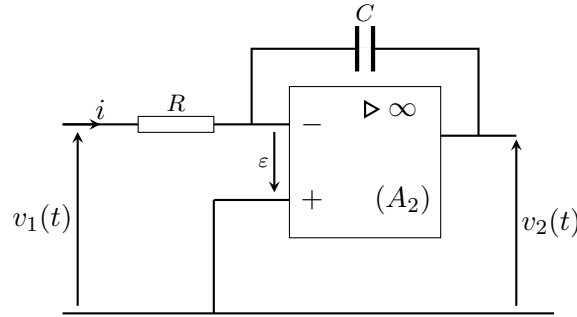


Figure 9: Montage intégrateur

l'entrée inverseuse. Ainsi, en notation complexe:

$$\frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{Z_c} = 0$$

Ce qui donne :

$$v_2 = -\frac{Z_c}{R} v_1 = -\frac{1}{j\omega RC} v_1$$

En passant en régime temporel, on aura:

$$v_2(t) = -\frac{1}{RC} \int v_1(t) dt$$

□—20. On a $v^- = v_2$ et $v^+ = \frac{R_3}{R_3 + R_4} v_s$ donc l'expression de la tension différentielle $\varepsilon = v^+ - v^-$ est:

$$\varepsilon = v^+ - v^- = \frac{R_3}{R_3 + R_4} v_s - v_2$$

L'amplificateur opérationnel (A_3) dans ce montage fonctionne en régime de commutation (bouclage de l'entrée non inverseuse "+" avec la sortie), alors la tension de sortie ne peut prendre que deux valeurs: $+V_{\text{sat}}$ ou $-V_{\text{sat}}$.

Supposons pour commencer que $v_s = +V_{\text{sat}}$ alors : $\varepsilon = \frac{R_3}{R_3 + R_4} V_{\text{sat}} - v_2$.

Le basculement de la tension de sortie vers $-V_{\text{sat}}$ se produira lorsque ε deviendra négatif, soit:

$$\varepsilon = \frac{R_3}{R_3 + R_4} V_{\text{sat}} - v_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 > \frac{R_3}{R_3 + R_4} V_{\text{sat}} = V_b$$

Lorsque $v_s = -V_{\text{sat}}$ alors : $\varepsilon = -\frac{R_3}{R_3 + R_4}V_{\text{sat}} - v_2$.

Le basculement de la tension de sortie vers $+V_{\text{sat}}$ se produira lorsque ε deviendra positif, soit :

$$\varepsilon = -\frac{R_3}{R_3 + R_4}V_{\text{sat}} - v_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 < -\frac{R_3}{R_3 + R_4}V_{\text{sat}} = -V_b$$

La figure (10) représente la caractéristique de transfert du comparateur inverseur à hystérésis.

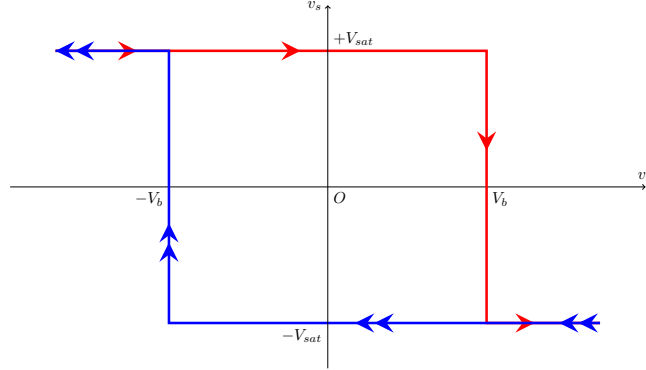


Figure 10: Caractéristique de transfert du comparateur inverseur à hystérésis

Remarque : les flèches indiquent le sens de parcours du cycle d'hystérésis.

□—21. On a $v_e = v_s$ et d'après la question □—19, on tire $v_2 = \frac{R_2}{R_1 RC} \int v_s dt$.

On suppose qu'à $t = 0$ le condensateur est initialement déchargé $v_2(0) = 0$ et que la sortie de l'amplificateur (A_3) se trouve à l'état de saturation haute $v_s = +V_{\text{sat}}$, on en déduit $v_2 = \frac{R_2 V_{\text{sat}}}{R_1 RC} t + \text{cte}_1$. A $t=0$ on a $v_2(0) = 0$ donc $\text{cte}_1 = 0$.

Soit donc $v_2 = \frac{R_2 V_{\text{sat}}}{R_1 RC} t$. La tension v_2 croît linéairement jusqu'à la date t_1 où la tension de sortie de

(A_3) basculera à $-V_{\text{sat}}$. A cette instant $v_2 = \frac{R_3}{R_3 + R_4}V_{\text{sat}}$ soit donc $t_1 = \frac{R_1 R_3 RC}{R_2 (R_3 + R_4)}$

Après t_1 le condensateur se décharge sous $-V_{\text{sat}}$ et la tension v_2 est déterminée par $v_2 = \frac{R_2}{R_1 RC} \int -V_{\text{sat}} dt$

ce qui donne $v_2 = -\frac{R_2 V_{\text{sat}}}{R_1 RC} t + \text{cte}_2$. On utilise la continuité de la tension v_2 à l'instant t_1 :

$\frac{R_3}{R_3 + R_4}V_{\text{sat}} = -\frac{R_2 V_{\text{sat}}}{R_1 RC} t_1 + \text{cte}_2$, on tire $\text{cte}_2 = \frac{R_3}{R_3 + R_4}V_{\text{sat}} + \frac{R_2 V_{\text{sat}}}{R_1 RC} t_1$ donc l'expression de la tension v_2 pour $t_1 < t < t_2$ est :

$$v_2 = \frac{R_3}{R_3 + R_4}V_{\text{sat}} - \frac{R_2 V_{\text{sat}}}{R_1 RC} (t - t_1)$$

La tension v_2 continue à décroître jusqu'à l'instant t_2 où la tension de sortie de (A_3) basculera à nouveau vers V_{sat} . A $t = t_2$ la tension est égale à la tension de basculement négative soit

$v_2(t_2) = -\frac{R_3}{R_3 + R_4}V_{\text{sat}}$, on obtient donc : $t_2 - t_1 = \frac{2R_1 R_3 RC}{R_2 (R_3 + R_4)}$. Le processus charge-décharge

du condensateur continue d'une façon périodique, la figure 11 représente les variations de v_2 et v_s en fonction du temps.

La tension triangulaire est v_2 qui sera désignée par v_t , la durée $t_2 - t_1$ représente la demi-période. On en déduit la période du signal v_t : $T = 2(t_2 - t_1)$, soit

$$T = \frac{4R_1 R_3 RC}{R_2 (R_3 + R_4)}$$

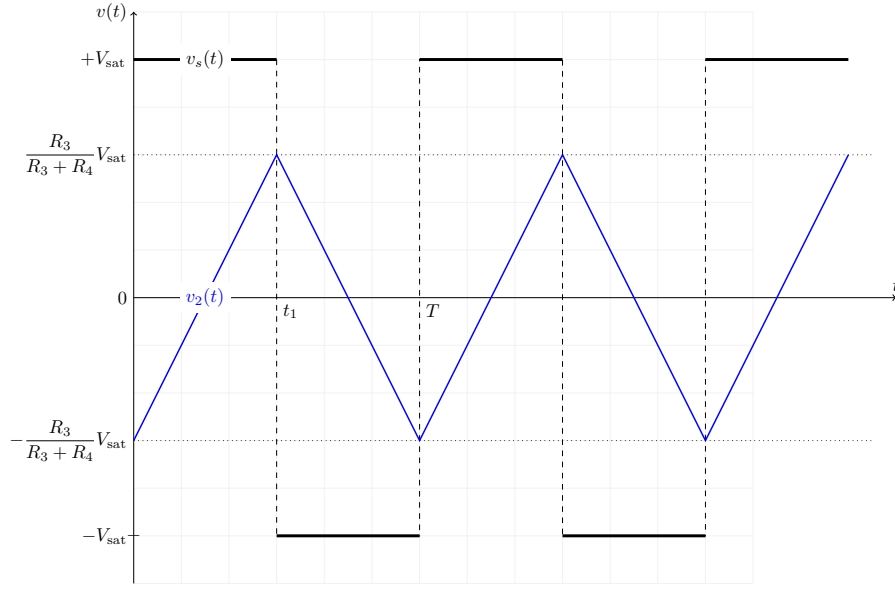


Figure 11:

□—22. $R_1 = R_2$ et $R_3 = R_4 \implies T = 2RC = \frac{1}{f}$ donc : $C = \frac{1}{2Rf}$. L'application numérique donne : $C = 0,25 \mu\text{F}$. Pour modifier f il suffit de modifier soit C soit R .

L'expression de l'amplitude de la tension v_t est : $E = \frac{R_3}{R_3 + R_4} V_{\text{sat}}$, pour modifier cette amplitude on peut agir sur les résistances R_3 et/ou R_4 .

On a $\frac{E}{V_{\text{sat}}} = \frac{R_3}{R_3 + R_4}$, donc la condition sur R_3 et R_4 pour que ce rapport soit égal à 0,22 est : $R_4 = 3,54 R_3$.

Application numérique : $E = 3,3 \text{ V}$.

□—23. Pour $0 < \theta < \frac{1}{4}$ on a $\frac{v_t}{E}$ est linéaire donc on peut écrire $\frac{v_t}{E} = a \theta$ où $a = 4$ est la pente de la droite. On en déduit donc : $v_t = 4E\theta$

□—24. Si D_1 conduit alors $u_1 = U_s > 0$ ce qui donne $u_2 = -u_1 = -U_s < 0$ alors D_2 est bloquée. Montrons qu'il existe une valeur $U_1 > 0$ telle que si $0 \leq v_s \leq U_1$ alors le courant dans la résistance r_1 est nul et, si $v_s > U_1$, ce courant n'est pas nul.

Si $-U_s \leq U_{AB} \leq +U_s$ on aura $i_{AB} = 0$ et sachant que (voir figure 12): $v_s = U_{AB} + r_1 i_{AB} = U_{AB}$: $-U_s \leq v_s \leq +U_s$

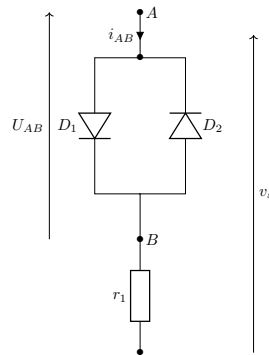


Figure 12: Première cellule

Si $U_{AB} \geq U_s$ la diode D_1 conduit (et D_2 bloquée), donc $i_{AB} \neq 0$ or on sait que : $v_s = U_{AB} + r_1 i_{AB}$ alors $v_s > U_s$

Donc:

$$\boxed{U_1 = U_s}$$

□-25. On effectue le même raisonnement que dans la question □-24. et en remplaçant U_s par $2U_s$ (car deux diodes en série sur chaque branche, voir figure 13):

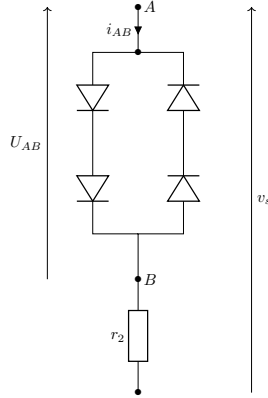


Figure 13: Deuxième cellule

On aura :

Si $-2U_s \leq U_{AB} \leq +2U_s$ on aura $i_{AB} = 0$ et sachant que $v_s = U_{AB} + r_2 i_{AB} = U_{AB}$: $-2U_s \leq v_s \leq +2U_s$

Si $U_{AB} \geq 2U_s$ on aura $i_{AB} \neq 0$ sachant que : $v_s = U_{AB} + r_2 i_{AB}$: $v_s > +2U_s$ Donc :

$$\boxed{U_2 = 2U_s}$$

□-26. De la même façon, on aura:

Si les trois diodes conduisent alors (voir figure 14): $v_s = 3U_s$.

donc :

$$\boxed{V_{\max} = 3U_s}$$

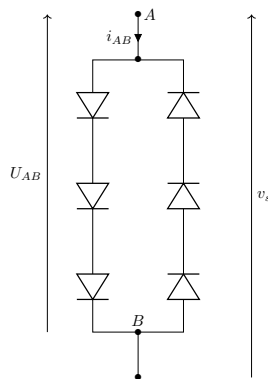


Figure 14: Troisième cellule

□-27. On a pour $0 \leq \theta \leq 0,25$: $v_t(\theta) = 4E\theta$ Donc la pente de $v_t(\theta)$ au voisinage de ($\theta \approx 0$) est :

$$\left(\frac{dv_t(\theta)}{d\theta} \right)_{(\theta \approx 0)} = 4E$$

et la pente de $s(\theta)$ au voisinage de $(\theta \cong 0)$ est:

$$\left(\frac{ds(\theta)}{d\theta} \right)_{(\theta \approx 0)} = (2\pi V_{\max} \cos(2\pi\theta))_{(\theta \approx 0)} = 2\pi V_{\max} = 6\pi U_s$$

Donc pour que les pentes de $v_t(\theta)$ et $s(\theta)$ au voisinage de $\theta \cong 0$, soient égales, il faut que:

$$4E = 6\pi U_s$$

Soit :

$$\boxed{\frac{E}{U_s} = \frac{3}{2}\pi}$$

□–28. Pour $v_s < U_1 = U_s$, les courants parcourant les trois cellules sont nuls. Donc avec $i_s = 0$:

$$v_s(\theta) - v_t(\theta) = r_0 i_s = 0$$

Donc : $v_s(\theta) = v_t(\theta)$

D'où :

$$v_s(\theta) = v_t(\theta) = s(\theta)$$

Ce qui donne

$$v_s(\theta_1) = v_t(\theta_1) = 4E\theta_1 = U_1$$

Soit avec $U_1 = U_s$:

$$\theta_1 = U_s/4E$$

Avec le résultat de la question **□–27.** on obtient :

$$\theta_1 = 1/6\pi \cong 0,053$$

□–29. Pour $U_s < v_s < 2U_s$, les courants parcourant les cellules (2) et (3) sont nuls. Soit i_{AB} le courant parcourant r_1 . La diode D_1 est équivalente à une force électromotrice U_s . Donc avec $i_s = 0$. La loi des mailles donne : $v_s(\theta) = r_1 i_{AB} + U_s$

Et :

$$v_t(\theta) - v_s(\theta) = r_0 i_{AB} \Rightarrow i_{AB} = \frac{v_t(\theta) - v_s(\theta)}{r_0}$$

Donc :

$$v_s(\theta) = \frac{r_1 v_t(\theta) + r_0 U_s}{r_0 + r_1}$$

Soit avec $v_t(\theta) = 4E\theta$:

$$v_s(\theta) = \frac{4Er_1}{r_0 + r_1} \theta + \frac{r_0 U_s}{r_0 + r_1}$$

La pente de $v_s(\theta)$ lorsque $\theta \rightarrow \theta_1$:

$$\left(\frac{dv_s(\theta)}{d\theta} \right)_{(\theta \approx \theta_1)} = \frac{4E}{r_0 + r_1}$$

La pente de $v_s(\theta)$ lorsque $\theta \rightarrow \theta_1$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds(\theta)}{d\theta} \right)_{(\theta \approx \theta_1)} &= (2\pi V_{\max} \cos(2\pi\theta))_{(\theta \approx \theta_1)} \\ &= 2\pi V_{\max} \cos(2\pi\theta_1) \\ &= 2\pi V_{\max} \cos(1/3) = 6\pi U_s \cos(1/3) \end{aligned}$$

Afin que les pentes des courbes $v_s(\theta)$ et $s(\theta)$ soient identiques lorsque $\theta \rightarrow \theta_1$ par valeurs supérieures

:

Donc, avec $E/U_s = 3\pi/2$:

$$\begin{aligned}\rho_1 + 1 &= \frac{4E}{6\pi U_s \cos(1/3)} = \frac{4 \times 3\pi/2}{6\pi \cos(1/3)} \\ &= \frac{1}{\cos(1/3)}\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\rho_1 = \frac{1}{\cos(1/3)} - 1}$$

L'expression de v_s en fonction de U_s, ρ_1, E et θ est :

$$v_s(\theta) = \frac{4E}{\rho_1 + 1}\theta + \frac{\rho_1 U_s}{\rho_1 + 1}$$

Pour que : $v_s(\theta_2) = 2U_s$,

$$2U_s = \frac{4E}{\rho_1 + 1}\theta_2 + \frac{\rho_1 U_s}{\rho_1 + 1}$$

Donc :

$$\theta_2 = \left(1 + \frac{1}{\cos(1/3)}\right)\theta_1 = \alpha\theta_1$$

On en déduit :

$$\alpha = \left(1 + \frac{1}{\cos(1/3)}\right)$$

□—30. Pour $2U_s < v_s < 3U_s$, seule le courant parcourant la cellule (3) est nul. Soit i_1 le courant parcourant r_1 et i_2 le courant parcourant r_2 (le schéma équivalent du conformateur est donné figure 15). Avec une précision que la cellule (1) et (2) sont équivalentes respectivement à des forces électromotrices U_s et $2U_s$. Donc avec $i_s = 0$.

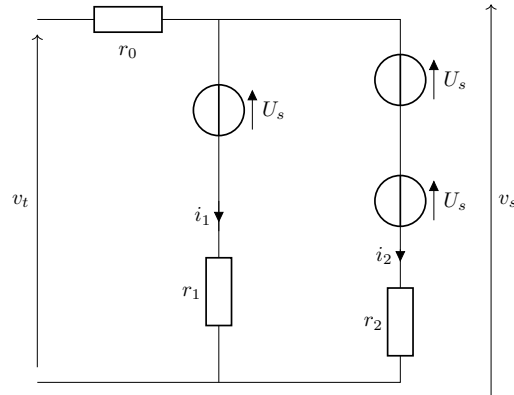


Figure 15:

La loi des mailles donne :

$$v_s(\theta) = r_2 i_2 + 2U_s$$

Or : $v_s(\theta) = r_1 i_1 + U_s$

ET :

$$v_t(\theta) - v_s(\theta) = r_0 (i_1 + i_2) \Rightarrow i_1 + i_2 = \frac{v_t(\theta) - v_s(\theta)}{r_0}$$

D'où :

$$(r_1 + r_2) v_s(\theta) = r_1 r_2 \frac{v_t(\theta) - v_s(\theta)}{r_0} + (2r_1 + r_2) U_S$$

Donc :

$$v_s(\theta) = \frac{r_1 r_2}{r_0 r_1 + r_0 r_2 + r_1 r_2} v_t(\theta) + \frac{(2r_0 r_1 + r_0 r_2)}{r_0 r_1 + r_0 r_2 + r_1 r_2} U_S$$

Avec $v_t(\theta) = 4E\theta$:

$$v_s(\theta) = \frac{4Er_1 r_2}{r_0 r_1 + r_0 r_2 + r_1 r_2} \theta + \frac{(2r_0 r_1 + r_0 r_2)}{r_0 r_1 + r_0 r_2 + r_1 r_2} U_S$$

□—**31.** Vu que: $V_{\max} = 3U_S = v_s(\theta_3)$, donc pour des valeurs supérieures à θ_3 , en particulier pour $\theta_3 < \theta < 1/4$, la tension $v_s(\theta)$ à $V_{\max} = 3U_S$. Donc pour, $\theta_3 < \theta < 1/4$:

$$v_s(\theta) = v_s(\theta_3) = 3U_S.$$

□—**32.** On pourra ajouter à la sortie du montage un filtre passe-bas.

IV.— Exemple d'utilisation de ce capteur : un accéléromètre asservis

IV.A.— Première étude : le boîtier est immobile

□—**33.**

□—**34.** On applique le principe fondamentale de la dynamique

- **Système étudié** : la masse sismique (de masse m)
- **Référentiel d'étude** : $\mathcal{R}_0$, référentiel terrestre galiléen.
- **Bilan des forces**:

★ *Le poids* : $\vec{P} = m\vec{g}$.

★ *La force de rappel* : $\vec{F} = -k(Z - \ell_0) \vec{u}_Z$

★ *La force de frottement fluide* : $\vec{f} = -\lambda \frac{dZ}{dt} \vec{u}_Z$

Le principe fondamental de la dynamique projeter sur l'axe (OZ) : $m \frac{d^2 Z}{dt^2} = -\lambda \frac{dZ}{dt} - k(Z - \ell_0)$
On en déduit l'équation différentielle vérifiée par $Z(t)$:

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{dZ}{dt} + \frac{k}{m} (Z - \ell_0) = 0$$

Sous sa forme canonique :

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dZ}{dt} + \omega_0^2 (Z - \ell_0) = 0$$

Avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{\sqrt{mk}}{\lambda}$$

□—35. La position d'équilibre Z_0 , à l'équilibre on a $\frac{d^2 Z}{dt^2}$ et $\frac{dZ}{dt}$ sont nulles donc:

$$Z_0 = \ell_0$$

La relation entre z et Z :

$$z = Z - \ell_0$$

□—36. Pour que la masse retrouve sa position d'équilibre sans oscillation il faut que le discriminant de l'équation caractéristique soit positive ou à la limite nul :

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 (1 - 4Q^2) \geq 0$$

Soit : $1 - 4Q^2 \geq 0$.

Donc:

$$\frac{mk}{\lambda^2} \leq \frac{1}{4}$$

Soit finalement: $\lambda \geq 2\sqrt{mk}$ Donc:

$$\lambda_{\min} = 2\sqrt{mk}$$

IV.B.— Etude simplifiée du boîtier mobile

□—37. Soit $\mathcal{R}_1$ le référentiel mobile lié au boîtier. On applique la loi de décomposition des vitesses, la vitesse de G dans le référentiel terrestre est :

$$\begin{aligned} \vec{v}(G/\mathcal{R}_0) &= \vec{v}(G/\mathcal{R}_1) + \vec{v}(G \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \\ &= \frac{dZ_1}{dt} \vec{u}_z + \frac{dZ}{dt} \vec{u}_z \\ &= \left(\frac{dZ_1}{dt} + \frac{dZ}{dt} \right) \vec{u}_z \\ &= \left(v_1 + \frac{dZ}{dt} \right) \vec{u}_z \end{aligned}$$

Et pour l'accélération absolue de G on trouve :

$$\vec{\gamma}(G/R_0) = \left(\gamma_1 + \frac{d^2 Z}{dt^2} \right) \vec{u}_z$$

Le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe (OZ):

$$m \frac{d^2 Z}{dt^2} = -\lambda \frac{dZ}{dt} - k(Z - \ell_0) - m\gamma_1$$

La nouvelle position d'équilibre Z'_0 :

$$-k(Z'_0 - \ell_0) - m\gamma_1 = 0$$

Donc :

$$Z'_0 = \ell_0 - \frac{m\gamma_1}{k}$$

de la relation entre z et Z :

$$z = Z - \ell_0$$

on tire :

$$z'_0 = Z'_0 - \ell_0$$

Donc :

$$z'_0 = -\frac{m\gamma_1}{k} = -\omega_0^2 \gamma_1$$

Connaissant k et m La lecture de z'_0 au bout d'un temps infini permet de mesurer l'accélération du boîtier γ_1 et donc la détection du séisme.

□—38. La nouvelle équation vérifiée par $Z(t)$ est :

$$m \frac{d^2 Z}{dt^2} = -\lambda \frac{dZ}{dt} - k(Z - \ell_0) - m\gamma_1 + \beta V_{\text{out}}$$

Avec ici $V_{\text{out}} = k_{s0}z(t)$:

$$m \frac{d^2 Z}{dt^2} = -\lambda \frac{dZ}{dt} - k(Z - \ell_0) - m\gamma_1 + \beta k_{s0}z(t)$$

Or $z(t) = Z(t) - \ell_0$:

$$m \frac{d^2 Z}{dt^2} = -\lambda \frac{dZ}{dt} - k(Z - \ell_0) - m\gamma_1 + \beta k_{s0}(Z(t) - \ell_0)$$

Donc :

$$m \frac{d^2 Z}{dt^2} = -\lambda \frac{dZ}{dt} - (k - \beta k_{s0})Z + (k - \beta k_{s0})\ell_0 - m\gamma_1$$

La nouvelle équation vérifiée par $z(t)$ est :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -\lambda \frac{dz}{dt} - (k - \beta k_{s0})z - m\gamma_1$$

- L'expression de la valeur z_{eq} de z à l'équilibre:

$$z_{eq} = \frac{m\gamma_1}{\beta k_{s0} - k}$$

L'expression de la valeur $V_{\text{out, eq}}$:

$$V_{\text{out, eq}} = k_{s0}z_{eq} = \frac{k_{s0}m\gamma_1}{\beta k_{s0} - k}$$

- Au bout d'un temps infini, la mesure de $V_{\text{out, eq}}$ permet de mesurer l'accélération γ_1 . - Pour que la durée du régime transitoire soit la plus petite possible il faut que le temps caractéristique du régime transitoire $\tau = m/\lambda$ soit faible devant la période T du signal électrique utilisé.

$$T \gg \frac{m}{\lambda} \Rightarrow \lambda \geq \frac{m}{T}$$

Le temps de réponse de l'accéléromètre construit dans ces conditions est :

$$\tau = \frac{m}{\lambda_{\text{mit}}} = \frac{m}{2\sqrt{mk}} = \frac{1}{2\omega_0}$$



ÉPREUVE DE PH-CH 1 - MP

Centres de données

Un centre de données –*data center* en anglais – est un lieu regroupant des installations informatiques chargées de stocker et de distribuer des données (*data*). Ces dernières années, l'expansion des services en ligne a entraîné une croissance exponentielle du nombre de centres de données, dégageant de grandes quantités de chaleur. La régulation en température de ces lieux est donc devenue un enjeu environnemental majeur.

Ce problème est composé de deux parties, elles-mêmes divisées en différentes sous-parties, totalement indépendantes. La première partie propose une étude thermodynamique et thermique de dispositifs utilisables pour le refroidissement d'un centre de données. La deuxième partie porte sur le projet de délocalisation des centres de données dans l'espace.

I.— Refroidir les centres de données, quelques solutions techniques contemporaines

I.A.— À l'échelle des composants

À l'échelle des composants, il est nécessaire d'évacuer la chaleur dégagée, par les transistors des microprocesseurs notamment. Pour ce faire, des ventilateurs sont installés afin de renouveler en permanence l'air au contact des composants. De plus, des ailettes de refroidissement sont assemblées directement sur la surface des composants afin de pouvoir dissiper le plus possible de chaleur vers l'extérieur par transfert conducto-convectif.

On modélise une de ces ailettes par un cylindre d'axe (Ox) , de rayon, de longueur $b \gg a$ et de conductivité thermique. Elle est accolée en $x = 0$ au composant de température T_d ; le contact thermique en $x = 0$ est supposé parfait. Le reste de l'ailette est au contact de l'air que l'on suppose de température T_a uniforme.

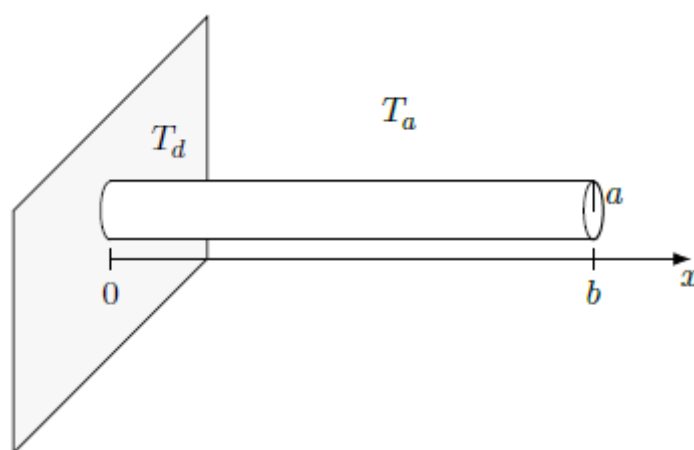


Figure 1: Modélisation de l'ailette

En régime stationnaire, supposé atteint dans toute cette sous-partie, la température $T(x)$ est considérée comme uniforme sur la section droite de l'ailette située à l'abscisse x pour tout $x \in [0, _]$.

□—1. Énoncer la loi de Fourier relative au vecteur densité de flux thermique $\vec{J}_Q$ qui caractérise le phénomène de conduction thermique le long de l'axe de l'ailette.

L'air qui entoure le solide, constamment renouvelé et de température uniforme, échange avec l'ailette un transfert conducto-convectif. Dans une fine couche de fluide au contact de la surface du solide, ce transfert latéral peut-être modélisé par la loi de NEWTON :

$$\vec{J}_{cc}(x) = h(T(x) - T_a) \vec{n}$$

où $\vec{J}_{cc}$ correspond à la densité de flux conducto-convectif et $\vec{n}$ est un vecteur unitaire, normal à la surface d'échange et orienté du solide vers l'air. Le coefficient, dont certaines valeurs numériques sont disponibles en fn d'énoncé, est appelé coefficient de transfert thermique de surface.

□—2. En réalisant un bilan de puissance thermique sur une tranche de longueur de l'ailette, montrer que la température suit l'équation différentielle

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2}T = -\frac{1}{\delta^2}T_a \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}} \quad (25)$$

□—3. Vérifier l'homogénéité de l'expression du paramètre δ introduit dans la question précédente. Estimer sa valeur numérique dans le cas d'une ailette en silicium de rayon $a = 1$ mm.

□—4. Expliciter les conditions aux limites que doit vérifier le champ de température $T(x)$ en $x = 0$ et en $x = b$.

Sur la Figure 2 est représentée la solution « normalisée » de l'équation (25), définie par $\frac{T(x) - T_a}{T_d - T_a}$, en fonction de l'abscisse adimensionnée x/b , pour différentes valeurs du rapport b/δ .

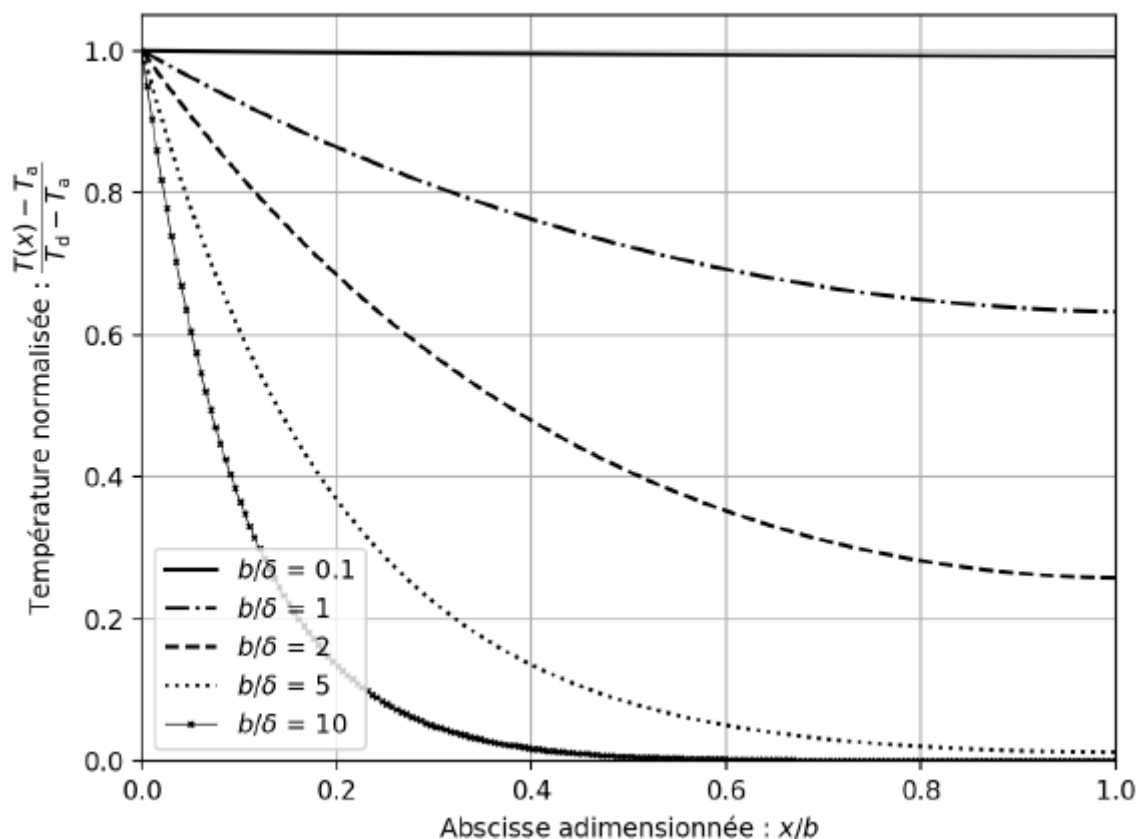


Figure 2: Représentation graphique du champ de température dans une ailette en silicium (solution de l'équation (I.1)) pour différentes valeurs du rapport b/δ

□—5. En précisant les approximations effectuées, obtenir une expression analytique approchée de $T(x)$ dans le cas où. Vérifier la cohérence de cette expression avec la Figure 2.

On définit la résistance thermique R_{th} de l'ailette de refroidissement par $R_{th} = \frac{T_d - T_a}{\mathcal{F}^J}$, où iP désigne la puissance thermique totale évacuée par l'ailette dans l'air.

□—6. La Figure 3 donne une représentation graphique de l'évolution de la résistance thermique d'une ailette cylindrique en fonction du rapport, pour différents matériaux. Interpréter physiquement l'existence d'une valeur asymptotique de R_{th} commune aux différents matériaux lorsque $b \ll \delta$; justifier sa valeur numérique.

□—7. Retrouver, par le calcul, la valeur asymptotique de la résistance thermique R_{th} de l'ailette en silicium dans le cas où $b \gg \delta$.

□—8. En pratique, les ailettes sont réalisées en aluminium et leur longueur est fixée à $b = 2$ cm. En vous appuyant sur la Figure 3, justifier ces choix, puis estimer le nombre d'ailettes (de rayon $a = 1$ mm) à associer à un microprocesseur dissipant une puissance thermique de 200 W pour que la température de ce dernier n'excède par 60°C en régime stationnaire de fonctionnement. Commenter.

I.B.— À l'échelle des locaux

Dans toute cette sous-partie, on s'intéresse au système de refroidissement d'une salle informatique de 25 m^3 , située dans le sud de la France, dans laquelle sont placés plusieurs serveurs de données. L'objectif est de maintenir la température de la salle à une valeur inférieure ou égale à $T_{\max} = 35^\circ\text{C}$, sachant que les serveurs de données dégagent une énergie thermique de $100 \text{ kW} \cdot \text{h}$ chaque jour.

□—9. La solution première de refroidissement de la salle repose sur l'utilisation d'un système de conditionnement d'air (parfois désigné « *climatiseur* » par abus de langage). Estimer le coût annuel, en euros, de cette solution en considérant que le système de conditionnement d'air fonctionne en permanence et que son efficacité –ou COP (Coefficient de Performance) –est égale à 3.

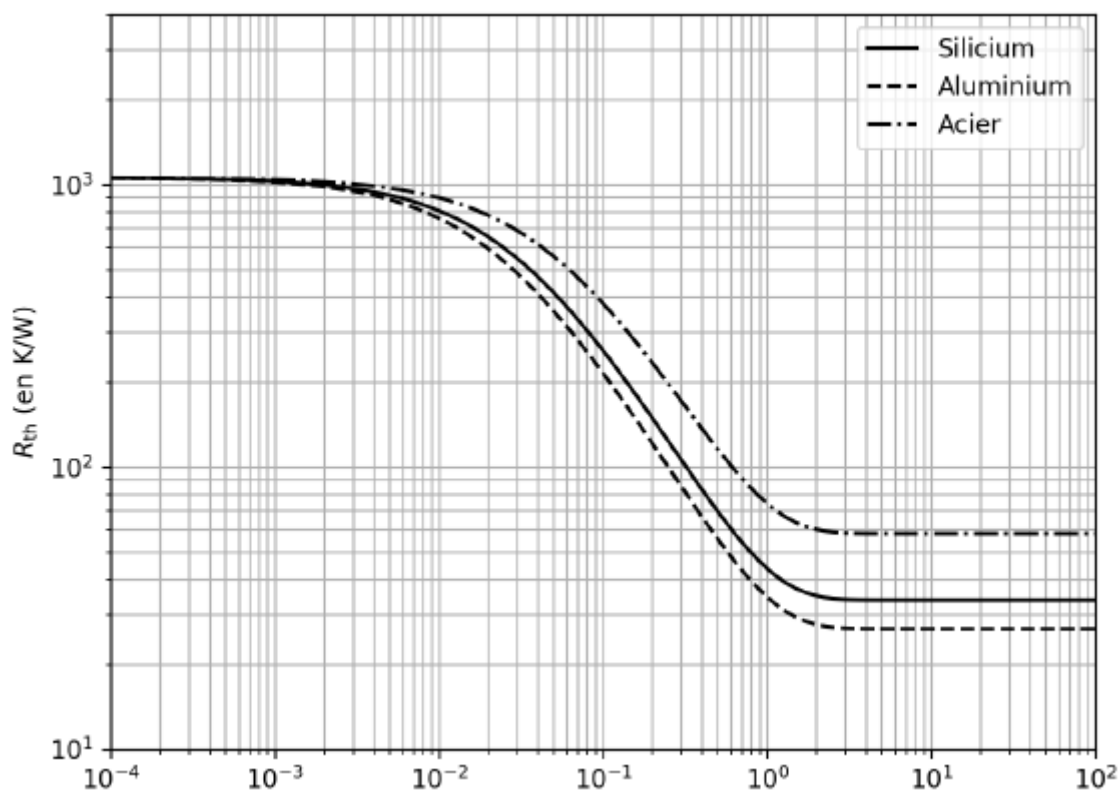


Figure 3: Évolution de la résistance thermique d'une ailette de rayon $a = 1$ mm, en présence de ventilation, en fonction du rapport b/δ

Afin de réduire les dépenses engagées pour le refroidissement de la salle, une alternative intéressante est celle du *free-cooling*, qui consiste à ventiler la salle tout en exploitant la fraîcheur de l'air extérieur. Pour ce faire, on a recours à l'installation d'un ventilateur pouvant remplacer l'air de la pièce avec le débit de volume $D_v = 830 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$. La puissance absorbée par le ventilateur est $\mathcal{F}_v = 60$ W.

□—10. L'air de la pièce est modélisé par un gaz parfait diatomique, à la pression atmosphérique et à la température T_{max} . Exprimer, puis évaluer numériquement, la masse volumique ρ_{air} de l'air dans ces conditions. En déduire le débit de masse d'air D_m , en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$, brassé par le ventilateur dans ces mêmes conditions.

Les relevés annuels de température à l'extérieur de la salle sont présentés sur la Figure 4.

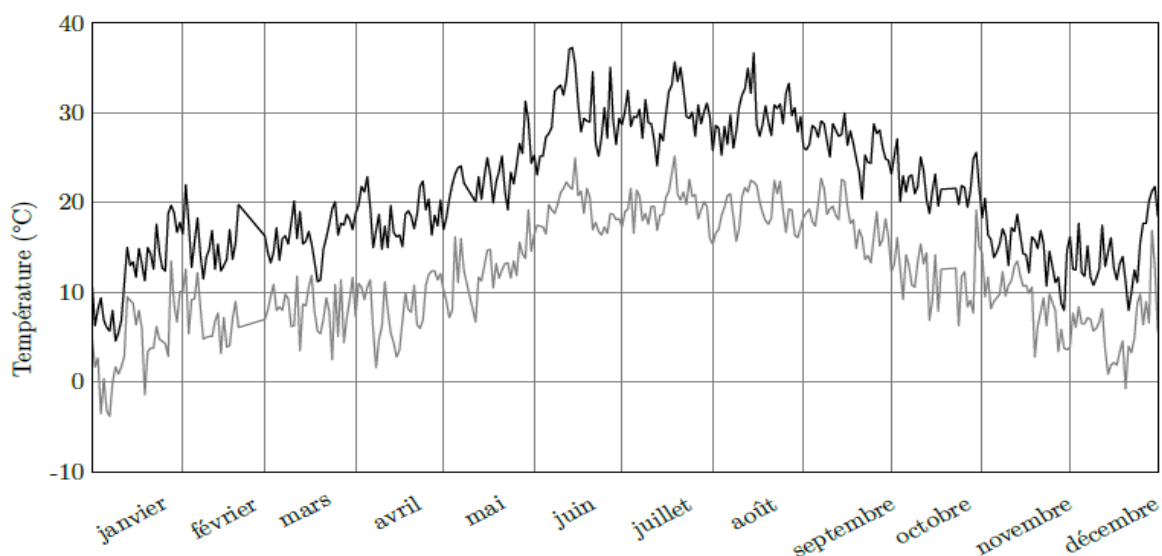


Figure 4: Relevé des températures journalières minimales et maximales à l'extérieur de la salle pour l'année 2021 (source *infoclimat.fr*)

Lorsque le système *à free-cooling* ne permet pas de maintenir la température de la salle à une température inférieure ou égale à $T_{\max}$, le système de conditionnement d'air prend le relais et le système de *free-cooling* s'arrête.

□—11. À l'aide d'un modèle simple, estimer la période de l'année sur laquelle le système de *free-cooling* est fonctionnel. En déduire le gain annuel en euros obtenu grâce à l'installation du système de *free-cooling* dans cette salle informatique.

II.— Délocaliser les centres de données, une solution d'avenir ?

Afin de lutter contre les cyberattaques, mais surtout de profiter d'un refroidissement optimal et « *gratuit* » une start-up californienne projette de stocker des données dans des satellites en orbite à basse altitude autour de la Terre. Le projet prévoit la mise en orbite de 10 satellites en tout.

II.A.— De la difficulté d'une communication directe

Chaque satellite est assimilé à un point matériel M de masse $m_S = 4t$, en orbite circulaire à l'altitude $h = 650$ km autour de la Terre de centre, de rayon R_T et de masse M_T . On suppose que la Terre est un astre présentant une répartition de masse à symétrie sphérique de centre. Les frottements sont négligés; seule la force gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite est à prendre en compte.

L'étude est réalisée dans le référentiel géocentrique, de repère associé $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, supposé galiléen. L'axe (Oz) est défini de sorte que la trajectoire du satellite considéré soit contenue dans le plan $z = 0$. L'ensemble des grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ associée à ce plan (Figure 5).

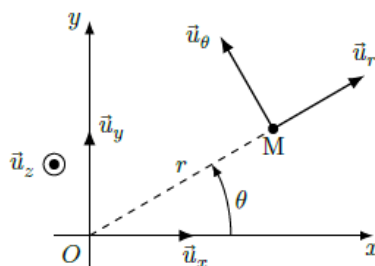


Figure 5:

□—12. Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.

□—13. Déterminer l'expression de la vitesse orbitale du satellite v_0 sur son orbite circulaire en fonction de la constante de gravitation universelle G et des paramètres M_T , R_T et h .

□—14. Évaluer numériquement la vitesse, ainsi que la période de révolution T_0 correspondante.

Pour appréhender la difficulté à communiquer avec les satellites de basse altitude directement depuis la surface de la Terre, on peut se référer à un article publié sur le site Internet du journal Le Monde le 13 janvier 2017, intitulé « Comment communique-t-on en direct avec l'ISS ? Dans cet article, publié lors du premier séjour de l'astronaute Thomas Pesquet à bord de la Station Spatiale Internationale (ISS), on peut lire l'extrait suivant.

« La Station Spatiale Internationale (ISS) étant sur une orbite basse, elle survole la surface terrestre d'assez près (environ 400 kilomètres). À cette altitude, la vitesse orbitale est très rapide (environ 27500 km/h, soit 7,6 km par seconde), rendant toute communication radio directe avec le sol impossible à établir plus d'une minute. La communication avec l'ISS passe donc par des satellites relais positionnés très haut, sur une orbite dite « géostationnaire à 36000 kilomètres d'altitude, qui permet

aux satellites qui y sont de rester au-dessus d'un point de la surface terrestre de façon fixe. Ces satellites servent de relais de communication aussi bien pour des équipages humains que pour de nombreux satellites placés sur une orbite basse qui ont également besoin de communiquer avec les équipes au sol».

□—15. Discuter quantitativement l'affirmation selon laquelle « la vitesse orbitale [rend] toute communication radio directe avec le sol impossible à établir plus d'une minute ».

II.B.— Communication avec les satellites relais

Vis-à-vis de la propagation des ondes électromagnétiques, les premières couches de l'atmosphère peuvent être assimilées au vide. À partir de 80 km d'altitude, dans l'ionosphère, il y a présence d'un gaz ionisé, très dilué, appelé plasma. Le vide et le plasma ont pour permittivité diélectrique ε_0 et pour perméabilité magnétique μ_0 .

II.B.1 Propagation dans le vide

L'onde de communication envoyée depuis la surface de la Terre vers le satellite est supposée plane, progressive selon l'axe (Ox) et harmonique de pulsation ω et de vecteur d'onde $k\vec{u}_x$. En notation complexe, son champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_y$$

où $i^2 = -1$ et E_0 est un nombre qui peut être supposé réel grâce à un choix judicieux de l'origine des temps.

□—16. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide et établir l'équation de propagation du champ électrique dans le vide, en l'absence de charge et de courant.

□—17. Établir la relation de dispersion de l'onde de champ électrique complexe $\vec{E}(M, t)$ dans le vide. Le vide est-il un milieu dispersif ?

□—18. Déterminer, en notation complexe, le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ associé au champ électrique $\vec{E}(M, t)$.

II.B.2 Propagation dans le plasma

L'onde de communication doit ensuite traverser l'ionosphère. Le plasma ionosphérique se caractérise par une densité volumique d'électrons libres n_e de charge, de masse m_e , et une densité volumique de cations $n_c = n_e$ de charge, de masse m_c ; l'ensemble est donc localement neutre. L'onde étudiée est maintenant notée

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \exp(i(\omega t - \underline{k}x)) \vec{u}_y$$

où on pose $\underline{k} = k' + ik$. On considère que n_c , n_e , E_0 , ω , k' et k'' sont réels, uniformes et constants. De plus, on s'intéresse uniquement à la situation où $k' \geq 0$ et $k'' \leq 0$.

Dans le plasma, les électrons et les ions sont soumis à la force de LORENTZ due aux champs électrique et magnétique de l'onde. On négligera toute autre action et on supposera, en outre, que les particules possèdent des vitesses très petites devant.

□—19. En admettant que le rapport des amplitudes du champ électrique et du champ magnétique dans le plasma soit assimilable à celui dans le vide, montrer que les effets de la partie magnétique de la force de LORENTZ sont négligeables devant ceux de la partie électrique.

□–20. En admettant que l'accélération d'un électron du plasma soit donnée par $\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t}$, déterminer l'expression du vecteur vitesse complexe $\vec{v}_e$ d'un électron, positionné en M à l'instant, en fonction de m_e , e , ω et $\vec{E}(M, t)$. De la même façon, donner l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}_c$ d'un cation. Que peut-on dire de $\|\vec{v}_c\|$ par rapport à $\|\vec{v}_e\|$?

□–21. Justifier qu'il existe dans le plasma une densité de courant $\vec{J}(M, t)$. En déduire, en utilisant les résultats précédents, que l'expression de la conductivité complexe du plasma notée $\underline{\gamma}$ s'écrit de façon approchée :

$$\underline{\gamma} \simeq -i \frac{n_e e^2}{m_e \omega}.$$

□–22. Calculer la puissance volumique moyenne fournie par le champ électromagnétique aux électrons libres. Commenter.

□–23. Établir l'équation de propagation du champ $\vec{E}(M, t)$ dans le plasma.

□–24. En déduire l'expression de k^2 dans le plasma. Mettre en évidence une pulsation caractéristique, dite pulsation plasma, notée ω_p dont on fournira l'expression en fonction des grandeurs utiles parmi c , e , ϵ_0 , m_e et n_e .

On suppose dans un premier temps $\omega < \omega_p$.

□–25. Expliciter l'expression de k et en déduire les expressions des champs réels $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$. On fera apparaître une épaisseur caractéristique δ_p que l'on définira et que l'on exprimera en fonction de ω , ω_p et c .

□–26. Représenter l'évolution spatiale à un instant quelconque des profils des champs électrique et magnétique de l'onde et décrire leur évolution temporelle.

□–27. Calculer la valeur moyenne du vecteur de POYNTING associé à cette onde. Caractériser l'onde obtenue. On suppose désormais que $\omega > \omega_p$.

□–28. De la même façon que pour le premier cas, expliciter l'expression de k . En déduire les expressions des champs réels $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$, puis établir l'expression de la valeur moyenne du vecteur de POYNTING.

□–29. Déterminer l'expression de la vitesse de phase v_φ ainsi que celle de la vitesse de groupe v_g en fonction de ω_p , ω et c . Tracer v_g et v_φ en fonction de ω . Le milieu est-il dispersif ? Comparer ces vitesses à c et commenter.

En réalité, la densité électronique n_e dans l'ionosphère varie dans le temps et en fonction de l'altitude. La Figure 6 présente son évolution.

□–30. Calculer la valeur numérique de la fréquence minimale que doit posséder l'onde pour atteindre un satellite relais géostationnaire à partir de la surface de la Terre. À quel domaine du spectre électromagnétique appartient cette fréquence ?

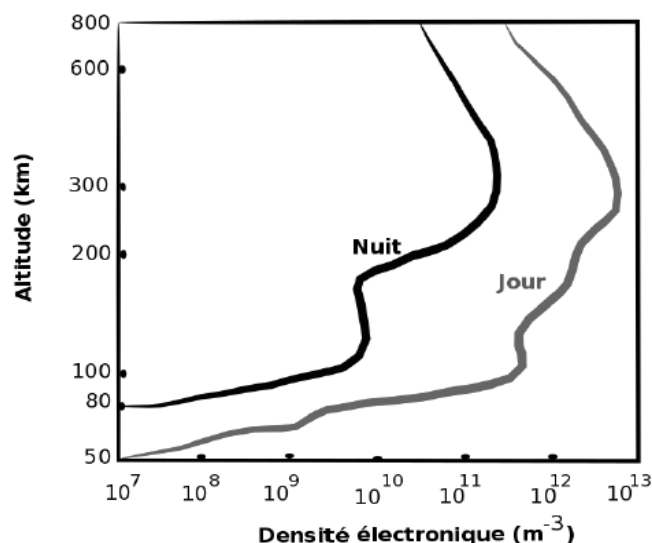


Figure 6: Évolution de la densité électronique dans l'ionosphère en fonction de l'altitude (d'après Culture Sciences-Physique, ENS Lyon)

II.C.— Disposer d'une source d'énergie

Les batteries lithium-ion sont actuellement les plus utilisées pour alimenter en électricité les appareils nomades, notamment grâce à leur importante énergie massique.

II.C.1 L'élément lithium

L'isotope le plus abondant du lithium est le ${}^7_3\text{Li}$.

□—31. Donner la configuration électronique de l'élément lithium dans l'état fondamental. À quelle famille appartient-il ?

□—32. Justifier le caractère réducteur du lithium. Quel ion le lithium peut-il former le plus facilement ?

II.C.2 Obtention du lithium

Le lithium peut être extrait à partir de différentes espèces minérales. L'une d'elles, le spodumène, est broyée dans un broyeur à boulets dans lequel est ajouté de l'acide sulfurique en excès. Cette lixiviation avec de l'eau permet de libérer le lithium en solution. Les impuretés sont précipitées par neutralisation à la chaux, puis le lithium est précipité par du carbonate de sodium Na_2CO_3 à l'état de carbonate de lithium. Le sodium appartient à la même famille que le lithium.

Le carbonate de lithium Li_2CO_3 est un composé peu soluble dans l'eau. Sa solubilité est égale à $13,1 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ à 20°C et vaut $7,2 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ à 100°C .

Le composé purifié est alors transformé en chlorure par réaction avec l'acide chlorhydrique, puis le lithium métal est obtenu par électrolyse.

□—33. Écrire l'équation de la réaction (R) de dissolution du carbonate de lithium.

□—34. Calculer la valeur de l'enthalpie standard de réaction associée à la réaction (R). Commenter son signe.

II.C.3 Accumulateur lithium-ion

Un accumulateur lithium-ion fonctionne par l'échange réversible d'ions lithium entre une électrode négative et une électrode positive (Figure 7).

Au pôle $\ominus$ de l'accumulateur, les atomes de lithium sont insérés dans une structure carbonée de type graphite, que l'on peut noter $C_{6(s)}$. En effet, lors de la charge, les ions lithium sont réduits et les atomes de lithium s'insèrent dans la structure de type graphite. La formule chimique du composé d'insertion obtenu est LiC_6 . À l'inverse, lors de la décharge, les atomes de lithium sont oxydés et les ions lithium se « désinsèrent » ; chaque atome de lithium peut alors libérer un électron.

□—35. Écrire la demi-équation électronique de réduction des ions, la réaction d'insertion des atomes de lithium dans le graphite, puis en déduire la demi-équation électronique bilan modélisant l'ensemble de ces phénomènes pendant la charge.

□—36. Déterminer le nombre maximum d'atomes de lithium qui peuvent être insérés dans 1 g de carbone solide. En déduire la charge électrique maximale que peut délivrer l'électrode de graphite lors de la décharge en A · h, par kilogramme de graphite.

Le pôle $\oplus$ est constitué d'une source de lithium métallique, comme le dioxyde de cobalt et de lithium, de formule brute $LiCoO_2$.

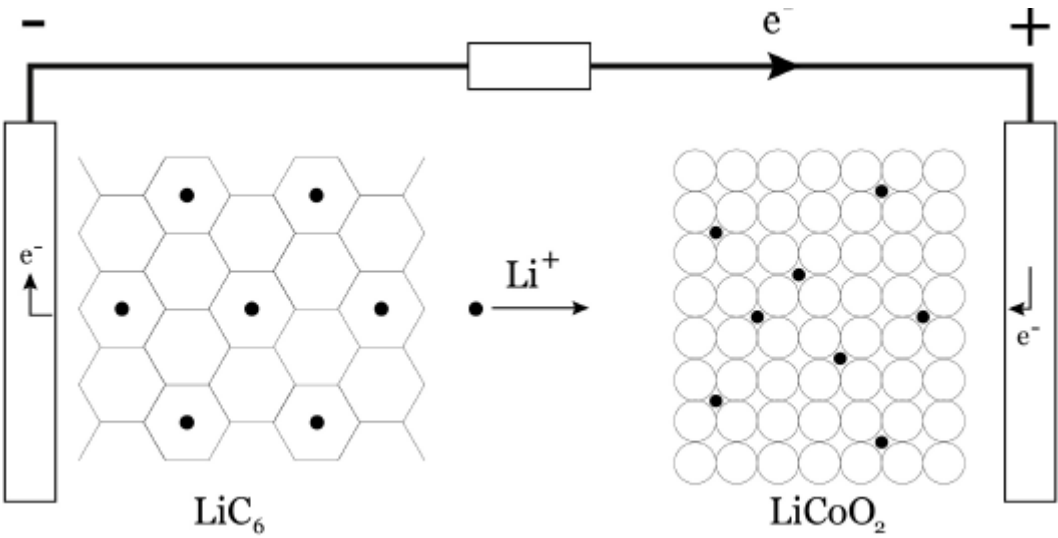


Figure 7: Schéma de fonctionnement de la pile lithium-ion lors de la décharge

□—37. Les espèces $LiCoO_2$ et CoO_2 forment un couple rédox. Identifier l'oxydant et le réducteur dans ce couple sachant que le nombre d'oxydation dans l'espèce $LiCoO_2$ est égal à la charge de l'ion monoatomique stable qu'il forme. En déduire la demi-équation électronique qui se produit lors de la charge au niveau de l'électrode contenant du cobalt.

□—38. Écrire l'équation bilan du fonctionnement de l'accumulateur lors de la décharge et lors de la charge. Plusieurs batteries sont associées en série pour obtenir la tension souhaitée. Par analogie avec d'autres satellites sur des orbites d'altitudes similaires, on peut prévoir que le générateur solaire du satellite se trouvera dans l'ombre de la Terre à chaque révolution pendant une durée d'environ 35 min et éclairé durant 65 min.

□—39. Déterminer la masse minimale de graphite nécessaire pour faire fonctionner une des batteries de sorte qu'elle débite un courant de 10 A lorsque le satellite est dans l'ombre.

Données

Conductivité thermique du silicium

$$\lambda_{Si} = 148 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Conductivité thermique de l'aluminium	$\lambda_{Al} = 37 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Conductivité thermique de l'acier	$\lambda_{acier} = 50 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Coefficient conducto-convectif air-métal (air statique)	$h_s = 30 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Coefficient conducto-convectif air-métal (air renouvelé)	$h_r = 300 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Prix du kW · h	0,17€
Constante des gaz parfaits	$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante de la gravitation universelle	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Masse de la Terre	$M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Rayon moyen de la Terre	$R_T = 6,40 \times 10^6 \text{ m}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1,057 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton	$m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Faraday	$\mathcal{F} = 9,65 \times 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire atomique du lithium	$M_{Li} = 6,94 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire atomique du carbone	$M_C = 12,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire atomique de l'azote	$M_N = 14,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire atomique de l'oxygène	$M_O = 16,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Formulaire

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a}$$

Soit deux fonctions sinusoïdales f et g , scalaires ou vectorielles, de même période et d'écritures complexes respectives $\underline{f}$ et $\underline{g}$. La valeur moyenne de la fonction $f \times g$, le symbole $\times$ signifiant une opération de produit (scalaire ou vectoriel), vérifie la relation

$$\langle f \times g \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{Re}(\underline{f} \times \underline{g}^*)$$

où $\mathcal{Re}$ désigne la partie réelle et $\underline{g}^*$ le conjugué de la fonction complexe.



ÉPREUVE DE PHYSIQUE-CHIMIE1-MP

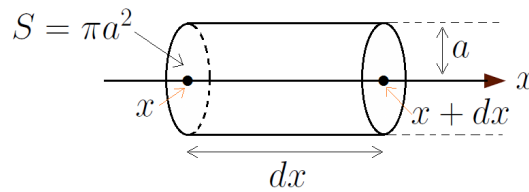
Centres de données

I.— Refroidir les centres de données, quelques solutions techniques contemporaines

I.A.— À l'échelle des composants

□—1. La loi de Fourier: $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$, λ étant la conductivité thermique.

□—2. Bilan de puissance thermique sur une tranche d'ailette de longueur dx de l'ailette.



En régime stationnaire, les apports doivent compenser les pertes:

- La puissance thermique (ou flux) reçue en x est donnée par:

$$j_Q(x) \cdot \pi a^2$$

- La puissance thermique évacuée en $x + dx$ est

$$j_Q(x + dx) \cdot \pi a^2$$

- La puissance thermique évacuée latéralement est:

$$j_{cc}(x) \cdot 2\pi a dx$$

On en déduit que:

$$j_Q(x) \cdot \pi a^2 = j_Q(x + dx) \cdot \pi a^2 + j_{cc}(x) \cdot 2\pi a dx$$

soit:

$$(j_Q(x + dx) - j_Q(x)) \pi a^2 + j_{cc}(x) \cdot 2\pi a dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dj_Q(x)}{dx} + \frac{2}{a} j_{cc}(x) = 0$$

D'autre part:

$$j_Q(x) = -\lambda \frac{dT(x)}{dx} \quad \text{et} \quad j_{cc}(x) = h(T(x) - t_a)$$

Alors:

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} - \frac{2h}{a\lambda}(T(x) - T_a) = 0$$

soit:

$$\boxed{\frac{d^2T(x)}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2}T(x) = -\frac{1}{\delta^2}T_a} \quad (I-1)$$

Avec $\delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$

□—3. D'après l'équation (I-1) : $[\delta] = [L]$

D'autre part:

$$[\delta] = \left(\frac{[\lambda][a]}{[h]} \right)^{1/2}$$

- Loi de Fourier: $[j_Q] = [\lambda] \frac{[\theta]}{[L]}$, θ : température.
- Loi de Newton: $[j_{cc}] = [h][\theta]$

Par conséquent: $\frac{[\lambda]}{[h]} = [L]$

Soit $[\delta] = ([L]^{1/2})^2 = [L]$, d'où l'homogénéité de l'expression.

Application numérique:

$$\delta = \sqrt{\frac{\lambda_{Si} a}{2h_r}} = \sqrt{\frac{148.10^{-3}}{2.300}} = 15,70mm$$

□—4. Conditions aux limites

- Continuité de la température en $x = 0$:

$$T(0^-) = T(0^+), \quad \text{soit} \quad \boxed{T_a = T(0^+)}$$

- Continuité de flux thermique en $x = b$:

$$j_Q(x = b^-) = j_Q(x = b^+), \quad \text{alors} \quad \boxed{-\lambda \frac{dT(x)}{dx} \Big|_{x=b} = -h(T_b - T_a)}$$

□—5. La solution de l'équation (I-1)s'écrit :

$$T(x) = T_a + Ae^{\frac{x}{\delta}} + Be^{-\frac{x}{\delta}}$$

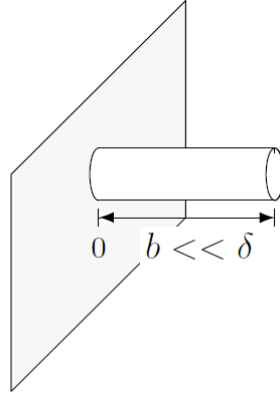
Dans le cas ou $b \gg \delta \Rightarrow A = 0$, si non $T(x)$ pour $x = 0$

Par conséquent: $T(x) = T_a + Be^{-\frac{x}{\delta}}$

Or $T(x=0) = T_d \Rightarrow B = T_d - T_a$, alors : $\boxed{T(x) = T_a + (T_d - T_a)e^{-\frac{x}{\delta}}}$

ou encore $\frac{T(x) - T_a}{T_d - T_a} = e^{-\frac{x}{\delta}}$: Ce qui est cohérent avec la courbe de la figure 2 (cas de $\frac{b}{\delta} = 10$).

□—6. Pour $b \ll \delta$:



L'ailette ne fait pas son rôle, la surface de contact avec l'air se réduit pratiquement à sa section, par conséquent $R_{th} = Cte \forall$ le matériau utilisé. On lit $R_{th} = 1050 kW^{-1}$

$$R_{th} = \frac{T_d - T_a}{P}, \text{ avec } P = h(T_d - T_a)\pi a^2$$

soit

$$\boxed{R_{th} = \frac{1}{\pi a^2 h_r}}, \quad \text{AN: } R_{th} = 1061 kW^{-1}$$

□—7. Pour $b \gg \delta$: $T(x) = T_a(T_d - T_a)e^{-\frac{x}{\delta}}$

$dP = h(T(x) - T_a)2\pi a dx$: La puissance thermique évacuée par l'élément situé en x et $x + dx$
Par conséquent:

$$P = 2\pi a h \int_0^b e^{-\frac{x}{\delta}} dx \cdot (T_d - T_a)$$

$$\Rightarrow P = -2\pi a h \delta (T_d - T_a) \left(e^{-\frac{b}{\delta}} - 1 \right)$$

Comme $b \gg \delta$, $\boxed{P = 2\pi a h \delta (T_d - T_a)}$
alors:

$$R_{th} = \frac{1}{2\pi a h \delta} = \frac{1}{\pi \sqrt{a^3} \cdot 2h\lambda} \simeq 33,7 kW^{-1}$$

Remarques:

- R_{th} dépend de λ , donc dépend de du métal utilisé.
- Un bon conducteur thermique : $\lambda \nearrow \Rightarrow R_{th} \searrow$
- Application numérique: $R_{th_{Si}} = 33,7 kW^{-1}$

D'après la figure 3: $R_{th_{Si}} = 35 kW^{-1}$

□—8.

- $R_{th_{A\ell}}$ est la plus faible, donc une meilleur évacuation de la chaleur vers l'extérieur.
- Le flux thermique sortant se devise sur les N ailettes utilisées, par conséquent le montage (l'installation) est en parallèle:

$$\frac{1}{R_{th_{\text{éq}}}} = \sum \left(\frac{1}{R_{th_i}} \right) = \frac{N}{R_{th}} \quad (\text{Ailettes identiques})$$

soit

$$R_{th_{\text{éq}}} = \frac{R_{th}}{N}$$

par conséquent: $\frac{1}{R_{th_{\text{éq}}}} = \frac{T_d - T_a}{P} = \frac{R_{th}}{N}$

soit: $\boxed{N = \frac{P}{T_d - T_a} R_{th}}$, AN: $N = 72$

I.B.— À l'échelle des locaux

□—9. $COP = \frac{E_{\text{thermique}}}{E_{\text{électrique}}} \quad E_{le} = \frac{100}{3} = 33,3 kWh \text{ (chaque jour)}$

- La consommation annuelle:

$$E_{\text{éle},a} = 33,3 \times 365j = 33,3 \times 365 \times 24h \Rightarrow E_{le,a} = 291970,8 kWh$$

- Prix annuel = $291970,8 \times 0,17 \text{ e} = 49635 \text{ e}$

□—10. L'air est assimilé à un gaz parfait :

$$PV = nRT = \frac{m}{M_{air}} RT \quad \Rightarrow \quad \rho_{air} = \frac{m}{V} = \frac{PM_{air}}{RT}$$

Avec:

$$\begin{aligned} P &= 1atm \simeq 10^5 Pa \\ M_{air} &= 2M(N) \cdot \frac{4}{5} + 2M(O) \cdot \frac{1}{5} = 29 \cdot 10^{-3} kg \cdot mol^{-3} \\ T_{max} &\simeq 37^{\circ}C = 310K \end{aligned}$$

$$\rho_{air} = 1,2 kg \cdot m^{-3}$$

$$D_m = \rho_{air} \cdot D_v, \quad \text{AN : } D_m = 929,6 kg \cdot h^{-1}$$

□—11.

II.— Délocaliser les centres de données, une solution d'avenir ?

II.A.— De la difficulté d'une communication directe

□—12. PFD: $m_s \vec{a} = -\frac{Gm_s M_T}{(R_T + R)^2} \vec{e}_r = -\frac{Gm_s M_T}{r^2} \vec{e}_r$

avec: $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + r\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$ et $r = R_T + h = Cte$

$$\Rightarrow \begin{cases} -r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM_T}{r^2} \\ r\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

Soit $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = Cte$, ainsi la mouvement est uniforme.

□-13. D'après Q12, $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + R}}$

□-14. AN:

$$\begin{aligned} v_0 &= 7515,45 m.s^{-1} \\ T_0 &= \frac{2\pi r}{v_0} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_T}} = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM_T}} \\ &= 1,6h \end{aligned}$$

□-15.

II.B.— Communication avec les satellites relais

II.B.1 Propagation dans le vide

□-16.

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{M-G}), & \text{div } \vec{B} &= 0 \quad (\text{M-T}) \\ \vec{r} \partial_t \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{M-F}), & \vec{r} \partial_t \vec{B} &= \mu_0 (\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}) \quad (\text{M-A}) \\ \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \vec{0}, \text{ avec } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}, \vec{j} = \vec{0}, \rho = 0 \end{aligned}$$

En effet

$$\vec{r} \partial_t (\vec{r} \partial_t \vec{E}) = g \vec{r} \partial_t (\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

Or $\text{div } \vec{E} = 0$ (M-G) $\Rightarrow \vec{r} \partial_t (\vec{r} \partial_t \vec{E}) = \Delta \vec{E}$

et (M-F), puis M-A $\Rightarrow \vec{r} \partial_t (\vec{r} \partial_t \vec{E}) = \vec{r} \partial_t \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{r} \partial_t \vec{B}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Soit

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

□-17. $\Delta \vec{E} = -K^2 \vec{E}$ et $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$

alors $\boxed{K = \frac{\omega}{c}}$: la relation $K = f(\omega)$ est linéaire, ainsi le vide est un milieu non dispersif.

□-18. M-F: $\vec{r} \partial_t \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} = -i\omega \vec{B}$

Soit $\vec{B} = \frac{\vec{K} \wedge \vec{E}}{\omega}$ (Relation de structure) $\Rightarrow \vec{B} = \frac{E_0}{c} \exp i(\omega t - Kx) \vec{u}_z$

II.B.2 Propagation dans le plasma

□-19. $\frac{\|\vec{F}_m\|}{\|\vec{F}_e\|} = \frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \leq \frac{vB}{E} = \frac{v}{c} \ll 1$, par conséquent $\|\vec{F}_m\| \ll \|\vec{F}_e\|$

□-20. PFD appliqué à l'électron ($m_e, \vec{v}_e$)

$$m_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -e \vec{E} \Rightarrow \text{uad} m_e i\omega \vec{v}_e = -e \vec{E}$$

alors:

$$\vec{v}_e = \frac{+ie \vec{E}}{m_e \omega}$$

De même

$$\vec{v}_c = \frac{-ie \vec{E}}{m_c \omega}$$

$\frac{\|\vec{v}_c\|}{\|\vec{v}_e\|} = \frac{m_e}{m_c} \ll 1 \Rightarrow \|\vec{v}_c\| \ll \|\vec{v}_e\|$, ainsi la mobilité des cations est beaucoup plus faible que celle des électrons.

□-21. Le mouvement des porteurs de charges, essentiellement les électrons génère, un courant de densité :

$$\vec{j} = n_e(-e) \vec{v}_e = -i \frac{n_e e^2}{m_e \omega} \vec{E}$$

d'autre part $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

D'où :

$$\gamma = -i \frac{n_e e^2}{m_e \omega}$$

□-22. $\langle P \rangle = \frac{1}{2} \text{Réal}(\vec{j} \cdot \vec{E}^*) = \frac{E_0^2}{2} e^{2K''x} \text{Réal}(\gamma)$, γ étant imaginaire pure, donc $\langle P \rangle = 0$

Le plasma peut être un milieu transparent

□-23. Même démarche que pour la question □-16. avec $\vec{j} \neq 0$ et on obtient:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

□-24. $\Delta = -\underline{k}^2$, $\frac{\partial}{\partial t^2} = i\omega$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2$, On trouve:

$$\underline{k}^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2)$$

avec: $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}}$

□-25. $\omega < \omega_p$: Dans ce cas $\underline{k}$ est imaginaire pure, soit $\underline{k} = ik''$, avec $k'' < 0$

alors $\underline{k} = -\frac{i}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$, soit $\underline{k} = \frac{-i}{\delta}$, avec $\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$. ($\omega < \omega_p$), δ : épaisseur de peau.

Dans ce cas:

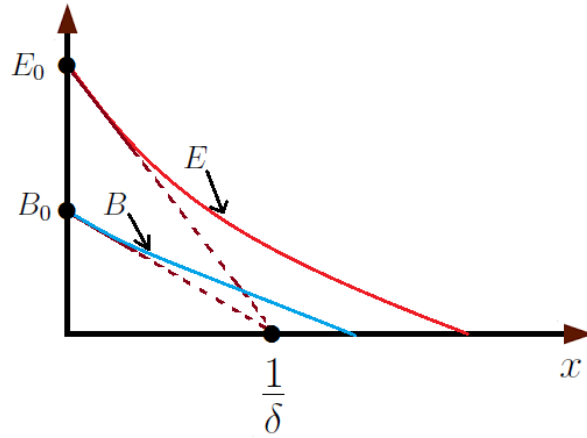
$$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{\frac{-x}{\delta}} e^{i\omega t} \vec{u}_y$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} = i \frac{k''}{\omega} e^{\frac{-x}{\delta}} e^{i\omega t} \vec{u}_z$$

En notation réelle:

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 e^{\frac{-x}{\delta}} \cos(\omega t) \vec{u}_y \\ \vec{B} = B_0 e^{\frac{-x}{\delta}} \sin(\omega t) \vec{u}_z, B_0 = \frac{E_0}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} \end{cases}$$

□-26.



L'évolution temporelle est sinusoïdal

□-27.

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} \cos(\omega t) \sin(\omega t) e^{\frac{-x}{\delta}} \vec{u}_x$$

$\langle \vec{\pi} \rangle = 0$: l'onde évanescence ne transporte aucune énergie dans le plasma.

□-28. $\omega > \omega_p$; $\underline{k}^2$ réel alors $k = k'$.

avec $k' \geq 0$ (l'énoncé). $k = \frac{1}{c} (\omega^2 - \omega_p^2)^{\frac{1}{2}}$

Soit $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

alors:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_0 \exp i\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right) \vec{u}_y \\ \vec{B} &= \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k'}{\omega} E_0 \exp i\left(\omega t - k'x\right) \vec{u}_z \\ \vec{B} &= \frac{E_0}{c} \left(\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right) \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right) \vec{u}_z\end{aligned}$$

Vecteur de POYNTING. $\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \cdot \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right) \vec{u}_x$

Valeur moyenne: $\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2 \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \cdot \vec{u}_x$

□—29.

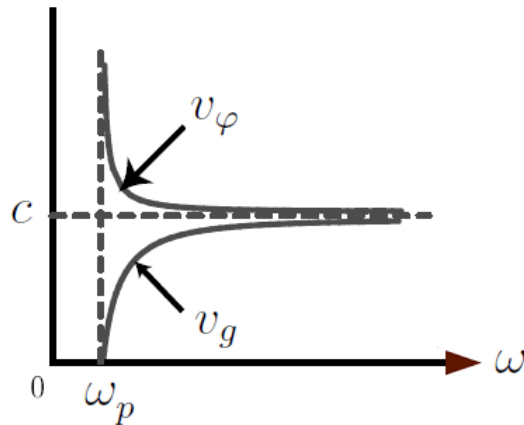
$$\begin{aligned}v_\varphi &= \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \\ v_g &= \frac{d\omega}{dk}, \quad k^2 = \frac{1}{c^2}(\omega^2 - \omega_p^2) \Rightarrow 2kdk = \frac{2}{c^2}\omega d\omega\end{aligned}$$

alors: $v_\varphi \cdot v_g = c^2$.

$$v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

$v_g = f(\omega) / k = f(\omega)$ n'est pas linéaire $\Rightarrow$ le milieu (plasma) est dispersif.

- $v_\varphi > c$: n'est pas contradictoire, car cette vitesse ne représente ni vitesse de propagation de l'énergie ni vitesse de propagation de la matière.
- $v_g < c$: v_g représente la vitesse de propagation de l'énergie.



□—30. L'onde émise depuis la terre atteint le satellite si:

$$\omega > \omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}}$$

Le satellite est géostationnaire, alors sa période de révolution $T = 24h \Rightarrow h = 36000km$

en effet : $r = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \simeq 42300 km \simeq 6,6 R_T$

$\Rightarrow h = r - R_T = 36000 km$

d'autre part pour $h \simeq 3600 km$

$$\begin{cases} n_{e,jour} = 10^{12,5} = n_{e,max} \\ n_{e,nuit} = 10^{11,2} \end{cases}$$

$\rightarrow f > f_{min} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{n_{e,max} e^2}{m_e \epsilon_0}} \simeq 20,3 MHz$

Soit $\lambda = \frac{c}{f_{min}} = 14,8 m$ (onde radio)

II.C.— Disposer d'une source d'énergie

II.C.1 L'élément lithium

□—31. $Z(Li) = 3: 1s^2 2s^1 \Rightarrow$ Le Li appartient à la famille des alcalins.

□—32. Li possède un seul électron dans la couche de valence, donc il est facile de le perdre pour avoir la configuration du gaz rare le plus proche, c'est $He(1s^2)$. Ce qui justifier le caractère réducteur de Li , et formation de l'ion Li^+ .

II.C.2 Obtention du lithium

□—33. L'équation de la réaction (R): $Li_2CO_3 \rightleftharpoons 2Li^+ + CO_3^{2-}$

□—34.

- A $t = 20^0 C$: $K_s = (2s)^2 s = 4s^3$,
- A $t = 100^0 C$: $K'_s = (2s')^2 s' = 4s'^3$,

D'après la loi de VAN'T HOFF :

$$\frac{d \ln(K_{sT}^0)}{dt} = \frac{\Delta_r H_T^0}{RT^2}$$

On suppose que $\Delta_r H_T^0 = Cte$ (Approximation d'ELLINGHAMM)

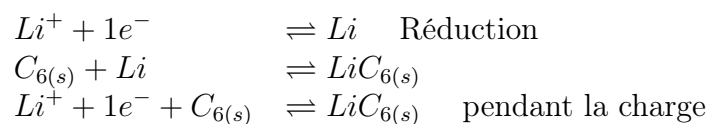
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{K_s^0(T)}{K_s^0(T')}\right) = -\frac{\Delta_r H^0}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'}\right) = 3 \ln \frac{s}{s'}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_r H^0 = -20,4 KJ.mol^{-1}}$$

Alors $\Delta_r H^0 < 0$ en accord avec les résultats expérimentaux, l'augmentation de la température, déplace l'équilibre dans le sens endothermique (ici le sens inverse).

II.C.3 Accumulateur lithium-ion

□—35.



□-36. $n = \frac{m}{M_C} = \frac{N(C)}{N_A} \Rightarrow \boxed{N(C) = \frac{mN_A}{M_C}}$

AN: $N(C) = 5.10^{22}$ atomes, donc $\boxed{N(Li) = \frac{N(C)}{6} = 8.10^{21} \text{ atomes}}$

Chaque atomes de lithium libère un électron $\Rightarrow 8.10^{22}$ électrons

$$Q = 3.10^{25} Ah$$

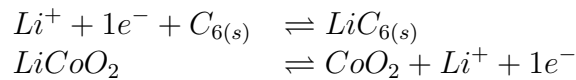
□-37. Couple redox: $LiCoO_2$ et CoO_2

- $LiCoO_2$: $no(Co) = -1 + 2 \times 2 = +III$
- CoO_2 : $no(Co) = +2 \times 2 = +IV$

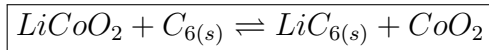
$\Rightarrow CoO_2$ oxydant et $LiCoO_2$ réducteur.



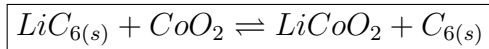
□-38. Lors de la charge



donc



Lors de la décharge



□-39. Rq : $35min + 65min = 1,6h = T$

On a $n(C_6) = n(LiCoO_2) = n(Li) = n(e^-) = \frac{N(e)}{N_A} = \frac{m}{M(C_6)}$

$$I = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{N \cdot e}{\Delta t} \quad N = \frac{I \cdot \Delta t}{e}$$

Donc $\boxed{m(C_{6(s)}) = \frac{I \cdot \Delta t \cdot M(C_6)}{F}}$

AN: $m(C_{6(s)}) = 15,7g$

ÉPREUVE DE PHYSIQUE CHIMIE - PSI

I.— Turbine à gaz

De la vapeur d'eau évolue dans une turbine horizontale, de section constante Σ , munie d'une hélice. À l'extérieur, la température est constante et vaut $T_0 = 35^\circ\text{C}$. La vapeur est admise dans la turbine à la température $T_1 = 400^\circ\text{C}$ et la pression $P_1 = 6,0 \text{ bar}$, et ressort à la température $T_2 = 100^\circ\text{C}$ sous pression $P_2 = 1,0 \text{ bar}$. Le débit massique au travers de la turbine vaut $D_m = 1 \text{ kg.s}^{-1}$. On assimile la vapeur d'eau à un gaz parfait et on note c_P sa chaleur massique.

Données :

- Masse molaire de l'eau : $M_e = 18 \text{ g.mol}^{-1}$
- Coefficient isentropique : $\gamma = \frac{c_P}{c_V} = 1,3$.
- Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- Expression de l'entropie molaire d'un gaz parfait en fonction de la température T et de la pression P :

$$S_m(T, P) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T}{T_1} \right) - R \ln \left(\frac{P}{P_1} \right) + S_m(T_1, P_1)$$

- Expression des deux principes de la thermodynamique pour un fluide en écoulement stationnaire :
- $D_m[(h_s + e_{c,s} + e_{p,s}) - (h_e + e_{c,e} + e_{p,e})] = P_u + P_{th}$;
- $D_m(s_s - s_e) = \frac{P_{th}}{T_0} + s_{créée}$.

avec h l'enthalpie massique, e_c l'énergie cinétique massique et e_p l'énergie potentielle massique du fluide ; P_u la puissance mécanique utile qu'il reçoit et P_{th} la puissance thermique reçue, $s_{créée}$ l'entropie créée par unité de temps et où l'on a noté e les grandeurs en entrée et s celles en sortie.

On néglige les variations d'énergie cinétique.

□—1. Sachant que le but d'une turbine est de récupérer une puissance mécanique, les pertes thermiques sont donc a priori faibles. Exprimer, en fonction de D_m, c_P, T_1 et T_2 , la puissance maximale cédée à la turbine dans l'hypothèse d'un écoulement adiabatique.

□—2. Calculer la variation d'entropie du fluide entre l'entrée et la sortie de la turbine. Justifier que le résultat obtenu est contradictoire avec l'hypothèse d'un écoulement adiabatique.

On suppose que la transformation est réversible dans la turbine.

□—3. Dédurre du second principe de la thermodynamique la puissance P_{th} cédée par la vapeur d'eau à l'extérieur.

□—4. En déduire la puissance P_u cédée à la turbine.

II.— Mesure de la vitesse d'un écoulement

L'objectif de cette partie est d'étudier deux méthodes qui permettent de mesurer la vitesse d'un écoulement et donc son débit volumique.

Données :

- Divergence en coordonnées cylindriques: $\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$.
- $\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

II.A.— Profil de vitesse dans une conduite cylindrique

On étudie l'écoulement dans une conduite cylindrique horizontale de rayon a , de longueur L et d'axe (Oz) orienté par le vecteur unitaire $\vec{e}_z$, (Figure 1).

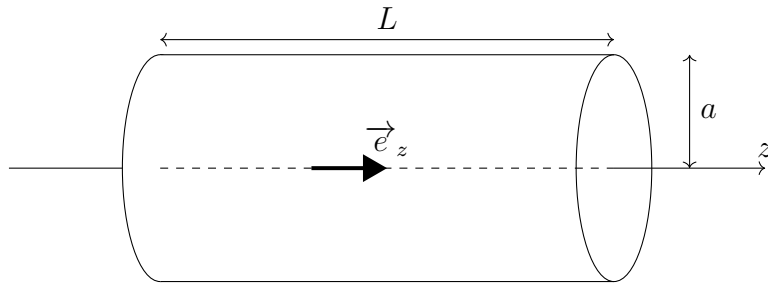


Figure 1: Conduite cylindrique.

On repère un point de l'espace par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) auxquelles on assoie la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

L'écoulement du fluide, de vitesse v , est décrit en première approximation comme l'écoulement d'un fluide visqueux, incompressible et homogène. On note η la viscosité dynamique du fluide, ρ sa masse volumique et D_V le débit volumique. On suppose que l'écoulement du fluide est laminaire en régime permanent et on néglige les effets de la pesanteur.

□—5. Quelle conséquence l'hypothèse de fluide en écoulement incompressible a-t-elle sur la masse volumique du fluide ?

□—6. L'équation locale de conservation de la masse dans le cas d'un fluide quelconque est $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$. Que peut-on en déduire concernant le champ de vitesse pour le fluide incompressible ? Que peut-on dire aussi du débit volumique D_V ?

On rappelle l'expression du nombre de REYNOLDS pour une conduite cylindrique de rayon a :

$$\mathcal{R}_e = \frac{2\rho v_m a}{\eta}$$

où v_m est la vitesse moyenne de l'écoulement dans une section droite.

□—7. Exprimer l'unité de η en fonction du mètre, du kilogramme et de la seconde.

□—8. Expliquer ce que signifient écoulement laminaire et écoulement turbulent.

On suppose que les champs des vitesses et pressions présentent une invariance par rotation autour de l'axe de la conduite : $\vec{v} = v(r, z) \vec{e}_z$ et $P = P(r, z)$.

□—9. Justifier que l'on peut chercher un profil de vitesse sous la forme $\vec{v} = v(r) \vec{e}_z$

□—10. Justifier qu'une particule fluide est animée d'un mouvement rectiligne uniforme.

□—11. Exprimer la résultante des forces pressantes $d\vec{F}_p$ qui s'exercent sur la particule fluide.

□—12. Exprimer la résultante des forces de viscosité $d\vec{F}_\eta = dF_\eta \vec{e}_z$ qui s'exercent sur la particule fluide en fonction de η , r , $\frac{dv}{dr}$ et dz .

□—13. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer que :

$$\frac{dP}{dz} = \frac{2\eta}{r} \frac{dv(r)}{dr}.$$

□—14. En déduire que la pression ne dépend pas de r et que c'est une fonction affine et décroissante. Exprimer la pression $P(z)$ en fonction des deux valeurs aux extrémités du tuyau, $\Delta P = P(z=0) - P(z=L)$.

□—15. Justifier la condition aux limites que doit respecter le champ des vitesses, $v(r=a) = 0$.

□—16. Montrer que le profil de vitesse dans le tronçon cylindrique de l'artère a ainsi pour expression :

$$\vec{v} = v_0 \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) \vec{e}_z$$

Donner l'expression de v_0 .

□—17. Représenter graphiquement le profil du champ des vitesses. Commenter.

□—18. Montrer que le débit volumique du fluide est donné par l'expression :

$$D_V = \varepsilon \frac{a^4}{L\eta} \Delta P$$

ε étant un coefficient numérique dont on donnera la valeur.

□—19. En déduire la vitesse moyenne v_m du fluide.

□—20. Application numérique : Le fluide est du sang dans une grosse artère avec $\rho = 1,05 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $\eta = 3 \cdot 10^{-3} \text{ (SI)}$, $a = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $L = 1,2 \cdot 10^{-1} \text{ m}$ et $\Delta P = 7,5 \text{ Pa}$. Calculer v_m et $\mathcal{R}_e$. Comparer à la valeur critique de $\mathcal{R}_e$ de l'ordre de 1000 et conclure quant à la nature de l'écoulement, laminaire ou turbulent.

II.B.— Vélométrie laser

La vélocimétrie laser est une technique optique qui consiste à croiser deux faisceaux laser cohérents, faisant entre eux un angle de $2\alpha (\alpha \ll 1)$ afin de mesurer la vitesse locale d'un fluide qui s'écoule selon l'axe Oz dans un tuyau transparent (Figure 2).

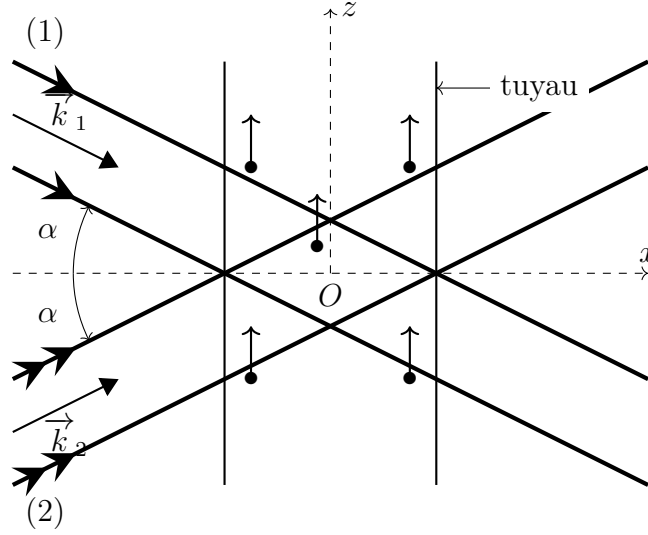


Figure 2: Principe de la (appelées traceurs). En passant vélocimétrie laser.

L'écoulement du fluide est ensemencé par des particules fines solides réfléchissantes (appelées traceurs). En passant alternativement dans les franges brillantes et sombres qui résultent des interférences des deux faisceaux (1) et (2), les traceurs réfléchissent la lumière. Ils diffusent une intensité lumineuse proportionnelle à l'éclairement de leur surface. La lumière diffusée présente un clignotement régulier et est détectée par un photodétecteur qui la convertit en signal électrique.

Les traceurs sont emportés par l'écoulement stationnaire et on pourra assimiler leur vitesse à celle du fluide.

On ne considère pour l'instant qu'une seule particule.

Les deux faisceaux laser cylindriques, de même intensité, de même état de polarisation et de même diamètre, sont issus d'un laser de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 514,5 \text{ nm}$. Leurs directions forment un angle $2\alpha = 20^\circ$. Le plan médiateur des deux faisceaux est réglé pour être exactement perpendiculaire à la direction de l'écoulement. Les amplitudes instantanées au point M des ondes correspondant aux deux faisceaux, supposées planes et de vecteurs d'onde $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ ($\|\vec{k}_1\| = \|\vec{k}_2\| = k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$), s'écrivent respectivement sous la forme :

$$s_1(M, t) = S_0 \cos(\varphi_1(M, t)) \quad \text{et} \quad s_2(M, t) = S_0 \cos(\varphi_2(M, t))$$

avec $\varphi_1(M, t) = \omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{OM} + \varphi_0$ et $\varphi_2(M, t) = \omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{OM} + \varphi_0$, φ_0 étant une constante. Dans un premier temps, on assimile l'indice optique du fluide à celui de l'air, $n_a = 1$.

□—21. À quelle couleur correspond la longueur d'onde $\lambda_0 = 514,5 \text{ nm}$?

□—22. Exprimer les vecteurs d'onde $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ en fonction de k_0 et α , dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$ associée repère (O, x, z) .

□—23. Exprimer l'amplitude de l'onde résultante $s(M, t)$ au point M de la zone de croisement (champ d'interférence) des deux faisceaux en fonction des coordonnées x et z de M , et des autres données.

□—24. L'onde résultante est-elle plane ? Est-elle progressive ? Est-elle stationnaire ? Est-elle monochromatique ?

On définit l'intensité lumineuse $I(M)$ au point M par $I(M) = \langle s^2(M, t) \rangle$, moyenne temporelle de $s^2(M, t)$, et on note $I_{\max}$ l'intensité maximale en M .

- 25. Justifier que l'on observe des interférences dans la zone de croisement des deux faisceaux laser.
- 26. Exprimer le déphasage $\varphi = \varphi_1(M, t) - \varphi_2(M, t)$ entre les deux ondes en un point M du champ d'interférence. Montrer que $I(M)$ se met sous la forme $I(M) = I_{\max} \cos^2 \left(2\pi \frac{z}{\Lambda_0} \right)$. Donner l'expression de Λ_0 .
- 27. Décrire l'aspect des franges d'interférences. Exprimer l'interfrange i_0 en fonction de λ_0 et α .
- 28. Tracer l'allure de $I(M)$ en tenant compte de la largeur des faisceaux incidents.

La Figure 3 donne le signal électrique détecté par un photodétecteur.

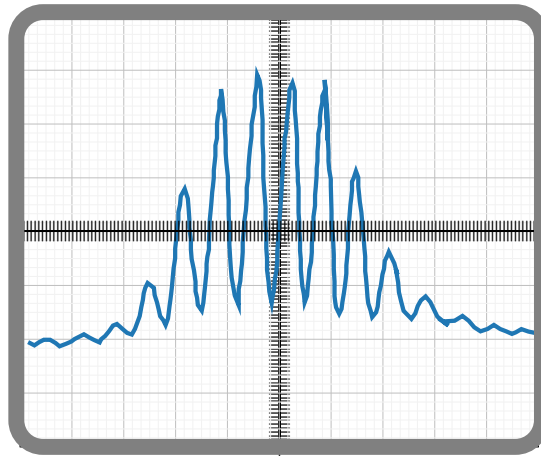


Figure 3: Tension en sortie du photodétecteur (1 V/div) et (1 μ s/div).

- 29. Que vaut la période T du clignotement ?
- 30. Exprimer la vitesse V d'écoulement du fluide en supposant que le traceur suit parfaitement l'écoulement. Calculer sa valeur numérique.

On souhaite connaître l'influence de l'indice du fluide dans le résultat établi. On considère alors le cas réel où l'indice optique du fluide est $n_f \neq n_a = 1$. Chaque rayon lumineux d'un des deux faisceaux incidents, arrive avec un angle d'incidence α par rapport à l'axe (Ox) qui est la normale au dioptre air-fluide. On note α' l'angle de réfraction.

- 31. Écrire la relation entre α et α' .
- 32. Exprimer la longueur d'onde du laser dans le fluide.
- 33. Quelle est la nouvelle expression de l'interfrange i de la Figure d'interférences ? Y a-t-il besoin de connaître l'indice optique du fluide pour pouvoir interpréter l'expérience et déterminer la vitesse d'écoulement ?

Afin de déterminer le sens de l'écoulement du fluide, on place sur le trajet du faisceau laser (1) un dispositif optoélectronique composé d'une lame transparente d'épaisseur e . L'indice de réfraction n_l de cette lame varie en fonction de la tension $u(t)$ qu'on lui applique: $n_l(t) = 1 + au(t)$, avec a une constante positive. On suppose que l'incidence du faisceau laser est normale sur la face d'entrée de

la lame. On assimile de nouveau l'indice optique du fluide à celui de l'air.

□—34. Exprimer le nouveau déphasage $\varphi'(M)$ entre les deux ondes qui interfèrent au point M du champ d'interférence en fonction de $u(t)$, a , e , λ_0 , α et z .

□—35. En déduire la position des franges brillantes.

□—36. On souhaite obtenir des franges d'interférences qui se déplacent à une vitesse constante V_0 dans la direction de l'axe Oz . Quelle est l'expression de la tension $u(t)$ dans ce cas ? Expliquer comment connaître le sens de déplacement.

□—37. On suppose que la particule se déplace dans le sens des z positifs. Comment varie la période du signal délivré par le photodétecteur dans ce cas ?

ÉPREUVE DE PHYSIQUE 1 - PSI

I.— Turbine à gaz

Commentaires à propos de cette première partie :

□—1. Le but d'une turbine est de récupérer une puissance mécanique, les pertes thermiques sont donc a priori faibles ($P_{th} = 0$). La turbine est horizontale, il n'y a donc pas de variation d'énergie potentielle $e_{p,s} - e_{p,e} = 0$. En négligeant de plus les variations d'énergie cinétique (d'après l'énoncé $e_{c,s} - e_{c,e} = 0$), le premier principe appliqué à la turbine donne : $P_u = D_m[h_s - h_e]$ soit d'après la deuxième loi de Joule (gaz parfait) : $h_s - h_e = c_p(T_2 - T_1)$ ce qui donne :

$$\boxed{P_u = D_m c_p (T_2 - T_1)} \quad (26)$$

□—2. L'énoncé demande de calculer la variation d'entropie !. En fait, il s'agit de calculer soit la variation d'entropie massique ou (molaire), car on ne dispose pas de la masse du fluide (ou sa quantité de matière). On calcule ici la variation d'entropie massique entre l'entrée et la sortie de la turbine, on a :

$$\boxed{\Delta s = \frac{R}{M_e} \left[\frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \right]} \quad (27)$$

Application numérique : $\boxed{\Delta s = -3,5 \times 10^2 \text{ J.K}^{-1}\text{kg}^{-1}}$

Remarque : Pour la variation d'entropie molaire entre l'entrée et la sortie de la turbine : $\Delta s_m = M_e \Delta s = R \left[\frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \right]$

D'après le deuxième principe de la thermodynamique (avec $P_{th} = 0$) : $s_{créée} = D_m \Delta s = -3,5 \times 10^2 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} < 0$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse d'un écoulement adiabatique (car l'entropie créée est toujours supérieure ou égale à 0).

□—3. La transformation, dans la turbine, est supposée réversible. Alors, d'après le second principe de la thermodynamique : $P_{th} = T_0 D_m M_e (s_s - s_e)$, soit donc :

$$\boxed{P_{th} = \frac{D_m T_0 R}{M_e} \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \right]} \quad (28)$$

Application numérique : $\boxed{P_{th} = -107 \text{ kW}}$

□—4. En appliquant le premier principe de la thermodynamique, on trouve :

$$\boxed{P_u = \frac{\gamma R D_m}{(\gamma - 1) M_e} (T_2 - T_1) - P_{th}} \quad (29)$$

Application numérique : $\boxed{P_u = -493 \text{ kW}}$

II.— Mesure de la vitesse d'un écoulement

II.A.— Profil de vitesse dans une conduite cylindrique

□—5. Pour un fluide en écoulement incompressible : $\boxed{\frac{D\rho(M,t)}{Dt} = 0}$

□—6.

- pour un fluide incompressible : $\rho = \text{cste}$; ce qui donne $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ et $\text{div}(\rho \vec{v}) = \rho \text{div}(\vec{v})$, soit donc d'après l'équation locale de conservation de la masse : $\boxed{\text{div}(\vec{v}) = 0}$;
- Le débit volumique D_V se conserve : $\boxed{D_V = \text{cste}}$.

□—7. Le nombre de REYNOLDS étant sans dimension, par analyse dimensionnelle; $[\eta] = \underbrace{[\rho]}_{ML^{-3}} \underbrace{[v_m]}_{L.T^{-1}} \underbrace{[a]}_L$, donc : $[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$. On en déduit l'unité de η : $\boxed{\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}}$

□—8.

- **écoulement laminaire** : l'ensemble du fluide s'écoule dans la même direction.
- **écoulement turbulent** : enchevêtrement des lignes de champs.

□—9. L'énoncé propose un champ sous la forme $\vec{v} = v(r, z)\vec{e}_z$. L'écoulement étant incompressible $\Rightarrow \text{div}(\vec{v}) = 0$, ce qui donne, d'après l'expression de la divergence en coordonnées cylindriques, $\frac{\partial v(r, z)}{\partial z} = 0$, ainsi la vitesse ne dépend pas de z , donc on peut chercher un profil de vitesse sous la forme : $\boxed{\vec{v} = v(r)\vec{e}_z}$.

□—10. L'accélération de la particule fluide est : $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v}$, avec :

- $\frac{\partial \vec{v}(r)}{\partial t} = \vec{0}$, régime permanent;
- $\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} = v(r) \frac{\partial v(r)}{\partial z} \vec{e}_z = \vec{0}$;

Ce qui donne : $\boxed{\vec{a} = \vec{0}}$. Donc la particule fluide est animée d'un mouvement rectiligne uniforme (MRU).

□—11. La résultante des forces pressantes :

$$\boxed{d\vec{F}_p = -\overrightarrow{\text{grad}}(p(r, z)) d\tau = -2\pi \left(\frac{\partial p(r, z)}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial p(r, z)}{\partial z} \vec{e}_z \right) r dr dz} \quad (30)$$

□—12. Commentaires :

- **Erreur d'énoncé** : La question demande d'exprimer la résultante des forces de viscosité $d\vec{F}_\eta = dF_\eta \vec{e}_z$ qui s'exercent sur la particule fluide en fonction de η , r , $\frac{dv}{dz}$ et dz . Il faut remplacer $\frac{dv}{dz}$ par $\frac{dv}{dr}$;

- Pour aborder cette question, il manque la donnée du Laplacien en coordonnées cylindriques.
Pour un champ vectoriel $\vec{X} = X(r)\vec{e}_z$, l'expression du Laplacien, en coordonnées cylindriques, est : $\Delta \vec{X} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dX(r)}{dr} \right) \vec{e}_z$.

On a $d\vec{F}_\eta = \eta \Delta \vec{v} d\tau$. Ce qui donne :

$$\boxed{d\vec{F}_\eta = 2\pi \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right) r dr dz \vec{e}_z} \quad (31)$$

□—13. Par application du principe fondamental de la dynamique, On a : $dm \vec{a} = d\vec{F}_p + d\vec{F}_\eta$, comme l'accélération de la particule fluide est nulle, alors $d\vec{F}_p + d\vec{F}_\eta = \vec{0}$.

$$-2\pi \left(\frac{\partial p(r, z)}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial p(r, z)}{\partial z} \vec{e}_z \right) r dr dz + 2\pi \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right) r dr dz \vec{e}_z = \vec{0} \quad (32)$$

On projette l'équation (32) sur $\vec{e}_z$ il vient :

$$\frac{\partial p(r, z)}{\partial z} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right) \quad (33)$$

Pour retrouver l'expression demander, il faut montrer que la pression ne dépend pas de r , c'est l'objet de la question suivante !.

□—14. On projette l'équation (32) sur l'axe $\vec{e}_r$, on trouve :

$$\frac{\partial p(r, z)}{\partial r} = 0 \quad (34)$$

Ce qui signifie que la pression est indépendante de r et il ne dépend que de z . soit :

$$\frac{dp(z)}{dz} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right) \quad (35)$$

D'après l'expression (35), c'est l'égalité entre deux fonctions : l'une ne dépend que de z ($\frac{dp(z)}{dz}$) et l'autre ne dépend que de r ($\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right)$), on déduit que : $\frac{dp(z)}{dz} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right) = \text{cte}_1$

La pression est donc une fonction affine de z , elle est décroissante car $v(r)$ décroît avec r c'est-à-dire $\frac{dp(z)}{dz} = \text{cte}_1 < 0$.

On a montré que $\frac{dp(z)}{dz} = \text{cte}_1$, par intégration $p(z) = \text{cte}_1 z + \text{cte}_2$, on utilise les valeurs de la pression pour $z = 0$ et $z = L$, on trouve que :

$$\boxed{p(z) = p(z = 0) - \frac{\Delta P}{L} z} \quad (36)$$

Où $\Delta P = p(z = 0) - p(z = L)$

□—15. Le fluide est visqueux (fluide réel) les particules adhèrent les obstacles à cause de sa viscosité, d'où : $\boxed{v(r = a) = 0}$.

□—16. D'après les expressions (35) et (36) , on a :

$$\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right) = \frac{dp(z)}{dz} = -\frac{\Delta P}{L}$$

ce qui donne après une première intégration : $r \frac{dv(r)}{dr} = -\frac{\Delta P}{2\eta L} r^2 + C_1$, la vitesse est une fonction continue de r donc sa dérivée $\frac{dv(r)}{dr}$ est finie $\forall r \in [0, a]$, alors pour $r = 0$, on a $0 \times \frac{dv(r)}{dr}|_{r=0} = -\frac{\Delta P}{2\eta L} \times 0 + C_1$, ce qui donne $\boxed{C_1 = 0}$, soit donc : $\frac{dv(r)}{dr} = -\frac{\Delta P}{2\eta L} r$. Une deuxième intégration donne : $v(r) = -\frac{\Delta P}{4\eta L} r^2 + C_2$, On a $v(r = a) = 0$, on déduit que $C_2 = \frac{a^2 \Delta P}{4\eta L}$. Soit finalement :

$$\boxed{\vec{v} = v_0 \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) \vec{e}_z} \quad (37)$$

Avec $v_0 = \frac{a^2 \Delta P}{4\eta L}$.

□—17. Le profil du champ des vitesses est représenté figure (1) :

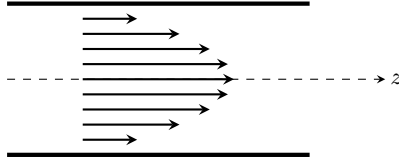


Figure 1: Profil du champ des vitesses.

Commentaires :

- La vitesse est non uniforme sur une section droite perpendiculaire à l'axe (Oz);
- la vitesse est maximale sur l'axe (Oz).

□—18. Par définition, le débit volumique du fluide est donné par l'expression : $D_V = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S}$
On a $d\vec{S} = r dr d\theta \vec{e}_z$, ce qui donne

$$D_V = \frac{a^2 \Delta P}{4\eta L} \int_0^a \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) r dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

Soit finalement :

$$\boxed{D_V = \varepsilon \frac{a^4}{L\eta} \Delta P} \quad (38)$$

Avec : $\boxed{\varepsilon = \frac{\pi}{8}}$.

□—19. Par définition, la vitesse moyenne v_m du fluide est donnée par :

$$v_m = \frac{D_V}{\pi a^2}$$

Ce qui donne :

$$\boxed{v_m = \frac{a^2 \Delta P}{8\eta L}} \quad (39)$$

□–20. **Application numérique** : $v_m = 4,2 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$ et $R_e = 117$
On a : $R_e \ll 1000 \Rightarrow$ écoulement laminaire.

II.B.— Vélodimétrie laser

□–21. La longueur d'onde $\lambda_0 = 514,5 \text{ nm}$ correspond à la couleur verte.

□–22. $\vec{k}_1 = k_0 (\cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_z)$ et $\vec{k}_2 = k_0 (\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_z)$.

□–23. On a : $s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t)$, donc $s(M, t) = S_0 \cos(\varphi_1(M, t)) + S_0 \cos(\varphi_2(M, t))$
 $\Rightarrow s(M, t) = 2S_0 \cos\left(\frac{\varphi_1(M, t) + \varphi_2(M, t)}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1(M, t) - \varphi_2(M, t)}{2}\right)$

Soit finalement :

$$s(M, t) = 2S_0 \cos(\omega t - k_0 x \cos \alpha + \varphi_0) \cos(k_0 z \sin \alpha) \quad (40)$$

On en déduit l'expression de l'amplitude de l'onde résultante : $S(M) = 2S_0 \cos(k_0 z \sin \alpha)$

□–24.

- **Non plane** : l'amplitude n'est pas uniforme à cause de l'existence du terme $\cos(k_0 z \sin \alpha)$;
- **Progressive selon x** : existence du terme $(\omega t - k_0 x \cos \alpha + \varphi_0)$;
- **Non stationnaire** : il y a propagation selon x ;
- **Monochromatique** : une seule fréquence ω .

□–25. Les deux sources sont synchrones et cohérentes donc on observe des interférences dans la zone de croisement des deux faisceaux laser.

□–26. Le déphasage entre les deux ondes en un point M du champ d'interférence est: $\varphi = \varphi_1(M, t) - \varphi_2(M, t) = \omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{OM} + \varphi_0 - (\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{OM} + \varphi_0)$, ce qui donne :

$$\varphi = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{OM}$$

Soit donc :

$$\varphi = 2k_0 z \sin \alpha \quad (41)$$

L'intensité $I(M)$ s'écrit : $I(M) = \langle s^2(M, t) \rangle$, ce qui donne :

$$I(M) = \langle 4S_0^2 \cos^2(\omega t - k_0 x \cos \alpha + \varphi_0) \cos^2(k_0 z \sin \alpha) \rangle = 4S_0^2 \cos^2(k_0 z \sin \alpha) \underbrace{\langle \cos^2(\omega t - k_0 x \cos \alpha + \varphi_0) \rangle}_{=1/2}$$

soit:

$$I(M) = 2S_0^2 \cos^2(k_0 z \sin \alpha)$$

Donc l'intensité peut se mettre sous la forme :

$$I(M) = I_{\max} \cos^2\left(2\pi \frac{z}{\Lambda_0}\right) \quad (42)$$

Avec $\Lambda_0 = \frac{\lambda_0}{\sin \alpha}$.

□—27. On observe des franges (plans) brillantes d'équation $z = \text{cste}$. l'expression de l'interfrange i_0 est :

$$i_0 = \frac{\lambda_0}{2 \sin \alpha} \quad (43)$$

□—28. Soit $2z_m$ la largeur du champ d'interférence à x donné, l'expression de l'intensité lumineuse diffusée par les particules est :

$$I(M) = \begin{cases} I_{\max} \cos^2 \left(2\pi \frac{z}{\Lambda_0} \right) & \text{pour } |z| < z_m \\ 0 & \text{pour } |z| > z_m \end{cases}$$

L'allure de $I(M)$ est donnée figure (2) :

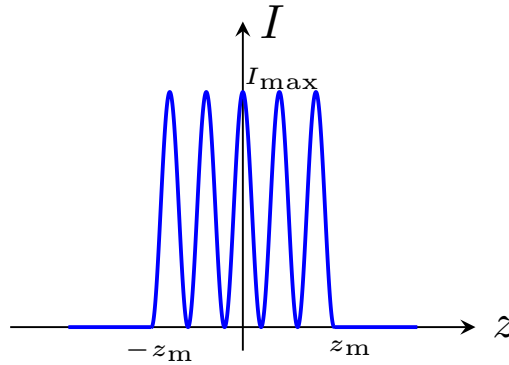


Figure 2:

□—29. $T = 0,67 \mu\text{s}$

□—30. L'expression de la vitesse V d'écoulement du fluide en supposant que le traceur suit parfaitement l'écoulement est : $V = \frac{i_0}{T}$, avec $i_0 = \frac{\lambda_0}{2 \sin \alpha}$ est l'interfrange, donc :

$$V = \frac{\lambda_0}{2T \sin \alpha} \quad (44)$$

Application numérique : $V = 1,91 \text{ m.s}^{-1}$

□—31. Loi de Descartes : $n_a \sin \alpha = n_f \sin \alpha'$ avec $n_a = 1$, donc :

$$\sin \alpha = n_f \sin \alpha' \quad (45)$$

□—32. $\lambda = \frac{\lambda_0}{n_f}$.

□—33. La nouvelle expression de l'interfrange i de la figure d'interférences est : $i = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha'}$.

Ce qui donne $i = \frac{\lambda_0}{n_f} \frac{n_f}{2 \sin \alpha} = \frac{\lambda_0}{2 \sin \alpha} = i_0$, l'interfrange n'est pas modifié, donc il n'y a pas besoin de connaître l'indice optique du fluide pour pouvoir interpréter l'expérience et déterminer la vitesse d'écoulement.

□—34. Le nouveau déphasage $\varphi'(M) = \frac{2\pi\alpha z}{\lambda_0} + \frac{2\pi}{\lambda_0} (1 - n_l) e = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\alpha z - a e u(t))$.

□—35. La position des franges brillantes est obtenue lorsque $\varphi'(M) = 2k\pi$ avec $k \in Z$, ce qui donne :

$$\boxed{z_k = \frac{\lambda_0 k + a e u(t)}{\alpha} ; k \in Z} \quad (46)$$

□—36. On a $V_0 = \frac{dz_k}{dt}$, ce qui conduit à :

$$V_0 = \frac{a e}{\alpha} \frac{du(t)}{dt}$$

$$\boxed{u(t) = \frac{\alpha V_0}{a e} t + \text{cste}} \quad (47)$$

□—37. $T \nearrow$.