

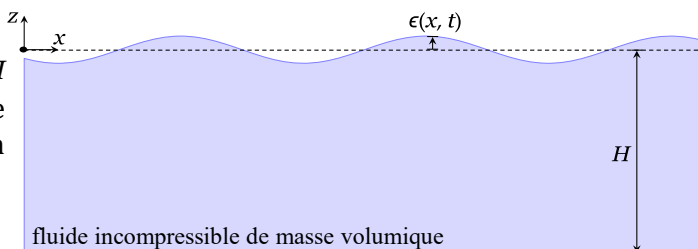


L'accent doit être mis sur la clarté et la précision de la rédaction, ainsi que sur le soin apporté aux calculs et à la présentation.

N'oubliez pas d'indiquer sur la copie le nom de la personne relectrice (code R) ou coautrice (code A).

Ondes de gravitation

On considère un bassin illimité de profondeur H contenant un liquide supposé incompressible (masse volumique ρ). On étudie les ondes dites de gravitation qui peuvent se propager à la surface du liquide.



Onde de gravitation

1 - Dans le cadre des oscillations de « faible amplitude », on admet qu'en tout point du fluide :

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\Phi)$$

(écoulement irrotationnel)

Montrer que le potentiel des vitesses Φ vérifie l'équation de Laplace : $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$ (1)

2 - Toujours dans le cas des « petites oscillations », montrer que l'on a : $\frac{D\vec{v}}{Dt} \simeq \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$

Montrer, à partir de l'équation d'Euler, que l'écoulement obéit à l'équation : $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = C^{\text{te}}$

où p est la pression à la cote z .

On cherche les solutions ondulatoires de (1) sous la forme : $\Phi(x, y, z, t) = f(z)e^{i(\omega t - kx)}$

3 - Montrer que $f(z)$ se met sous la forme : $f(z) = \alpha e^{kz} + \beta e^{-kz}$
avec α et β deux constantes.

4 - A l'aide de la condition limite au fond du bassin, simplifier l'expression de $f(z)$ en ne faisant apparaître qu'une constante.

5 - Au niveau de la surface libre, la pression peut être considérée comme uniforme et égale à p_0 . Notons $z = \epsilon(x, t)$ l'équation de cette surface libre et assimilons v_z à $\frac{\partial \epsilon}{\partial t}$.

Montrer alors que : $\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=\epsilon} = 0$

Ce qui revient à écrire, dans le cadre des petites oscillations : $\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$

6 - Déterminer la relation de dispersion : ω^2 en fonction notamment de k .

Envisager les deux cas suivants :

$$kH \gg 1 \quad (\text{eau profonde}),$$

$$kH \ll 1 \quad (\text{eau peu profonde}).$$

7 - La vitesse de propagation (vitesse de groupe) des ondes de gravitation à la surface de l'eau est donnée par : $V_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$

Exprimer V_g en fonction de la longueur d'onde λ , puis donner sa valeur numérique dans les deux cas suivants :

Pour l'eau profonde ($\lambda = 10 \text{ m}$, $H = 200 \text{ m}$). Commenter.

Pour l'eau peu profonde ($\lambda = 10 \text{ m}$, $H = 10 \text{ cm}$). Commenter.

