



|              |                  |           |               |              |                      |
|--------------|------------------|-----------|---------------|--------------|----------------------|
| Date :       | 23.05.25         | Horaire : | 08:15 - 11:00 | Durée :      | 165 minutes          |
| Discipline : | MATHE -<br>ANALY | Type :    | écrit         | Section(s) : | CC / CC-4LANG / CI   |
|              |                  |           |               |              | Numéro du candidat : |

**Question 1**

**4 + 6 = 10 points**

1) Soit  $\log_a x = y$  et  $\log_b x = y$ . On en déduit que  $x = a^y$  et que  $x = b^y$ .

Mais alors :  $\log_b x = \log_b a^y = y \log_b a = \log_a x \cdot \log_b a$

D'où :  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Cas particuliers :

- En posant  $x = b$ , on obtient :  $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$
- En posant  $b = 10$ , on obtient :  $\log_a x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} a} = \frac{\log x}{\log a}$
- En posant  $b = e$ , on obtient :  $\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \frac{\ln x}{\ln a}$

$$2) (I) \log_{\sqrt{3}}(\sqrt{x^2 + 2x + 5}) \geq \log_3(x + 3) - \log_3(3 - x)$$

C.E. : (1)  $x^2 + 2x + 5 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$   $[\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0 \text{ pas de racine}]$

(2)  $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$  (3)  $3 - x > 0 \Leftrightarrow x < 3$  donc  $\text{dom}(I) = ]-3; 3[$ .

$$\begin{aligned} \forall x \in ]-3; 3[ \quad (I) &\Leftrightarrow \frac{\log_3(\sqrt{x^2 + 2x + 5})}{\log_3 \sqrt{3}} \geq \log_3(x + 3) - \frac{\log_3(3 - x)}{\log_3 \frac{1}{3}} \\ &\Leftrightarrow \frac{\log_3(\sqrt{x^2 + 2x + 5})}{\frac{1}{2} \log_3 3} \geq \log_3(x + 3) - \frac{\log_3(3 - x)}{-\log_3 3} \\ &\Leftrightarrow 2 \log_3(\sqrt{x^2 + 2x + 5}) \geq \log_3(x + 3) + \log_3(3 - x) \\ &\Leftrightarrow \log_3 \left[ (\sqrt{x^2 + 2x + 5})^2 \right] \geq \log_3[(x + 3)(3 - x)] \\ &\Leftrightarrow \log_3(x^2 + 2x + 5) \geq \log_3(9 - x^2) \\ \log_3 \text{ bij. } \nearrow &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 5 \geq 9 - x^2 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + x - 2 \geq 0 \end{aligned}$$

T.D.S. de  $x^2 + x - 2$  :

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 = 3^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 \quad x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

| $x$           | $-\infty$ | $-2$ | $1$ | $+\infty$ |   |
|---------------|-----------|------|-----|-----------|---|
| $x^2 + x - 2$ | +         | 0    | -   | 0         | + |

$$S = ]-3; -2] \cup [1; 3[$$

**Question 2****4+4+4+2+3+3=20 points**

1)  $f(x) = \frac{2}{x} \cdot \ln x^2$

C.E. : (1)  $x \neq 0$

(2)  $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

$\text{dom} f = \mathbb{R}^* = \text{dom} f' = \text{dom} f''$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{2}{x}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\ln x^2}_{\rightarrow +\infty} \quad f.i. "0 \cdot \infty"$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2}{\frac{x}{2}} \quad f.i. " \frac{\infty}{\infty } "$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\frac{x^2}{1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x}$$

$$= 0$$

Par un raisonnement similaire, on obtient :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  $\mathcal{C}_f$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{2}{x}}_{\rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{\ln x^2}_{\rightarrow -\infty} = -\infty$$

Par un raisonnement similaire, on obtient :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$  $\mathcal{C}_f$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = 0$ .

2)  $\forall x \in \mathbb{R}^*$  :

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} \cdot \ln x^2 + \frac{2}{x} \cdot \frac{2x}{x^2} = -\frac{2}{x^2} \cdot \ln x^2 + \frac{4}{x^2} = \frac{4 - 2 \ln x^2}{x^2} = \frac{2(2 - \ln x^2)}{x^2}$$

D'où

$$f'(x) = \frac{2}{x^2} \cdot (2 - \ln x^2) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^*)$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{2}{x^2} > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $2 - \ln x^2$ .

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x^2 = 2$$

exp. bij.

$$\Leftrightarrow x^2 = e^2$$

$$\Leftrightarrow x = \underbrace{-e}_{\approx -2,72} \vee x = \underbrace{e}_{\approx 2,72}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x^2 < 2$$

exp. bij. ↗

$$\Leftrightarrow x^2 < e^2$$

$$\Leftrightarrow -e < x < e$$

Tableau de variation de  $f$ :

| $x$     | $-\infty$ | $-e$                  | $0$       | $e$       | $+\infty$            |     |
|---------|-----------|-----------------------|-----------|-----------|----------------------|-----|
| $f'(x)$ | $-$       | $0$                   | $+$       | $+$       | $0$                  | $-$ |
| $f$     | $0$       | $-\frac{4}{e}$<br>min | $+\infty$ | $-\infty$ | $\frac{4}{e}$<br>Max | $0$ |

$$f(-e) = \frac{2}{-e} \cdot \ln(-e)^2 = -\frac{2}{e} \cdot \ln e^2 = -\frac{2}{e} \cdot 2 = -\frac{4}{e} \approx -1,47 \quad f(e) = \frac{2}{e} \cdot \ln e^2 = \frac{2}{e} \cdot 2 = \frac{4}{e} \approx 1,47$$

$f$  admet un minimum en  $-e$  qui vaut  $-\frac{4}{e}$  et un maximum en  $e$  qui vaut  $\frac{4}{e}$ .

$C_f$  admet une tangente horizontale aux points  $A\left(-e; -\frac{4}{e}\right)$  et  $B\left(e; \frac{4}{e}\right)$ .

3)  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ :

$$f''(x) = 2 \cdot (-2) \cdot x^{-3} \cdot (2 - \ln x^2) + \frac{2}{x^2} \cdot \left(-\frac{2x}{x^2}\right) = -\frac{4}{x^3} \cdot (2 - \ln x^2) - \frac{4}{x^3} = \frac{4}{x^3} \cdot (-2 + \ln x^2 - 1)$$

D'où :

$$f''(x) = \frac{4}{x^3} \cdot (\ln x^2 - 3) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^*)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x^3} \cdot (\ln x^2 - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x^2 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x^2 = 3$$

exp. bij.

$$\Leftrightarrow x^2 = e^3$$

$$\Leftrightarrow x = \underbrace{-\sqrt{e^3}}_{\approx -4,48} \vee x = \underbrace{\sqrt{e^3}}_{\approx 4,48}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ :

$$\ln x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow \ln x^2 > 3$$

exp. bij. ↗

$$\Leftrightarrow x^2 > e^3$$

$$\Leftrightarrow x < -\sqrt{e^3} \vee x > \sqrt{e^3}$$

Tableau de concavité de  $f$  :

| $x$             | $-\infty$ | $-\sqrt{e^3}$ | $0$    | $\sqrt{e^3}$ | $+\infty$ |   |
|-----------------|-----------|---------------|--------|--------------|-----------|---|
| $\ln x^2 - 3$   | +         | 0             | -      | -            | 0         | + |
| $\frac{4}{x^3}$ | -         |               | -      | +            |           | + |
| $f''(x)$        | +         | 0             | -      | -            | 0         | + |
| $\mathcal{C}_f$ | U         | PI            | $\cap$ | $\cap$       | PI        | U |

$$f(-\sqrt{e^3}) = \frac{2}{-\sqrt{e^3}} \cdot \ln \left[ (-\sqrt{e^3})^2 \right] = -\frac{2}{\sqrt{e^3}} \cdot \ln e^3 = -\frac{6}{\sqrt{e^3}} \approx -1,34$$

$$f(\sqrt{e^3}) = \frac{2}{\sqrt{e^3}} \cdot \ln \left[ (\sqrt{e^3})^2 \right] = \frac{2}{\sqrt{e^3}} \cdot \ln e^3 = \frac{6}{\sqrt{e^3}} \approx 1,34$$

$\mathcal{C}_f$  admet deux points d'inflexion :  $I_1 \left( -\sqrt{e^3}; -\frac{6}{\sqrt{e^3}} \right)$  et  $I_2 \left( \sqrt{e^3}; \frac{6}{\sqrt{e^3}} \right)$ .

4) Équation réduite de la tangente  $t$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $\sqrt{e}$  :

$$t_{\sqrt{e}} \equiv y = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + f(\sqrt{e})$$

[Calculs à part :

$$\Leftrightarrow t_{\sqrt{e}} \equiv y = \frac{2}{e} \cdot (x - \sqrt{e}) + \frac{2}{\sqrt{e}}$$

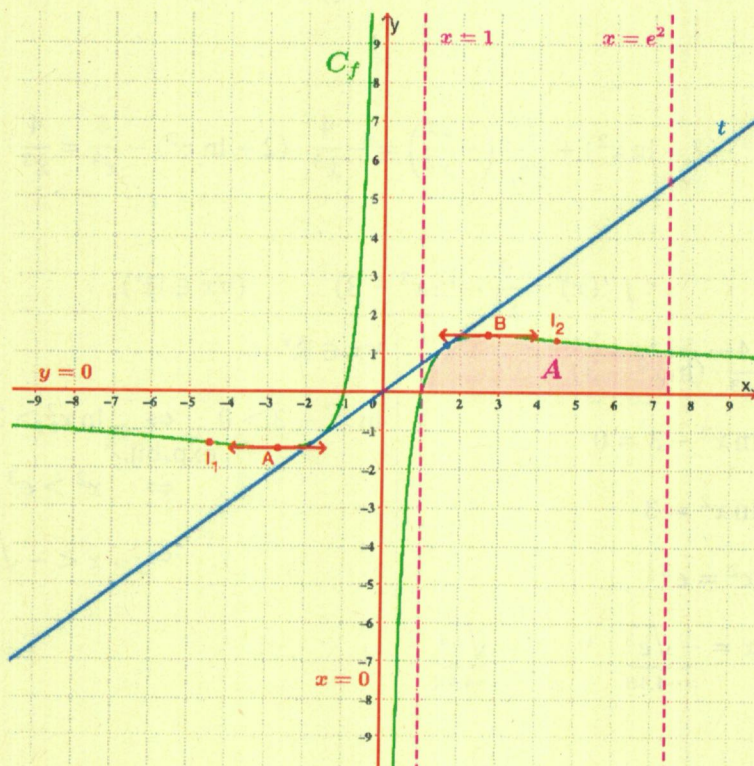
$$f(\sqrt{e}) = \frac{2}{\sqrt{e}} \cdot \ln \left[ (\sqrt{e})^2 \right] = \frac{2}{\sqrt{e}} \cdot \ln e = \frac{2}{\sqrt{e}}$$

$$\Leftrightarrow t_{\sqrt{e}} \equiv y = \frac{2}{e}x - \frac{2}{\sqrt{e}} + \frac{2}{\sqrt{e}}$$

$$f'(\sqrt{e}) = \frac{2}{(\sqrt{e})^2} \cdot (2 - \ln \left[ (\sqrt{e})^2 \right]) = \frac{2}{e} \cdot (2 - 1) = \frac{2}{e}$$

$$\Leftrightarrow t_{\sqrt{e}} \equiv y = \frac{2}{e}x$$

5)



- 6) Comme  $f(x) \geq 0 \forall x \geq 1$  (d'après la représentation graphique  $\mathcal{C}_f$ ), alors l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = e^2$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^{e^2} f(x) dx = \int_1^{e^2} \frac{2}{x} \cdot \ln x^2 dx & \left[ u(x) = \ln x^2 \quad u'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \right] \\
 &= \left[ \frac{[\ln x^2]^2}{2} \right]_1^{e^2} = \frac{[\ln(e^2)^2]^2}{2} - \frac{[\ln 1^2]^2}{2} = \frac{(\ln e^4)^2}{2} = \frac{4^2}{2} \\
 &= 8 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

## Question 3

5 + 3 = 8 points

1)  $f(x) = x + 2 - \frac{e^x}{4 - e^{2x}}$

ln bij.

C.E. :  $4 - e^{2x} \neq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \neq 4 \Leftrightarrow 2x \neq \ln 4 \Leftrightarrow 2x \neq 2 \ln 2 \Leftrightarrow x \neq \ln 2$

$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \underbrace{x}_{\rightarrow -\infty} + 2 - \frac{\overbrace{e^x}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{4 - e^{2x}}_{\rightarrow 4}} \right) = -\infty$  Pas d'A.H.G.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \underbrace{x}_{\rightarrow +\infty} + 2 - \frac{\overbrace{e^x}^{\rightarrow +\infty}}{\underbrace{4 - e^{2x}}_{\rightarrow -\infty}} \right) \quad f.i. \text{ " } \frac{\infty}{\infty} \text{ "}$ 
 $\left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{4 - e^{2x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{-2e^{2x}} \right]$ 
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \underbrace{x}_{\rightarrow +\infty} + 2 - \frac{\overbrace{e^x}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{4 - e^{2x}}_{\rightarrow 0}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + 2 - \frac{1}{\underbrace{2e^x}_{\rightarrow +\infty}} \right) = +\infty$ 
Pas d'A.H.D.

Déterminons si  $\mathcal{C}_f$  admet une A.O. au voisinage de  $+\infty$  et de  $-\infty$ .

Alternative 1 :

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\} :$

$f(x) = x + 2 + \varepsilon(x)$  où  $\varepsilon(x) = -\frac{e^x}{4 - e^{2x}}$

avec  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{e^x}{4 - e^{2x}} = 0$

Alternative 2 : Par les formules de Cauchy

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + 2 - \frac{e^x}{4 - e^{2x}}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 + \frac{2}{x} - \frac{\frac{e^x}{4 - e^{2x}}}{x} \rightarrow 0 \\
 &= 1 = a \\
 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 2 - \frac{e^x}{4 - e^{2x}} \right) = 2 = b
 \end{aligned}$$

Donc la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet la droite  $\Delta \equiv y = x + 2$  comme asymptote oblique au voisinage de  $-\infty$  et de  $+\infty$ .

2) Étude de la position relative de la courbe  $C_f$  par rapport à son A.O.  $\Delta \equiv y = x + 2$  :

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$ , soient  $M(x; f(x)) \in C_f$  et  $N(x; x + 2) \in \Delta$ . On a :

$$\bullet \quad y_M - y_N = f(x) - (x + 2) = -\frac{e^x}{4 - e^{2x}} = \frac{-e^x}{4 - e^{2x}}$$

$$\bullet \quad -e^x < 0 \text{ car } e^x > 0$$

$$\bullet \quad 4 - e^{2x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} < 4$$

exp. bij.

$$\Leftrightarrow 2x < \ln 4$$

$$\Leftrightarrow x < \ln 2$$

| $x$          | $-\infty$ | $\ln 2$ | $+\infty$ |
|--------------|-----------|---------|-----------|
| $4 - e^{2x}$ | +         | 0       | -         |

• Position relative :

| $x$               | $-\infty$            | $\ln 2$ | $+\infty$            |
|-------------------|----------------------|---------|----------------------|
| $-e^x$            | -                    |         | -                    |
| $4 - e^{2x}$      | +                    | 0       | -                    |
| $y_M - y_N$       | -                    |         | +                    |
| Position relative | $\frac{\Delta}{C_f}$ |         | $\frac{C_f}{\Delta}$ |

La courbe  $C_f$  se situe en-dessous de son A.O.  $\Delta$  sur  $]-\infty; \ln 2[$  et au-dessus de son A.O.  $\Delta$  sur  $]\ln 2; +\infty[$ .

#### Question 4

4 + 4 = 8 points

1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+4}{x+1} \right)^{x-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1+3}{x+1} \right)^{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{3}{x+1} \right)^{x-1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{(3t-1)-1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{3t-2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \underbrace{\left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t}_{\rightarrow e} \right]^3 \cdot \underbrace{\left( 1 + \frac{1}{t} \right)^{-2}}_{\rightarrow 1}$$

$$= e^3$$

Posons :  $\frac{1}{t} = \frac{3}{x+1} \Leftrightarrow t = \frac{x+1}{3} \Leftrightarrow x = 3t - 1$

Si  $x \rightarrow +\infty$ , alors  $t \rightarrow +\infty$

2)

$$\int \operatorname{Arcsin}(4x) dx = \int 1 \cdot \operatorname{Arcsin}(4x) dx$$

$$\begin{cases} u(x) = \operatorname{Arcsin}(4x) & v'(x) = 1 \\ u'(x) = \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}} & v(x) = x \end{cases}$$

$$\stackrel{IPP}{=} x \operatorname{Arcsin}(4x) - \int \frac{4x}{\sqrt{1-16x^2}} dx$$

$$= x \operatorname{Arcsin}(4x) + \frac{1}{8} \int \frac{-32x}{\sqrt{1-16x^2}} dx$$

$$= x \operatorname{Arcsin}(4x) + \frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{1-16x^2} + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$= x \operatorname{Arcsin}(4x) + \frac{1}{4} \sqrt{1-16x^2} + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

## Question 5

3 + 4 = 7 points

1)

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : f(x) = \frac{ax+b}{4x^2+1} + \frac{c}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2 - 7x - 2}{(4x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{(ax + b)(x - 1) + c(4x^2 + 1)}{(4x^2 + 1)(x - 1)}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 7x - 2 = ax^2 - ax + bx - b + 4cx^2 + c$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 7x - 2 = (a + 4c)x^2 + (-a + b)x + (-b + c)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 4c = 4 \\ -a + b = -7 \\ -b + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b + 7) + 4(-2 + b) = 4 \\ a = b + 7 \\ c = -2 + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5b - 1 = 4 \\ a = b + 7 \\ c = -2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 + 7 \\ c = -2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Donc  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,

$$f(x) = \frac{8x + 1}{4x^2 + 1} - \frac{1}{x - 1}$$

2) Les primitives de  $f$  sont données par :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int f(x) dx \\
 &= \int \left( \frac{8x+1}{4x^2+1} - \frac{1}{x-1} \right) dx \\
 &= \int \frac{8x}{4x^2+1} dx + \int \frac{1}{4x^2+1} dx - \int \frac{1}{x-1} dx \\
 &= \int \frac{8x}{4x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2}{1+(2x)^2} dx - \int \frac{1}{x-1} dx \\
 &= \ln(4x^2+1) + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(2x) - \ln|x-1| + k \quad (k \in \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

Déterminons le réel  $k$  :

$$\begin{aligned}
 F\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln 2 &\Leftrightarrow \ln 2 + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(1) - \ln\left|-\frac{1}{2}\right| + k = 2\ln 2 \\
 &\Leftrightarrow \ln 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \ln \frac{1}{2} + k = 2\ln 2 \\
 &\Leftrightarrow \ln 2 + \frac{\pi}{8} + \ln 2 + k = 2\ln 2 \\
 &\Leftrightarrow k = -\frac{\pi}{8}
 \end{aligned}$$

Finalement, la primitive cherchée est définie sur  $I = ]-\infty; 1[$  par :

$$F(x) = \ln(4x^2+1) + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(2x) - \ln(1-x) - \frac{\pi}{8}$$

## Question 6

3 + 4 = 7 points

$$1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad M(x; y) \in \mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_g \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow 5e^{-x} - 1 = 5 - e^x$$

$$\Leftrightarrow e^x - 6 + 5e^{-x} = 0 \quad | \cdot e^x > 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 6e^x + 5 = 0$$

Posons  $y = e^{2x}$  avec  $y > 0$ 

$$\Leftrightarrow y^2 - 6y + 5 = 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 > 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{6-4}{2} \vee y = \frac{6+4}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 1 \vee y = 5$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1 \vee e^x = 5$$

ln bij.

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \ln 5$$

2) D'après la figure :  $\forall x \in [0; \ln 5], g(x) \geq f(x) \geq 0$  car  $\mathcal{C}_g$  se situe au-dessus de  $\mathcal{C}_f$ .

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\ln 5} [g(x) - f(x)] dx \\ &= \int_0^{\ln 5} [(5 - e^x) - (5e^{-x} - 1)] dx \\ &= \int_0^{\ln 5} [(6 - e^x - 5e^{-x})] dx \\ &= [6x - e^x + 5e^{-x}]_0^{\ln 5} \\ &= (6 \ln 5 - e^{\ln 5} + 5e^{-\ln 5}) - (6 \cdot 0 - e^0 + 5e^{-0}) \\ &= 6 \ln 5 - 5 + 5e^{\ln \frac{1}{5}} - (-1 + 5) \\ &= 6 \ln 5 - 5 + 5 \cdot \frac{1}{5} - 4 \\ &= 6 \ln 5 - 8 \text{ u.a.} \end{aligned}$$