mini Manuel de

Mathématiques pour la physique

mini Manuel de Mathématiques pour la physique

Cours + Exercices corrigés

François Reynaud
Professeur de physique à la faculté des sciences de Limoges

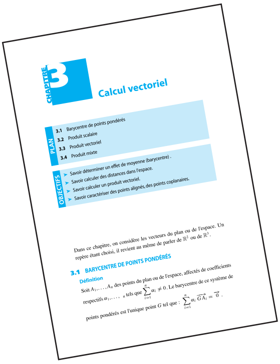
Daniel Fredon
Maître de conférences en mathématiques appliquées

Michel Bridier
Maître de conférences en physique

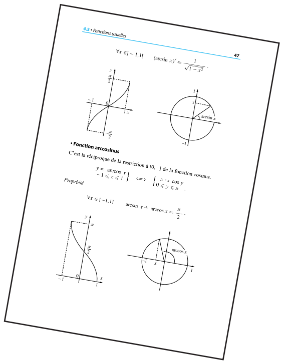
DUNOD

ISBN 978-2-10-058265-5

La page d'entrée de chapitre



Elle donne le plan du cours, ainsi qu'un rappel des objectifs pédagogiques du chapitre.



Le cours

Le cours, concis et structuré, expose les notions importantes du programme.

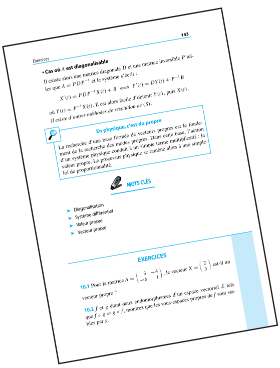
Les rubriques


Une erreur à éviter


Un peu de méthode


Un exemple pour comprendre

Les points clés à retenir



Les exercices

Ils sont proposés en fin de chapitre, avec leur solution, pour se tester tout au long de l'année.

Table des matières

CHAPITRE 1

Grandeurs et mesures

PLAN

OBJECTIFS

- Savoir utiliser une équation aux dimensions pour vérifier l'homogénéité d'une formule
- Connaître l'incertitude associée à une somme de mesures indépendantes

1.1 GRANDEURS PHYSIQUES

Définition

On appelle grandeur physique toute propriété de la nature qui peut être quantifiée par la mesure ou par le calcul, et dont les différentes valeurs possibles s'expriment à l'aide d'un nombre accompagné d'une unité de mesure.

Exemples : un temps, une longeur, une masse.

Étalons

Un étalon est un modèle de poids ou de mesure qui sert de point de référence. Aujourd'hui, les étalons fondamentaux donnent des définitions très précises des unités de base.

Exemple : Le mètre.

Système International d'unités (SI)

Le SI fixe des règles pour les préfixes, les unités dérivées... Le SI est fondé sur un choix de 7 unités de base bien définies, considérées comme indépendantes du point de vue dimensionnel et qui permettent de définir toutes les autres.

grandeurs de base	unités	symboles
masse	kilogramme	kg
longueur	mètre	m
temps	seconde	s
intensité du courant électrique	ampère	A
température	kelvin	K
quantité de matière	mole	mol
intensité lumineuse	candela	cd

Préfixes

facteurs	noms	symboles	facteurs	noms	symboles
10^3	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^6	méga	M	10^{-6}	micro	µ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	téra	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

Constantes fondamentales

Les constantes fondamentales régissent les théories de la physique. Les plus générales, comme :
c la vitesse de la lumière, G la constante gravitationnelle.

1.2 ANALYSE DIMENSIONNELLE

Dimension d'une grandeur physique

Les grandeurs fondamentales du SI vont être désignées par des lettres majuscules :
masse M ; longueur L ; temps T ; intensité du courant électrique I ; température Θ ; quantité de matière N, intensité lumineuse J.
On attribue à toutes les grandeurs dérivées, une dimension qui s'exprime par un produit (avec des puissances entières positives, négatives ou nulles) des dimensions des grandeurs fondamentales.

Exemples :
• Dans le cas d'un mouvement rectiligne, l'accélération s'écrit $a = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ où x est une longueur et t un temps. On lui attribue la dimension : $[a] = \dfrac{[x]}{[t]^2} = \dfrac{L}{T^2} = LT^{-2}$ (unité : $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$).
• Une force F est le produit d'une masse et d'une accélération. On lui attribue la dimension : $[F] = [m] \times [a] = MLT^{-2}$ (unité : Newton).
• Une énergie ou un travail $W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{OM}$. On lui attribue la dimension : $[W] = ML^2T^{-2}$. L'unité est le Joule.

Équation aux dimensions

L'analyse dimensionnelle consiste à déterminer les dimensions attribuées aux expressions reliant des grandeurs physiques.
Cela permet de contrôler la cohérence de formules ou d'égalités. En effet, pour additionner, ou égaler, deux expressions reliant des grandeurs physiques, il est nécessaire (mais pas suffisant) qu'elles aient la même dimension.

1.3 MESURE DES GRANDEURS

Mesurage

La mesure est l'ensemble des opérations ayant pour but de déterminer une valeur numérique d'une grandeur physique.
Le mesurande est la grandeur soumise à mesurage.
L'objectif d'un mesurage est d'obtenir la valeur x d'un mesurande X.
Mais divers types d'erreurs apparaissent :
– des **erreurs systématiques** dues à la technique de mesure, à l'appareil, à l'opérateur, à l'erreur de modélisation du système étudié ;
– des **erreurs aléatoires**.

Ces erreurs entraînent un écart entre le résultat du mesurage et la valeur vraie (inaccessible) du mesurande. Elles sont souvent appelées « bruit ».

Présentation d'un résultat

Après avoir réduit au mieux les erreurs, il reste toujours une incertitude $\pm I$. L'affichage $x \pm I$ signifie que la valeur vraie du mesurande appartient à l'intervalle $[x - I\,; x + I]$ avec une forte probabilité. L'incertitude I dépend de la loi de probabilité correspondant au cas expérimental étudié.
Si les erreurs restantes sont surtout aléatoires, il est très fréquent que le bruit sur la mesure corresponde à une loi normale. Dans ce cas, on choisit souvent $I = 2\sigma$ (où σ désigne l'écart type des mesures d'une même grandeur) qui correspond à une probabilité de 95 % que la vraie valeur soit dans l'intervalle affiché.
Dans l'affichage du résultat, pensez aussi à ne conserver qu'un nombre de chiffres après la virgule qui ait du sens.

Exemple : ne concluez pas avec $358{,}646\,327 \pm 4{,}128$, mais plutôt avec $358{,}6 \pm 4{,}2$.

Arrondissez la mesure au plus près, et majorez l'incertitude.

Utilisation d'un grand nombre de mesures

Supposons que les erreurs systématiques aient été réduites autant que possible et qu'il ne reste que des erreurs aléatoires. Ces erreurs sont alors indépendantes et les diverses variances s'additionnent, ce qui n'est pas le cas des écarts type. Autrement dit, on a :

$$\text{mesure} = x + \text{bruits } 1 + \text{bruits } 2 + \ldots = x \pm 2\sigma$$

avec $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots}$
Quand on répète n fois une mesure et qu'on calcule la moyenne des résultats, l'incertitude mesurée par des écarts type est alors réduite : elle est multipliée par $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Pour comprendre ce phénomène, il suffit de penser que les différences (avec la vraie valeur) positives et négatives se compensent en partie.

Brève histoire du mètre

Les longueurs ont longtemps été mesurées par rapport à l'homme (pied, pouce, toise, ...), ce qui posait des problèmes de communication car les hommes sont différents. De plus, en prenant le roi comme personne de référence, on avait un fort symbole monarchique.

Le 26 mars 1791, l'assemblée constituante définit le mètre comme la dix millionième partie du quart du méridien terrestre. Les astronomes Delambre et Méchain sont alors chargés par l'Académie des Sciences de mesurer la méridienne de Dunkerque à Barcelone. À partir d'une longueur connue et disposant d'outils pour mesurer les angles, ils vont avancer par triangulation en utilisant le théorème des sinus. Leur aventure durera 7 ans et nécessitera environ 500 000 mesures d'angles.

La mesure obtenue sera diffusée dans le monde grâce à la fabrication d'étalons de platine. Une mesure effectuée par satellite en 1980 montre que leur estimation de la longueur de la méridienne comportait une erreur de 10 m seulement !

En 1960, le mètre est défini comme étant égal à 1 650 765,73 fois la longueur d'onde d'une radiation orangée émise par l'isotope 86 du Krypton.

En 1983, le mètre est redéfini comme étant la distance parcourue par la lumière dans le vide en 1/299 792 458 secondes.

MOTS CLÉS

- Équation aux dimensions
- Incertitude

EXERCICES

1.1 Déterminez la dimension de l'énergie, de la puissance, du potentiel U et de la résistance R.

1.2 Déterminez la dimension de la capacité C d'un condensateur.

1.3 Vérifiez l'homogénéité de la relation $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ qui représente la fréquence f d'oscillation d'un système solide-ressort.
m est la masse du solide, k la constante de raideur. La force de rappel $\overrightarrow{F}$ est liée à l'allongement $\overrightarrow{\Delta l}$ par la relation : $\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{\Delta l}$.

1.4 En utilisant l'expression de la quantité de travail échangé avec un gaz parfait $\delta W = -p\,\mathrm{d}V$ et celle du travail d'une force, retrouver la dimension d'une pression.

SOLUTIONS

1.1 • **Énergie**

En partant de la relation $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$, on obtient d'abord : $[E_c] = [m]\,[v]^2$.

Par ailleurs comme la vitesse $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ s'exprime en m.s^{-1}, on a $[v] = LT^{-1}$. On obtient donc $[E_c] = ML^2T^{-2}$; l'unité est le Joule.

• **Puissance**

La puissance est l'énergie par unité de temps. On a donc $[P] = ML^2T^{-3}$; l'unité est le Watt.

• **Potentiel**

De $P = UI$ (où U est en Volt et I en Ampère) on déduit : $[P] = [U][I]$, puis $[U] = [P][I]^{-1} = ML^2T^{-3}I^{-1}$.

• **Résistance**

La loi d'Ohm s'écrit $U = RI$, ce qui entraîne :
$[R] = [U][I]^{-1} = ML^2T^{-3}I^{-2}$.

1.2 L'énergie emmagasinée par le condensateur est $E_c = \dfrac{1}{2}CU_c^2$.

Avec l'exercice précédent, on sait que $[E_c] = ML^2T^{-2}$ et $[U_c] = ML^2T^{-3}I^{-1}$.

On en déduit : $[C] = \dfrac{[E_c]}{[U_c]^2} = M^{-1}L^{-2}T^4I^2$.

1.3 Il s'agit de vérifier que les deux membres de la relation ont la même dimension.

• Comme f est une fréquence, on a $[f] = T^{-1}$.

• Déterminons la dimension du second membre. On a $\left[\dfrac{1}{2\pi}\right] = 1$ et $[m] = M$. De l'égalité $\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{\Delta l}$ on déduit : $[F] = [k]L$.

Comme $[F] = MLT^{-2}$ (voir le cours), on en déduit que $[k] = MT^{-2}$, puis $\left[\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}\right] = \sqrt{\dfrac{[k]}{[m]}} = \sqrt{\dfrac{MT^{-2}}{M}} = T^{-1}$.

• Les deux membres ont donc la même dimension : la relation est homogène.

1.4 En utilisant la formule donnée, on a : $[\delta W] = [p] \times [\mathrm{d}V]$.

Comme : $[\delta W] = [F]L = MLT^{-2}L = ML^2T^{-2}$ et $[\mathrm{d}V] = L^3$, on en déduit :

$$[p] = ML^{-1}T^{-2}.$$

L'unité est le Pascal.